



Centre universitaire Salhi Ahmed -Naâma
Institut des Sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'étude

Pour obtenir le diplôme de
Master En Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Filière : Mathématiques

Thème

**Un modèle de différences finies d'ordre élevé pour la
résolution numérique de l'équation de Laplace**

Présenté par :
GHEZAL MAAMAR

Soutenu le : 07/07/2019

Devant le jury composé de:

<i>Dr BELABED</i> Zakaria	maître de conférences A	C-Univ naâma	Encadreur
<i>Dr BELGUERNA</i> Abderrahmane	maître de conférences A	C-Univ naâma	Président
<i>Mme KHALAOUTI</i> Hafida	maître assistant A	C-Univ naâma	Examineur

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de recherche **D.r BELABED Zakaria** qui m'a apporté son appui tout au long de la réalisation de ce memoire. Je lui suis reconnaissant pour son soutien, sa disponibilité et ses précieuses orientations durant toute cette période de labeur et de recherche

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du jury qui ont bien voulu consacrer leur attention et leur temps pour lire et juger ce travail de recherche.

Je n'aurai garde d'oublier ceux qui par leur aide, ce travail n'aurait pas abouti. Mes vifs remerciements , pour son soutien moral et sa disponibilité.

Dédicace

À mes parents ; qui ont fait et feront tout pour moi sans que je puisse les remercier assez,
et à qui je dois tous les signes de respect, de gratitude et d'amour ;
À mes chères soeurs et chers frères et leurs enfants pour leur présence et leurs
encouragements .
À tous les étudiants de ma promotion ;
À tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail ;
Je dédie ce modeste travail.

Résumé

L'objectif principal de présent travail est de développer une nouvelle formulation numérique basée sur différences finies compacte d'ordre quatre pour la résolution numérique de l'équation de Laplace. Les séries de Taylor d'ordre élevées sont utilisées pour approximer les dérivées dans les coordonnées cartésiennes. Cette étude porte sur l'analyse de l'effet du maillage et les schémas des différences finies sur les solutions numériques et l'erreur commise. Les résultats obtenus sont comparés par ceux obtenus analytiquement. Cette étude présente la sensibilité des résultats obtenus par les différents paramètres du maillage et ils sont différents d'une façon considérable du deuxième à quatrième ordres des différences finies. Cette analyse est pertinente à l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques avancées.

Mots-clés : méthode des différences finies, modèle compacte d'ordre quatre, équations aux dérivées partielles elliptiques.

Abstract

The aim of present work is to develop a new numerical formulation based on compact fourth order finite difference to solve numerically Laplace's equation. The higher Taylor's series are used to approximate the function's derivatives in Cartesian coordinates. This study carries to analyze the effects of mesh parameter and finite difference schemas on numerical solutions and error. The obtained results are compared with those predicted by exact analytical solutions. This study shows the sensitivity of the obtained results to different mesh parameters and that the results generated may vary considerably from second to fourth order finite difference schemas. Comprehensive visualization of results is provided. The analysis is relevant to advanced elliptic partial differential equations.

Keywords: finite difference method, compact fourth order model, elliptic partial differential equations.

Table des Matières

Introduction générale	1
1 L'équation de Laplace	3
1.1 L'équation de laplace	3
1.2 Propriétés fondamentales des fonctions harmoniques :	6
1.2.1 Principe du maximum	7
1.2.2 Unicité de la solution	7
1.3 FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIP- TIQUES	7
1.3.1 Généralités	7
1.3.2 Approche variationnelle	8
1.3.3 Théorie de Lax-Milgram	11
2 Différences finies	15
2.1 Généralités	15
2.1.1 Mise en ouvre	15
2.1.2 Coordonnées cartésiennes et sphériques	15
2.2 Discrétisation de l'EDP	16
2.2.1 Méthode des différences finies:	16
2.2.2 Approximation de l'équation différentielle partielle	17
2.3 Exemple simple 2D	18
2.3.1 Cas condition de Dirichlet	18
2.3.2 Cas de condition de neumann homogènes	21
2.4 difference finie d'ordre 4 :	25
3 Exemples de validation	28
3.1 Introduction:	28
3.2 Exemple de la validation :	28
3.3 Les résultats numériques et discussion	29
3.3.1 Exemple 01 :	29
3.3.2 Exemple 02 :	34
3.4 Conclusion	40

Conclusion générale et perspectives	41
ANEXXE	43
Bibliographie	46

Liste des figures

2.1	L'équation de Laplace sur le domaine carré avec les conditions de Dirichlet	18
2.2	Maillage et numérotation du noeud exemple 01	19
2.3	Résolution du système d'équation exemple 01	21
2.4	L'équation de Laplace sur le domaine carré avec les conditions de Neumann	21
2.5	Maillage et numérotation du noeud exemple 02	22
2.6	Résolution du système d'équation exemple 02	24
3.1	Solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 02 maillage 5*5 exemple 01	29
3.2	Solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 04 maillage 5*5 exemple 01	30
3.3	Solution exacte de l'équation de Laplace du maillage 5*5 exemple 01	31
3.4	Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 5*5 exemple 01	32
3.5	Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 5*5 exemple 01	32
3.6	Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 20*20 exemple 01	33
3.7	Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 20*20 exemple 01	34
3.8	solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 5*5 exemple 02	35
3.9	solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 5*5 exemple 02	36
3.10	solution exacte de l'équation de Laplace du maillage 5*5 exemple 02	36
3.11	erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 5*5 exemple 02	37
3.12	erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 5*5 exemple 02	38
3.13	erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 20*20 exemple 02	39
3.14	erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 20*20 exemple 02	39

Introduction générale

Introduction et problématique

L'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, et plus particulièrement des EDP linéaires, est une thématique importante tant d'un point de vue académique que formulation théorique ou numérique car elle concerne de nombreux domaines appliqués tels que le secteur énergétique, l'aéronautique, l'automobile ou encore le génie nucléaire. Dans le cas de l'analyse des EDP linéaire s'appliquent et on compte jusqu'à ce jour de nombreuses applications réelles. La résolution analytique des EDP ne sont alors plus adaptés pour représenter la solution exacte, d'où le besoin d'un modèle plus explicite et stable avec l'existence et l'unicité fournit par cette solution analytique.

Sur le plan analytique peu de solutions sont disponibles dans la littérature pour la quantité énorme de problèmes résolus, et surtout les problèmes liés aux EDP non linéaires avec conditions aux limites et/ou initiales compliquées. Ceci est dû à la complexité mathématique de tels problèmes. Pour ce faire, on fait appel aux méthodes numériques qui permettent de décrire les équations aux dérivées partielles sous formes discrétisées. Puis, la naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes numériques (discrétisation) puis le développement de codes numériques, s'adaptant à l'augmentation constante de la taille des systèmes traités. Ainsi on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le la résolution approches des EDPs. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement de résultats expérimentaux, avec entre autres le développement de techniques d'analyse dans le domaine numérique et celui de logiciels dédiés à l'analyse une variété des problèmes aux dérivées partielles.

Les solutions numériques sont des solutions approchées qui peuvent être obtenues par diverses méthodes. Parmi celles-ci, on peut citer la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. La méthode des différences finies est la méthode la plus ancienne. Son principe repose sur l'utilisation des développements limités de Taylor et sur la discrétisation du domaine et des grandeurs étudiés. Pour une étude mathématique ap-

profondie, on pourra se référer aux ouvrages de Sibony et al. (1982) et de Euvrard (1988).

La méthode des éléments finis est plus récente et peut être utilisée dans des domaines scientifiques très divers. Son principe repose sur l'utilisation de formulations variationnelles (Bathe (1982), Zienkiewicz et al.(1991), Morand et Ohayon (1994)). La méthode des différences finies est basée sur l'approximation des fonctions dérivées apparaissant dans les équations de formulation du problème. Les fonctions dérivées sont écrites sous une forme approchée en utilisant le développement limité de Taylor. L'équation aux dérivées partielles est ainsi approchée par une équation aux différences finies. Cette équation est écrite ou projetée en un point du maillage sous forme de schéma. Plusieurs types de schémas aux différences finies sont utilisés ; différences finies en avant, en arrière et centrées. Ces schémas, ayant des précisions différentes, sont utilisés selon le problème rencontré.

Avec la méthode des différences finies, les équations sont plutôt simples. La précision de la méthode est directement dépendante de la finesse de discrétisation. Pour la méthode des éléments finis, la pertinence repose en partie sur la richesse de l'élément choisi qui conduit à une plus grande complexité pour chaque élément.

Le présent travail à l'objectif de présenter une formulation simple et efficace par différences finies à couplés à un algorithme efficace d'analyse numérique. La formulation utilisée est basée sur le développement de Taylor d'ordre 4 dont l'objet principal est d'éliminer l'erreur commise par cette méthode sans le recours vers un maillage ou discrétisation raffinée.

Organisation de mémoire :

Après une introduction générale sur le thème de l'application de la méthode des différences finies d'ordre 4 pour résoudre l'équation de Laplace, cette étude est organisée en trois (3) chapitres :

Dans **le premier chapitre** : nous présentons une recherche bibliographique détaillée consacrée à l'équation de Laplace, sa forme variationnelle et aussi les différents types des conditions aux limites

Le deuxième chapitre : Formulation numérique basée sur la méthode des différences finies d'ordre 4 pour résoudre l'équation de Laplace.

le chapitre trois : est réservé à l'application des schémas d'ordre 2 et 4 et les résultats numériques obtenus par le code programmé sous Matlab avec la comparaison avec les résultats obtenus analytiquement.

Enfin, on résume les différentes conclusions obtenues et des recommandations pour des travaux futurs.

L'équation de Laplace

1.1 L'équation de Laplace

Par définition une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

Les EDP évoquées plus haut sont classées en EDP elliptiques/ paraboliques / hyperboliques. Elles ont des propriétés mathématiques différentes, et leur résolution approchée par des techniques numériques requièrent aussi parfois des méthodes distinctes.

Des cas particuliers sont les équations elliptique de Poisson et de Laplace, qui peuvent être vues comme des cas limites lorsque la dépendance en temps est supprimée, ou remplacée par une dépendance harmonique. Leur résolution numérique intervient dans de nombreux domaines scientifiques et industrielles : météorologie, aéronautique, électronique, télécommunications, mathématiques financières, automobile, environnement, etc.

Définition 1.1. L'opérateur Laplacien, ou simplement le Laplacien, est la divergence du gradient. Il est souvent noté Δ que pour une fonction $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fois différentiables sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^d .

$$\Delta = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(u)}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

Soit l'équation

$$\Delta(u) = f \tag{1.2}$$

Où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles défini par : $\Delta = \frac{\partial^2(u)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2(u)}{\partial x_n^2}$, appelé Laplacien, et f est une fonction continue donnée.

Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématique. Du côté physique, la solution de l'équation (1.2) est par exemple le potentiel électrique engendré

dans le plan par la répartition de charges $= \frac{1}{4\pi} f$

On le retrouve systématiquement dans les expressions de l'équation de Poisson, de l'équation de la chaleur et d'onde. Du point de vue mathématique, Le Laplacien apparaît dans de nombreuses disciplines théoriques, comme la géophysique, l'électrostatique, la thermodynamique, la mécanique classique et quantique, est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie.

Les solutions de (1.2) pour $f = 0$ qui doivent être des fonctions de classe C^2 sont par exemple appelées harmoniques.

Pour trouver des solutions particulières d'une équation de Laplace, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions. Les contraintes les plus fréquentes sont :

1. Les conditions aux limites : si u est fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ on a trois types de conditions:
 - Condition de Dirichlet où u est fixé sur le bord de Ω $u|_{\partial\Omega} = g$.
 - Condition de Neumann où la dérivée normale de u est fixé : $\frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = g$.
 - Condition de Robin ou Mixtes : $\alpha(x)u + \beta(x)\frac{du}{dn} = g$ sur $\partial\Omega$.
 Si $g = 0$ on a des conditions homogènes au bord .

[2]

Problème aux limites: Se compose à EDP munie de condition aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur laquelle elle est posée, le problème est bien posé si pour toute donnée (second membre, domaine, données aux bord, etc.), il admet une solution unique et si cette solution dépend continuellement de les données. Par exemple Problème de Dirichlet, problème de Neumann et problème de Robin ,etc.

1. Problème de Dirichlet

$$(p1) = \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = g_0 \\ u(l) = g_l \end{cases} \quad (1.3)$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = g_0 \\ u(l) = g_l \end{cases} \quad (1.4)$$

Sont des conditions de Dirichlet

Alors :

$$u(0) = a = g_0, u(l) = a + \beta L = g_l \quad (1.5)$$

Donc :

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b = \frac{g_l - g_0}{l} \end{cases} \quad (1.6)$$

On obtient :

$$u(x) = \frac{g_l x - g_0 x + g_0 l + l g_l - l g_l}{l} \quad (1.7)$$

Alors :

$$u(x) = g_l + \frac{g_l - g_0}{l}(x - l) \quad (1.8)$$

Le problème est bien posé, car il conduit à une solution unique.

2. Problème de Neumann

$$(p2) = \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = h_0 \\ u(l) = h_l \end{cases} \quad (1.9)$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = h_0 \\ u(l) = h_l \end{cases} \quad (1.10)$$

Sont des conditions de Neumann

- Si : $h_0 = h_l$, alors $u(x) = h_0 + c$, donc admet infinité de solutions.
- Si : $h_0 \neq h_l$,alors n'est pas solution. Le problème n'est pas bien posé.

3. Problème de Dirichlet-Neumann (Mixte)

$$(p3) = \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = g_0 \\ u(l) = h_l \end{cases} \quad (1.11)$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = g_0 \\ u(l) = h_l \end{cases} \quad (1.12)$$

Sont des conditions mixte (Dirichlet-Neumann)

Alors :

$$u(0) = a = g_0 \quad u'(x) = b \quad \text{et} \quad u'(l) = h_l$$

Donc :

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b = h_l \end{cases} \quad (1.13)$$

On obtient :

$$u(x) = g_0 + h_l x \quad (1.14)$$

4. Problème de Robin

$$(p4) = \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = g_0 \\ (\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u)(L) = g_L \end{cases} \quad (1.15)$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = g_0 \\ (\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u)(L) = g_L \end{cases} \quad (1.16)$$

Sont des conditions de Robin

Les conditions aux limites (1.7) sont satisfaites si et seulement si a et b vérifient

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b + \alpha(g_0 + bL) = g_L \end{cases} \quad (1.17)$$

dont l'unique solution est

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b = \frac{g_L - \alpha g_0}{1 + \alpha L} \end{cases} \quad (1.18)$$

Donc on obtient :

$$u(x) = g_0 + \frac{g_L - \alpha g_0}{1 + \alpha L} x \quad (1.19)$$

On montre que les problèmes (Dirichlet, Neumann, Robin, etc.) sont bien posé à l'aide de principe du maximum. Ce résultat permet aussi de démontrer un grand nombre de résultats sur l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problème elliptiques. [10]

1.2 Propriétés fondamentales des fonctions harmoniques

:

Une propriété remarquable des fonctions harmoniques, c'est à dire telles que $\Delta(u) = 0$, est le principe suivant :

1.2.1 Principe du maximum

Théorème 1.1. *Si $\Delta(u) = 0$ est une fonction deux fois continûment dérivable qui vérifie $\Delta(u) = 0$ dans l'ouvert Ω , et si u n'est pas constante, alors u atteint son maximum sur le bord de Ω . [4]*

1.2.2 Unicité de la solution

Nous avons utilisé des méthodes très diverses pour trouver des solutions de l'équation de Laplace avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur le bord du domaine. La question qui se pose est de savoir si la solution est unique.

Le principe du maximum entraîne l'unicité de la solution du problème suivant.

Théorème 1.2. *Le problème suivant a une solution u et cette solution est unique si Γ_1 est un ouvert non vide du bord $\partial\Omega$ et si $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$*

L'équation de Laplace

$$\Delta(u) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (1.20)$$

$$u = \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \eta \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \quad (1.22)$$

Si $\Gamma_2 = \partial\Omega$ et donc si Γ_1 est vide, il est clair que, si il y a une solution u , alors il en a une infinité puisque pour toute constante c , la fonction $u + c$ est aussi solution. Alors, il n'y a pas unicité. [4]

1.3 FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

1.3.1 Généralités

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données.

L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle. Disons tout de suite que l'intérêt de cette approche dépasse, et de loin, le cadre des e.d.p. elliptiques et même le cadre d'analyse mathématique "pure" auquel nous nous restreignons pour l'instant. En effet, nous reprendrons cette approche variationnelle pour les problèmes d'évolution en temps (e.d.p. de type parabolique ou hyperbolique), et elle sera cruciale pour comprendre la méthode numérique des différences finies que nous développerons. Par

ailleurs, cette approche admet une interprétation physique ou mécanique très naturelle. Autant dire que le lecteur ne peut pas faire l'économie de la présentation qui suit de cette approche variationnelle !

Au cours de ce chapitre et des suivants, l'exemple prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique sera le Laplacien pour lequel nous étudierons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.23)$$

où nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Dans (1.23), Ω est un ouvert de l'espace \mathbb{R}^N , $\partial\Omega$ est son bord (ou frontière), f est un second membre (une donnée du problème), et u est l'inconnue.

Définition 1.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $\bar{\Omega}$ sa fermeture. On note $C(\Omega)$ (respectivement, $C(\bar{\Omega})$) l'espace des fonctions continues dans Ω (respectivement, dans $\bar{\Omega}$).

Soit un entier $k \geq 0$. On note $C^k(\Omega)$ (respectivement, $C^k(\bar{\Omega})$) l'espace des fonctions k fois continûment dérivables dans Ω (respectivement, dans $\bar{\Omega}$).

Une **solution classique** (on parle aussi de **solution forte**) de (1.23) est une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, ce qui implique que le second membre f doit appartenir à $C(\Omega)$. Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation classique de (1.23) par une formulation, dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse. [1]

1.3.2 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

Formule de Green

Théorème 1.3. (Formule de Green) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit ω une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green [1]

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \omega(x) n_i(x) ds \quad (1.24)$$

où n_i est la i -ème composante de la normale extérieure unitaire de Ω .

Remarque 1.1. Dire qu'une fonction régulière ω a son support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$ veut dire qu'elle s'annule à l'infini si le fermé n'est pas borné. On dit aussi que la fonction ω a un support compact dans $\bar{\Omega}$ (attention : cela n'implique pas que ω s'annule sur le bord $\partial\Omega$). En particulier, l'hypothèse du Théorème 1.3 à propos du support borné de la fonction ω dans $\bar{\Omega}$ est inutile si l'ouvert Ω est borné. Si Ω

n'est pas borné, cette hypothèse assure que les intégrales dans (1.24) sont finies. Le Théorème 1.3 a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green (1.24). Le lecteur qui voudra économiser sa mémoire ne retiendra donc que la formule de Green (1.24)

Corollaire 1.1. (Formule d'intégration par parties) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u et v deux fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) ds \quad (1.25)$$

Démonstration. Il suffit de prendre $w = uv$ dans le Théorème 1.3 [1]

Corollaire 1.2. Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds \quad (1.26)$$

où $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq n}$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ [1]

Démonstration. On applique le Corollaire 1.1 à v et on somme i .

Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert est borné et Ω régulier, et que le second membre f de (1.10) est continu sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

Proposition 1.1. Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ Soit X l'espace défini par

$$X = \{ \phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.10) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \text{pour toute fonction } v \in X \quad (1.27)$$

L'égalité (1.27) est appelée la **formulation variationnelle** du problème aux limites (1.10).

Remarque 1.2. Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (1.27) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (1.10) qui requiert que u appartienne à $C^2(\bar{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (1.27) que (1.10) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

Dans la formulation variationnelle (1.27), la fonction v est appelée **fonction test**. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (1.10). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.

Lorsqu'on prend $v = u$ dans (1.27), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (1.27)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (1.27)).

Démonstration. Si u est solution du problème aux limites (1.10), on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégration par parties du Corollaire 1.2

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds \quad (1.28)$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$, donc

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (1.29)$$

qui n'est rien d'autre que la formule (1.27). Réciproquement, si $u \in X$ vérifie (1.27), en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par parties précédente on obtient

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x) + f(x)) v(x) dx = 0 \text{ pour toute fonction } v \in X \quad (1.30)$$

Comme $(\Delta u + f)$ est une fonction continue, grâce au Lemme 1.4 on conclut que $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, comme $u \in X$, on retrouve la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (1.23).

Lemme 1.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $g(x)$ une fonction continue dans Ω . Si pour toute fonction ϕ de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω , on a*

$$\int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx = 0$$

alors la fonction g est nulle dans Ω

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(x_0) > 0$ (sinon on prend $-g$). Par continuité,

il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, ϕ à support inclus dans ω . On a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = \int_{\omega} g(x)\phi(x)dx = 0$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g . Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 1.3. En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (1.27) sous la forme : trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in X \quad (1.31)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \quad (1.32)$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (1.33)$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(v)$ est une forme linéaire sur X .

1.3.3 Théorie de Lax-Milgram

Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V . Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y \rangle$, qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est une suite convergente dont la limite appartient à cet espace.) Suivant la Remarque 1.3 nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u; v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V \quad (1.34)$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $C > 0$ tel que $|L(v)| \leq C \|v\|$ pour toute $v \in V$;
2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $w \rightarrow a(w; v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(w; v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $w \in V$;

3. $a(., .)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w, v)| \leq M \|w\| \|v\| \text{ pour tout } w, v \in V; \quad (1.35)$$

4. $a(., .)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $v > 0$ tel que

$$a(u, v) \geq v \|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V \quad (1.36)$$

Théorème 1.5. [Lax-Milgram] Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V , $a(., .)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle (1.34) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L . [1]

Démonstration. Pour tout $w \in V$, l'application $v \rightarrow a(w, v)$ et une forme linéaire continue sur V : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V , noté $A(w)$, tel que

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w, v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \rightarrow A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité (1.35) de $a(w, v)$ montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M \|w\| \|A(w)\|$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M \|w\|$ et donc $w \rightarrow A(w)$ est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V , noté f , tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in V$$

Finalement, le problème variationnel (1.34) est équivalent à :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = f \quad (1.37)$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L).

La coercivité (1.36) de $a(w, v)$ montre que

$$v \|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|A(w)\| \|w\|$$

ce qui donne

$$v \|w\| \leq \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V; \quad (1.38)$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $Im(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $Im(A)$ est fermé dans V et que $Im(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $v = \{0\}^\perp = (Im(A)^\perp)^\perp = Im(A) = Im(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $Im(A)$ qui converge vers b dans V . En vertu de (1.38) on a

$$v \|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\| \quad (1.39)$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in \text{Im}(A)$ et $\text{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in \text{Im}(A)^\perp$; la coercivité (1.36) de $a(w, v)$ implique que

$$v \|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle = 0 \quad (1.40)$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (1.38) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continûment de f . [1]

Remarque 1.4. Si l'espace de Hilbert V est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du Théorème (1.5) de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité (1.38) de A est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général) que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(w, v)$ est essentielle puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A . Remarquons pour finir que, si $V = \mathbb{R}^N$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture, $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, d'un simple système linéaire $Au = f$. [1]

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (1.34) réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en mécanique).

Proposition 1.2. On se place sous les hypothèses du Théorème 1.5 de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v; v) - L(v). \quad (1.41)$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (1.34). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \quad (1.42)$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (1.34). [1]

Démonstration. Si u est solution de la formulation variationnelle (1.34), on développe (grâce à la symétrie de a)

$$J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \geq J(u) \quad (1.43)$$

Comme $u + v$ est quelconque dans V , u minimise bien l'énergie J dans V . Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \tag{1.44}$$

Pour $v \in V$ on définit une fonction $j(t) = J(u + tv)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j , on en déduit que $j'(0) = 0$ qui, par un calcul simple, est exactement la formulation variationnelle (1.34).

Généralités

Differences finies

2.1 Généralités

2.1.1 Mise en ouvre

La mise en équation des différence finies comporte les étapes suivantes :

- Définir maillage couvrant le domaine et sa frontière ;
- En tout noeud inférieur au domaine , exprimer les dérivées á l'aide des différences finies. ces termes contiennent des points situés sur la frontière ;
- Exprimer les valeurs de la fonction en tout point sur la frontière en tenant compte des conditions aux limites. On obtient alors un système de n équations à n inconnus dont on résout par l'une des techniques de résolution.

[6]

2.1.2 Coordonnées cartésiennes et sphériques

Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes bidimensionnelles, le laplacien est :

$$\Delta u = \nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

Coordonnées sphériques

Avec le paramétrage

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad ; \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad ; \quad z = r \cos(\theta) \quad (2.2)$$

le laplacien s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad [5]$$

2.2 Discrétisation de l'EDP

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b] * [c, d]$$

On prendra Δ_x et Δ_y les pas de discrétisation des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$

1. Discrétisation de l'intervalle [a,b]

$$\Delta_x = \frac{b-a}{n} \quad (n_x \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [a, b])$$

$$\Rightarrow x(i) = x_i = a + i * \Delta_x; i = 0, 1, \dots, nx$$

2. Discrétisation de l'intervalle [c,d]

$$h_y = \frac{d-c}{n} \quad (n_y \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [c, d])$$

$$\Rightarrow y(i) = y_i = a + i * \Delta_y; i = 0, 1, \dots, ny$$

Remarque 2.1. Constatons que $x_{i+1} = a + (i+1) * \Delta_x = (a + i h_x) + \Delta_x = x_i + \Delta_x$ Dans la suite, nous remplacerons chaque fois $x_i + h_x, x_i - h_x, y_j + h_y, y_j - h_y$ successivement par $x_{i+1}, x_{i-1}, y_{j+1}, y_{j-1}$

[8]

2.2.1 Méthode des différences finies:

Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée. Soit $f(x, y)$ une fonction continue et dérivable de classe C^1 , alors la dérivée partielle première de f par rapport à x est calculée par la formule: $f'_x(x, y) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x+h_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x}$

Si $\Delta_x < 1$, le développement de Taylor au voisinage de 0 de $f(x + \Delta_x, y)$ donne:

$$f(x + \Delta_x, y) = f(x, y) + \Delta_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(x) \simeq f(x, y) + \Delta_x \frac{\partial f}{\partial x} \text{ avec une erreur de l'ordre de } \Delta_x.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x+h_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x}$$

Ceci est appelé le schéma avant.

De la même manière, nous pouvons aussi donner le schéma arrière qui est de la forme:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x-h_x, y)}{\Delta_x}$$

Avec la formule de Taylor, ceci nous donne:

$$f(x, y) = f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \theta(\Delta_x) \simeq f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ avec une erreur de } \Delta_x.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x,y) - f(x-h_x,y)}{\Delta_x}$$

La somme de ces deux schémas nous donne le schéma centré suivant:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x+h_x,y) - f(x-h_x,y)}{2h_x}$$

En résumé, on a les trois approximations suivantes pour la dérivée partielle première de $f(x, y)$ par rapport à x avec la formule de Taylor:

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} \simeq \begin{cases} \frac{f(x+h_x,y) - f(x,y)}{\Delta_x} & \text{schéma avant} \\ \frac{f(x,y) - f(x-h_x,y)}{\Delta_x} & \text{schéma arrière} \\ \frac{f(x+h_x,y) - f(x-h_x,y)}{\Delta_x} & \text{schéma centré} \end{cases}$$

La dérivée seconde f''_x de $f(x, y)$ sera alors de la forme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{\frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta_x} - \frac{f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x}}{\Delta_x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{f(x_{i+1}, j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j)}{\Delta_x^2} \quad (2.4)$$

Nous utiliserons tour à tour ces égalités dans la suite pour approximer les dérivées partielles. [7]

2.2.2 Approximation de l'équation différentielle partielle

Soit l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

Posons $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ (en notation indicielle). Compte tenu de la relation 1.2 du paragraphe précédent,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} \quad (2.6)$$

Puisque x_i et y_j jouent un rôle symétrique dans l'équation du potentiel (de Laplace), un raisonnement analogue à celui de l'approximation de f''_x nous donne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2} \quad (2.7)$$

rapprochons ces approximations dans l'EDP 1.3:

$$\Leftrightarrow \Delta u \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2} \quad (2.8)$$

Dans ce cas particulier où $\Delta_x = \Delta_y = h$, donc, nous avons finalement:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ i = 0, 1, \dots, n_x \quad \text{et} \quad j = 0, 1, \dots, n_y \end{cases} \quad (2.9)$$

[3]

2.3 Exemple simple 2D

2.3.1 Cas condition de Dirichlet

On considère un domaine carré, donc 2 dimension d'espace (problème 2D), où on veut résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Équation de Laplace}) \quad (2.10)$$

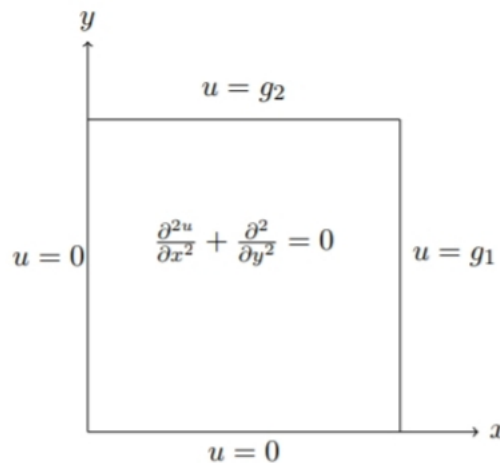


Figure 2.1: L'équation de Laplace sur le domaine carré avec les conditions de Dirichlet

Les conditions limites de type Dirichlet, telles que décrites sur le schéma ci-contre, g_1 et g_2 étant 2 constantes quelconques.

a- Discrétisation du domaine d'étude. Le domaine d'étude comprend le domaine interne, noté Ω , et la frontière, notée $\partial\Omega$.

On va créer un maillage relativement lâche (afin de limiter ensuite les écritures ; mais l'extension à plus de nœuds ne pose aucun problème) et régulière.

Ce maillage introduit en 25 noeud , dont 9 noeud internes et 16 noeuds frontière
 Cependant les noeuds frontieres ne constituent pas des valeurs à rechercher, puisque la valeur de la fonction u est connue (condition de Dirichlet)

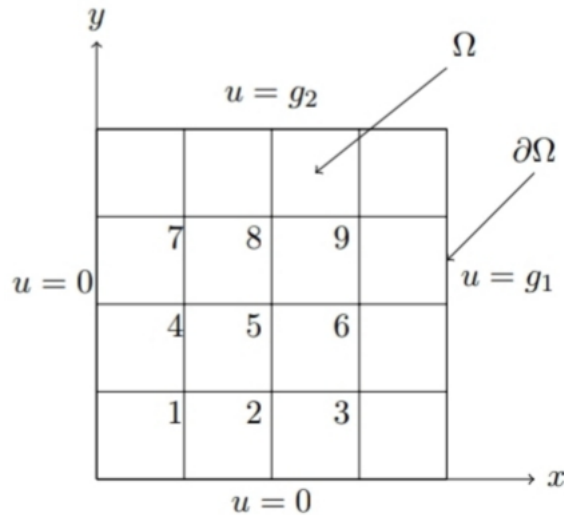


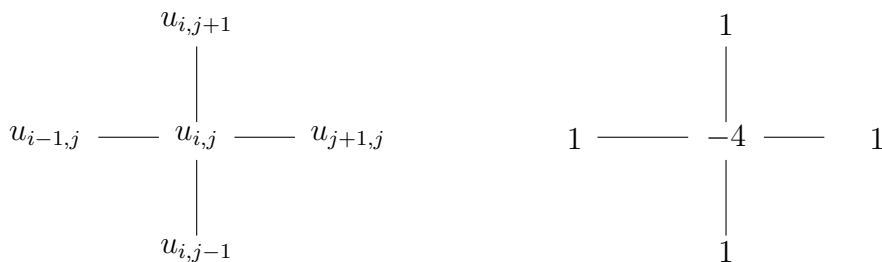
Figure 2.2: Maillage et numérotation du noeud exemple 01

seuls les noeuds ici numérotés de 1 à 9 constituent donc les inconnues de notre problème sachant que bien sûr, les condition limites doivent intervenir dans la solution. Le maillage étant régulier , on pose $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{4}$

b- Déscritisation de l'équation on exactement la même équation que précédemment ; elle peut être approximée par l'expression :

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \tag{2.11}$$

Cette expression constitue donc une approximation de l'EDP écrite au noeud x_y . C'est une relation entre 5 noeuds qui approxime l'EDP écrite au noeud $u_{i,j}$. Calquée sur le maillage, on l'écrit sous forme graphique comme ci-dessous à droite où on représente les coefficients de chacun des noeuds :



c- Ecriture du système d'équations On va maintenant écrire l'équation discrétisée en chacun des noeuds inconnus, ce qui va conduire à un système de 9 équation à 9 inconnues. Pour cela ,on reprend la numérotation des 9 noeuds de 1 à 9 ; en effet , cela est moins laborieux que de travailler en double coordonnée (i,j).

Noeud 1 : $-4u_1 + u_2 + u_4 = 0$

Les noeuds à gauche et en bas correspondent aux condition de dirichlet nulles .

Noeud 2 : $u_1 - 4u_2 + u_3 + u_5 = 0$

Noeud 3 : $u_2 - 4u_3 + g_1 + u_6 = 0$

La noeud à droite correspond à la condition de Dirichlet égale $\tilde{A} g_1$

Noeud 4 : $u_1 - 4u_4 + u_5 + u_7 = 0$

Noeud 5 : $u_4 + u_2 - 4u_5 + u_6 + u_g = 0$

Noeud 6 : $u_5 + u_3 - 4u_6 + g_1 + u_9 = 0$

Noeud 7 : $u_4 - u_7 + u_8 + g_2 = 0$

Noeud 8 : $u_7 + u_5 - 4u_g + u_9 + g_2 = 0$

Noeud 9 : $u_8 + u_6 - 4u_9 + g_1 + g_2 = 0$

On représente généralement ce système d'équation sous forme matricielle, ce qui permet de bien choisir ensuite la méthode de résolution qui sera adoptée. Ici ,la première ligne sert à bien repérer les colonnes sachant que l'absence d'une valeur dans la matrice carrée correspond à zéro .

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_1 \\ 0 \\ 0 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_2 \\ -g_1 - g_2 \end{pmatrix}$$

d- Résolution du système d'équation

Avec $g_1 = 1$, $g_2 = 2$.La résolution de ce système par la méthode d'élimination de gauss donne :

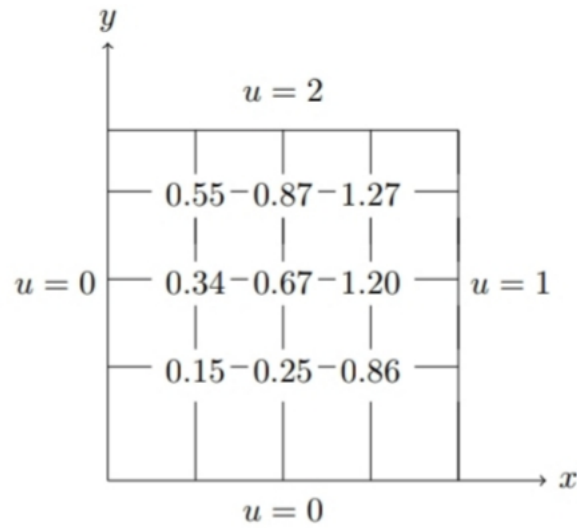


Figure 2.3: Résolution du système d'équation exemple 01

Un maillage plus fin permettrait d'obtenir une meilleure précision (mais avec plus d'équations à résoudre).

2.3.2 Cas de condition de neumann homogènes

On considère le même problème que précédemment : un domaine carré , donc 2 Dimensions d'espace , où on veut résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.12}$$

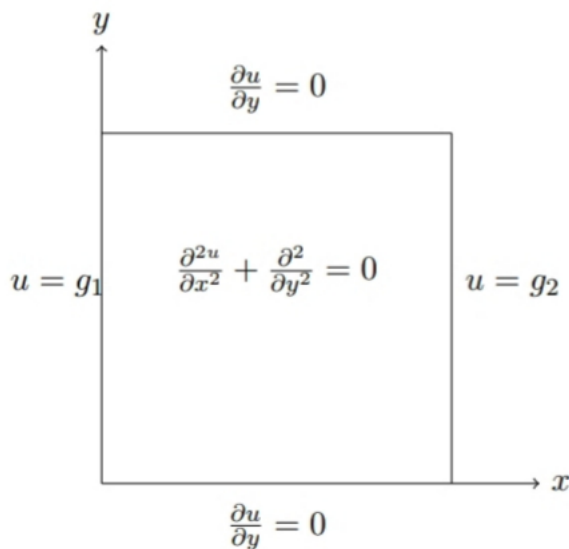


Figure 2.4: L'équation de Laplace sur le domaine carré avec les condition de Neumann

Les condition limites sont de type Dirichlet à droite et à gauche , telles que décrites sur le schéma ci-contre, et de type Neumann homogène (c'est-à-dire nulle) en haut et en bas .

1. Discrétisation du domaine d'étude

Afin de limiter le nombre d'équation à écrire , on adopte le maillage suivant.

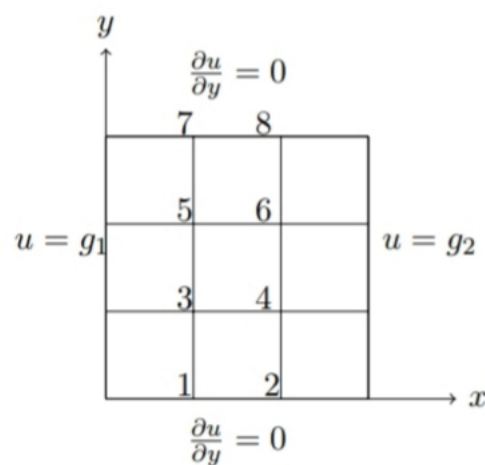


Figure 2.5: Maillage et numérotation du noued exemple 02

les noeuds inconnus sont numérotés de 1 à 8. S'il n'y a pas de problème pour les noeuds internes 3 à 6, on peut légitimement s'interroger sur les noeuds frontières 1,2 et 7,8. En effet ,la valeur de la dérivée est connue en ces noeuds, mais en aucun cas la valeur de la fonction.

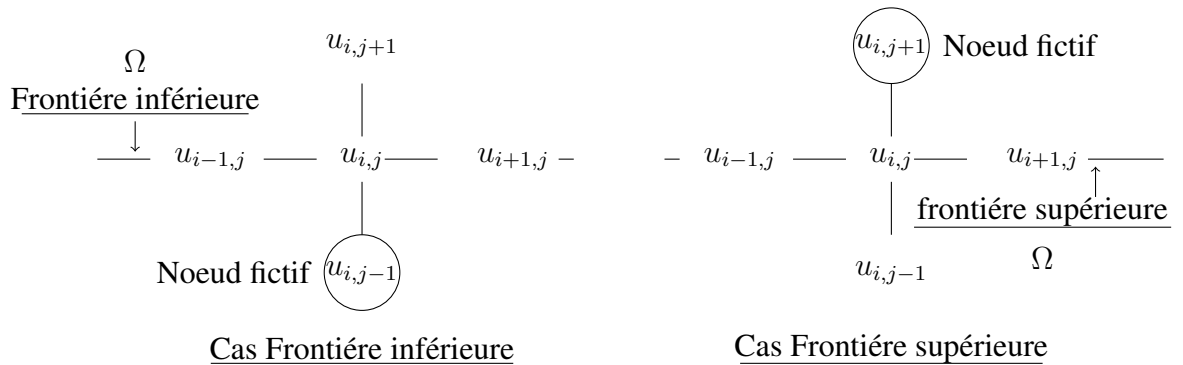
Ce sont donc des noeuds inconnus.

2. **Discrétisation de l'équation.** On a exactement la même équation que précédemment ; elle peut être approximée par l'expression :

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \quad (2.13)$$

écrite au noeud inconnu u_{ij} .

Ceci introduit une difficulté aux noeuds frontières puisque cette discrétisation de l'équation introduit à chaque fois un noeud en dehors du domain d'étude, qu'on appelle « noeud fictif »



Pour éliminer les noeuds fictifs de la discrétisation, il suffit de prendre en compte la condition de flux sur la frontière en question.

Prenons l'exemple du noeud numéro 1 et nommons le noeud fictif 3.

- La discrétisation de l'équation au boeud 1 donne :

$$g_1 + u_{3'} - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0 \tag{2.14}$$

- La discrétisation centrée de la condition de flux au noeud 1 s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_3 - u_{3'}}{2h} = 0 \quad \text{Ce qui implique que } u_{3'} = u_3 \tag{2.15}$$

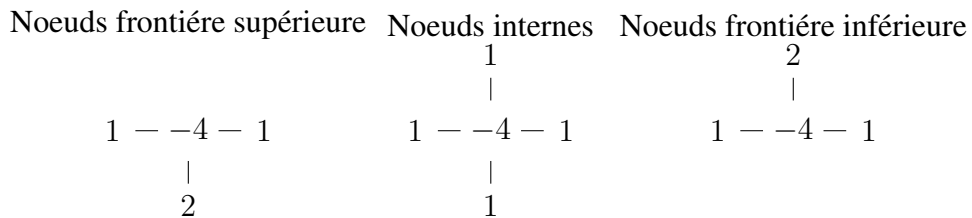
On remplace $u_{3'}$ dans la discrétisation de l'équation :

$$g_1 + u_3 - 4u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad \text{Soit} \quad g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \tag{2.16}$$

Ceci qui permet d'éliminer le noeud fictif de l'équation écrit au noeud 1.

Remarquons que cette discrétisation vérifie simultanément l'équation et la condition limite.

On obtien donc 3 formes différentes de discrétisation selon la position du noeud :



3. Ecriture du système d'équation

La mise sous forme matricielle donne :

Noeud 1 : $g_1 - 4u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$

Noeud 2 : $u_1 - 4u_2 + g_2 + 2u_4 = 0$

Noeud 3 : $g_1 + u_1 - 4u_3 + u_4 + u_5 = 0$

Noeud 4 : $u_3 + u_2 - 4u_4 + g_2 + u_6 = 0$

Noeud 5 : $g_1 + u_3 - 4u_5 + u_6 + u_7 = 0$

Noeud 6 : $u_5 + u_4 - 4u_6 + g_2 + u_8 = 0$

Noeud 7 : $g_1 + 2u_5 - 4u_7 + u_8 = 0$

Noeud 8 : $u_7 + 2u_6 - 4u_8 + g_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \\ -g_1 \\ -g_2 \end{pmatrix}$$

4. Résolution du système d'équation.

En prenant $g_1 = 1$ et $g_2 = 2$ dans un domaine carré de 1 mètre de côté, nous obtenons la solution

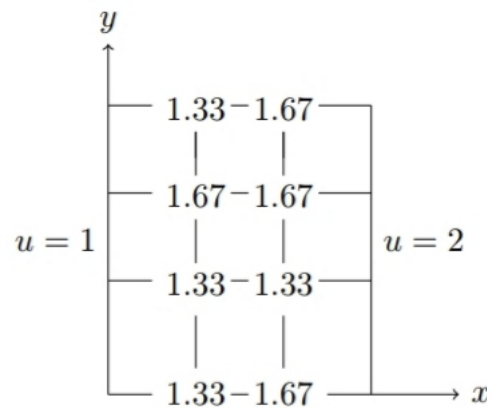


Figure 2.6: Résolution du système d'équation exemple 02

La solution dans cet exemple est un plan entre les valeur 1 et 2 selon Ox. Ce qui vérifie parfaitement l'équation à resoudre (toutes les dérivée secondes sont nulles, donc leur somme est nulle) et les dérivées premières en y sont nulles.

2.4 difference finie d'ordre 4 :

Le schéma compact et précis du quatrième ordre peut être appliqué à l'équations de Laplace, utilisant un laplacien discret à neuf points. L'avantage de la méthode d'ordre supérieur consiste à utiliser moins de points de maillage pour la même précision d'ordre comme une méthode d'ordre inférieur; donc un système algébrique résultant a un nombre des équation moins important pour la résolution. Un inconvénient est que le système résultant est plus denses.

Bien que d'autres méthodes puissent être utilisées, suivons une dérivation symbolique à partir du schéma central de second ordre pour u_{xx} . Rappelant que,

$$\delta^2 u(x) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \quad (2.17)$$

et

$$\delta_{xx}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4) \quad (2.18)$$

$$= \left(1 + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4) \quad (2.19)$$

et en substituant la relation opérateur

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \delta_{xx}^2 + O(h^2) \quad (2.20)$$

dans (2.19), on obtient

$$\delta_{xx}^2 u = \left(1 + \frac{h^2}{12} (\delta_{xx}^2 + O(h^2))\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4) = \left(1 + \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4) \quad (2.21)$$

à partir de laquelle nous avons en outre

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2\right)^{-1} \delta_{xx}^2 + \left(1 + \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2\right)^{-1} O(h^4) \quad (2.22)$$

Il est noté que

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2\right)^{-1} = 1 - \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2 + O(h^4) \quad (2.23)$$

si h veut bien petit. Nous avons donc la relation symbolique

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2\right)^{-1} \delta_{xx}^2 + O(h^4) \quad (2.24)$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(1 - \frac{h^2}{12} \delta_{xx}^2\right) \delta_{xx}^2 + O(h^4) \quad (2.25)$$

Sur une grille cartésienne et en appelant cet opérateur de quatrième ordre, l' équation de Laplace $\Delta u = 0$ peut être approximée par

on a:

$$(1 + \frac{h^2}{12}\delta_{yy}^2)\delta_{xx}^2 + (1 + \frac{h^2}{12}\delta_{xx}^2)\delta_{yy}^2 = 0 \quad (2.26)$$

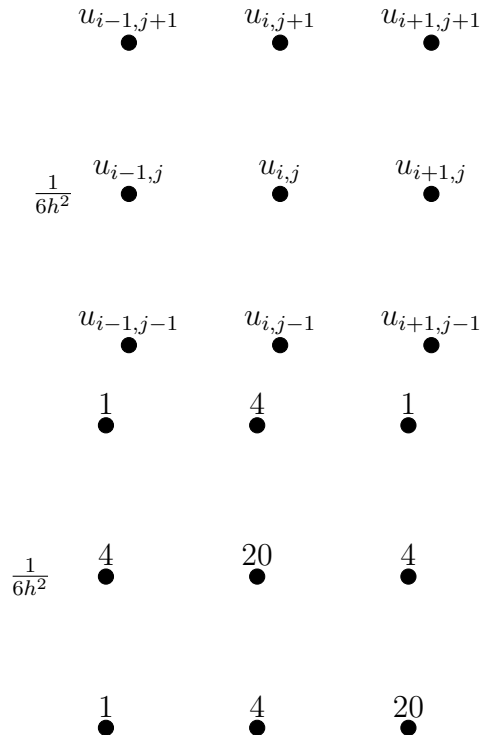
$$(1 + \frac{h^2}{12}\delta_{yy}^2)(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}) + (1 + \frac{h^2}{12}\delta_{xx}^2)(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + (\frac{h^2}{12}\delta_{yy}^2)(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}) + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + (\frac{h^2}{12}\delta_{xx}^2)(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}) = 0 \quad (2.28)$$

En développant cette expression ci-dessus , nous obtenons le schéma en neuf points

$$\frac{1}{6h^2}(4u_{i+1,j} + 4u_{i-1,j} - 20u_{i,j} + 4u_{i,j+1} + 4u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) = 0 \quad (2.29)$$

Dans le cas particulier où $hx = hy = h$, les coefficients de différences finies sont données



Les coefficients du schéma compacte de différences finies à neuf points

le laplacien discret á neuf points, il s'agit d'un schéma compact du quatrième ordre par ce que la distance est la plus petite entre les points de la grille dans la différences finies et le point de maillage principale (de tous les schémas de différences finies du quatrième ordre).

Les avantages et les inconvénients des systèmes de différences finies en neuf points pour L' équation de Laplace sont:

- Il est précis au quatrième ordre et il est toujours compact. La matrice de coefficients est toujours bloquée tridiagonal.
- Moins d'effets d'orientation de la maillage par rapport á cinq points standard schéma de différences finies.
- Il semble qu'il n'existe aucun solveur de Laplace rapide basé sur FFT pour schéma compact du quatrième ordre différences finies.

Incidentement, si nous appliquons

$$\left(1 - \frac{h^2}{12}\delta_{xx}^2\right)\delta_{xx}^2 + O(h^4) \quad (2.30)$$

à l'équation de Laplace directement, nous obtenons une autre schéma différences finies á neuf points , qui n'est pas compact, et a des effets plus forts d'orientation de la maillage. [9]

Exemples de validation

3.1 Introduction:

L'intérêt principal de cette section est de présenter l'évaluation et la validation de notre formulation par la méthode des différences finies présentée dans ce travail, avec deux schémas en différences finies : celles d'ordre deux et d'ordre quatre, nous avons abouti à des résultats numériques comparés par la solution obtenue analytiquement (solution exacte).

3.2 Exemple de la validation :

Deux cas d'études seront considérés par la suite à savoir :

- géométrie régulière avec l'étude de l'effet du maillage
- deux schémas utilisés pour résoudre l'équation de Laplace : d'ordre 2 et 4.
- Conditions aux limites de Dirichlet appliquées pour toutes les frontières du domaine étudié.
- La solution exacte est fournie pour étudier la précision et la performance des résultats numériques obtenus
- Le recours vers les méthodes itératives est la procédure adoptée pour résoudre le système d'équations résultantes selon le nombre des inconnus.

3.3 Les résultats numériques et discussion

3.3.1 Exemple 01 :

Nous considérons un maillage régulier pour étudier la résolution numérique de l'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites de frontières :

$$u(0, y) = -y$$

$$u(1, y) = 1 - y^2$$

$$u(x, 0) = x^2$$

$$u(x, 1) = x^2 - 1$$

Et la solution exacte :

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

Les résultats obtenus sont schématisés sur les figures

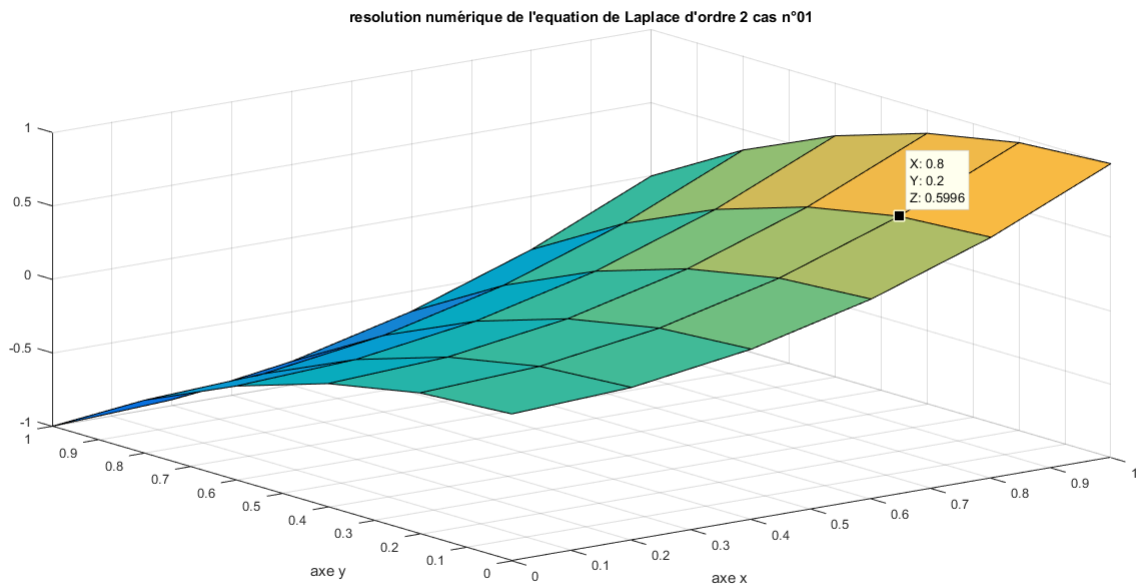


Figure 3.1: Solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 02 maillage 5*5 exemple 01

pour l'ordre 2 et

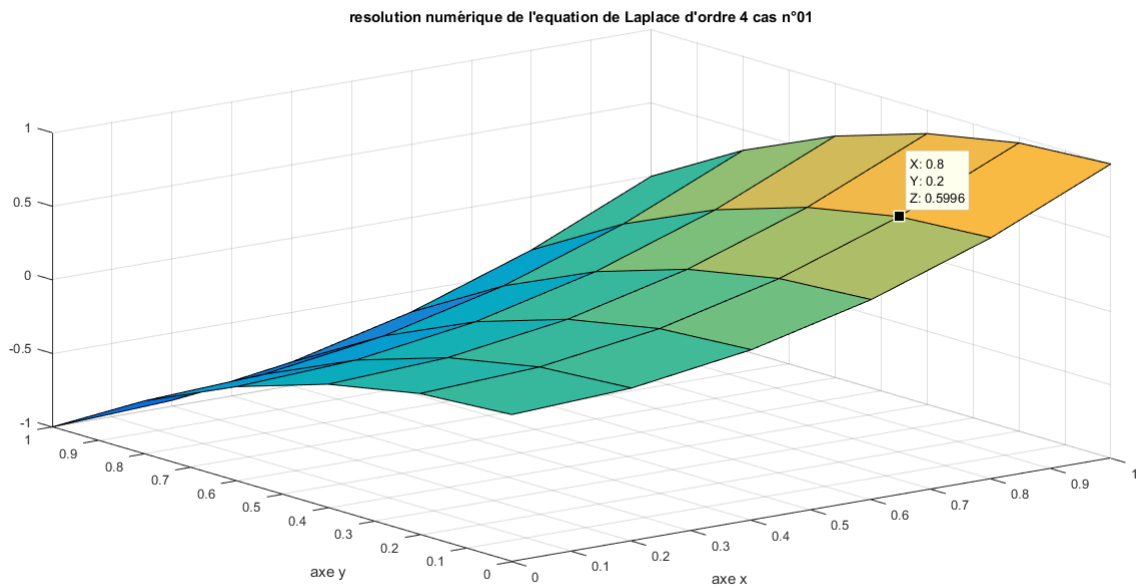


Figure 3.2: Solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 04 maillage 5*5 exemple 01

pour l'ordre 4 , et la solution exacte est présentée sur la figure

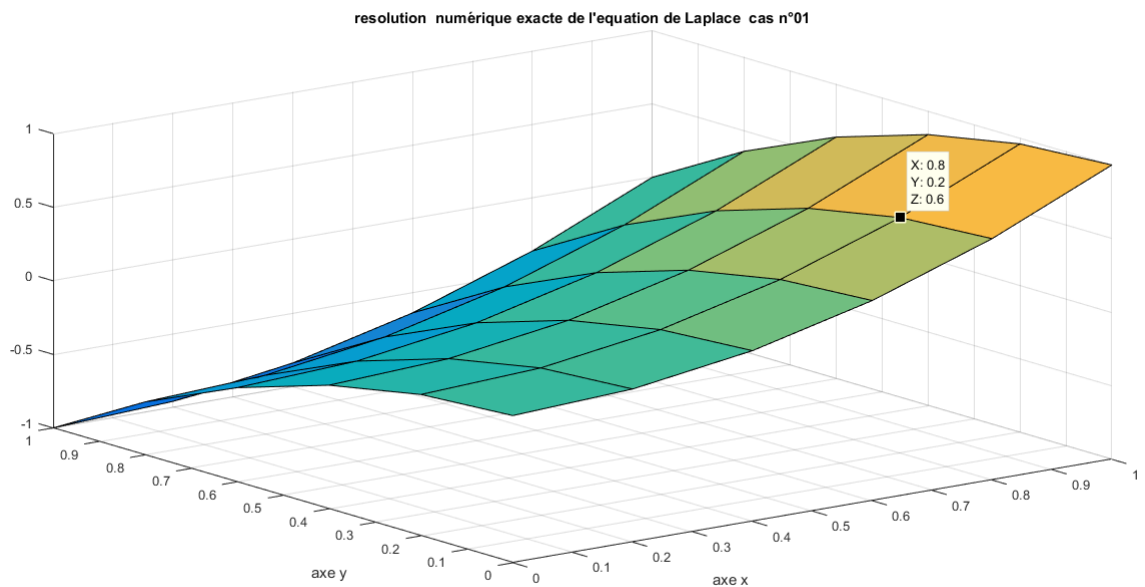


Figure 3.3: Solution exacte de l'équation de Laplace du maillage 5*5 exemple 01

pour évaluer l'erreur commise par les deux schémas en différences finies, nous considérons les résultats obtenus au niveau de la coordonnée $X = 0.8$ $Y = 0.2$ pour les deux schémas, nous avons que la solution est $U_{Ordre2} = 0.5996$ et $U_{Ordre4} = 0.5996$, après la comparaison avec la solution exacte nous trouvons que les deux valeurs sont très proches à la solution exacte ($U_{exacte} = 0.6$). vu que le maillage utilisé est grand ($dx = 1/5$ et $dy = 1/5$), les résultats approches ne présentent par un écart important, cette différence est très claire dans les figures

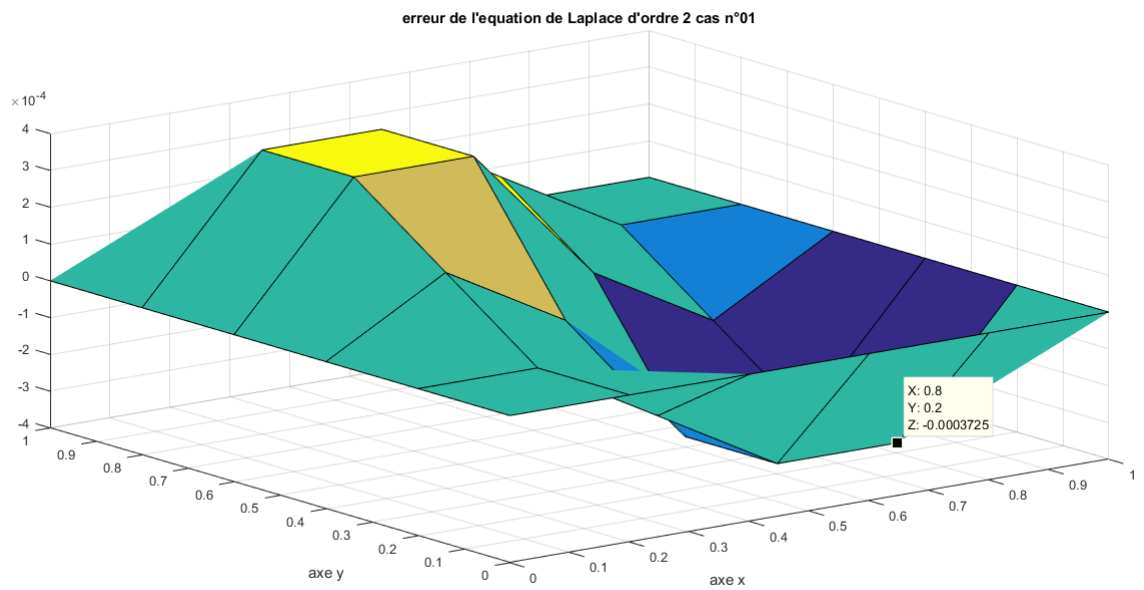


Figure 3.4: Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 5*5 exemple 01

Et

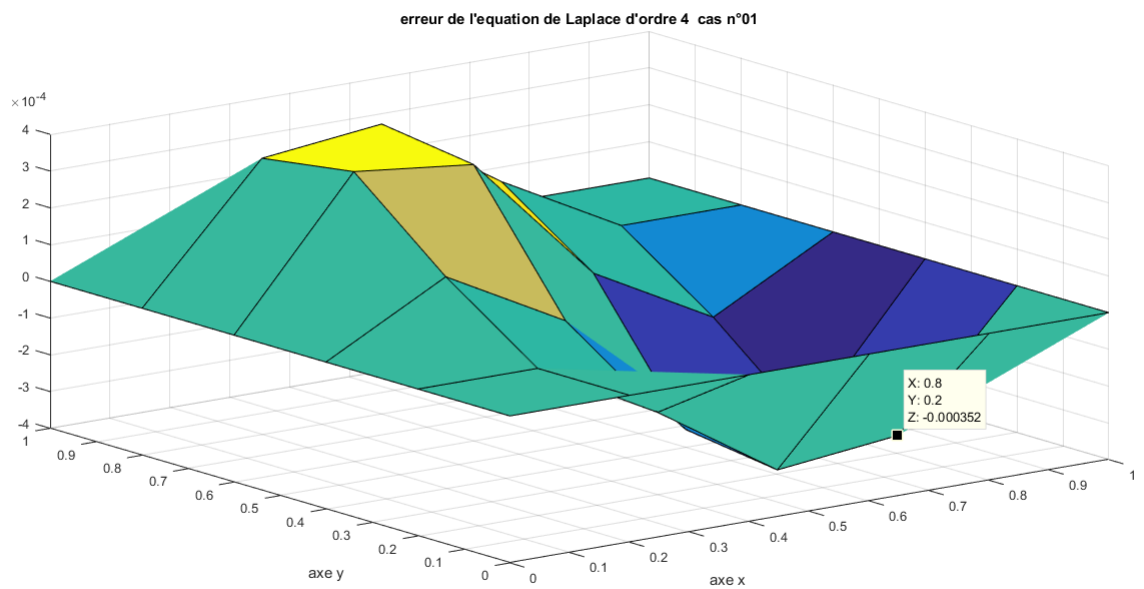


Figure 3.5: Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 5*5 exemple 01

pour l'erreur commise par l'ordre 2 et 4 respectivement.

Pour mieux présenter l'écart de l'erreur, nous considérons cette fois un maillage raffiné ($dx = 1/20$ et $dy = 1/20$).

Dans ce cas, les résultats obtenus sont très proches à la solution exacte et ca présente l'influence du maillage, par conséquence pour obtenir des résultats plus précises il faut raffiner le maillage pour éliminer l'erreur commis par la méthode. D'une autre coté , nous notons que la formulation obtenue par les différences finies d'ordre 2 élimine les termes de développement de Taylor d'ordre 3 , cette procédure permettre d'introduire dans l'erreur le résidu d'ordre 3 c'est pour ca cette hypothèse confirme les erreurs présentées dans la figure

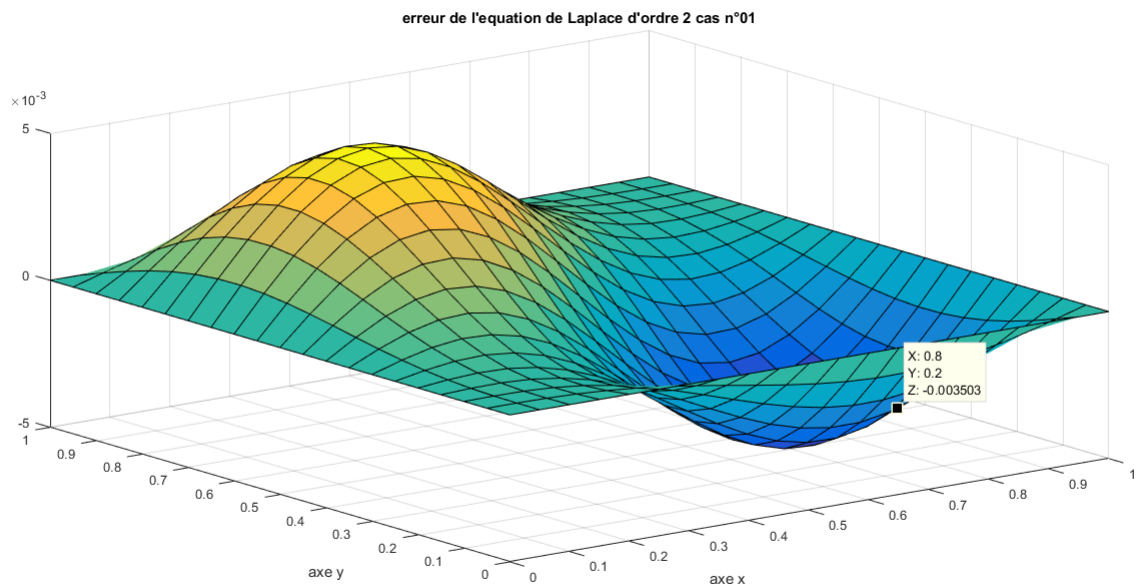


Figure 3.6: Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 20*20 exemple 01

Concernant la formulation d'ordre 4, les termes sont réduit aux termes d'ordre 5 ce qui fait la diminution de l'erreur, cette remarque est illustrée dans la figure

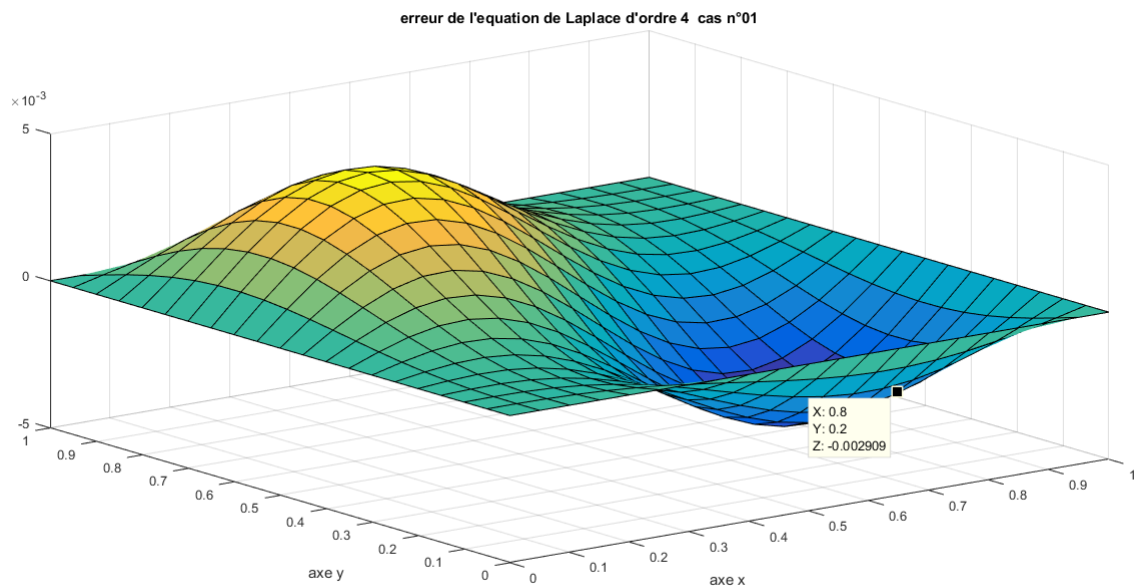


Figure 3.7: Erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 20*20 exemple 01

même les résultats obtenus sont dans le même range que la solution exacte apportée par la solution analytique. A la fin, il est très important de noter que la résolution itérative est adaptée pour résoudre le système des équations portées par les deux schémas, d'une façon pour minimiser la source des erreurs.

3.3.2 Exemple 02 :

L'objet de cet exemple est d'illustrer la performance et l'efficacité de notre formulation apportée dans cette étude, nous présentons l'exemple suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites de frontières :

$$u(0, y) = \sin(y)$$

$$u(1, y) = \exp(1) \sin(y)$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u(x, 1) = \exp(x) \sin(1)$$

Et la solution exacte :

$$u(x, y) = \exp(x) \sin(y)$$

Dans cet exemple, nous confirmons une autre fois les remarques citées en haut, elles sont très claires dans les figures

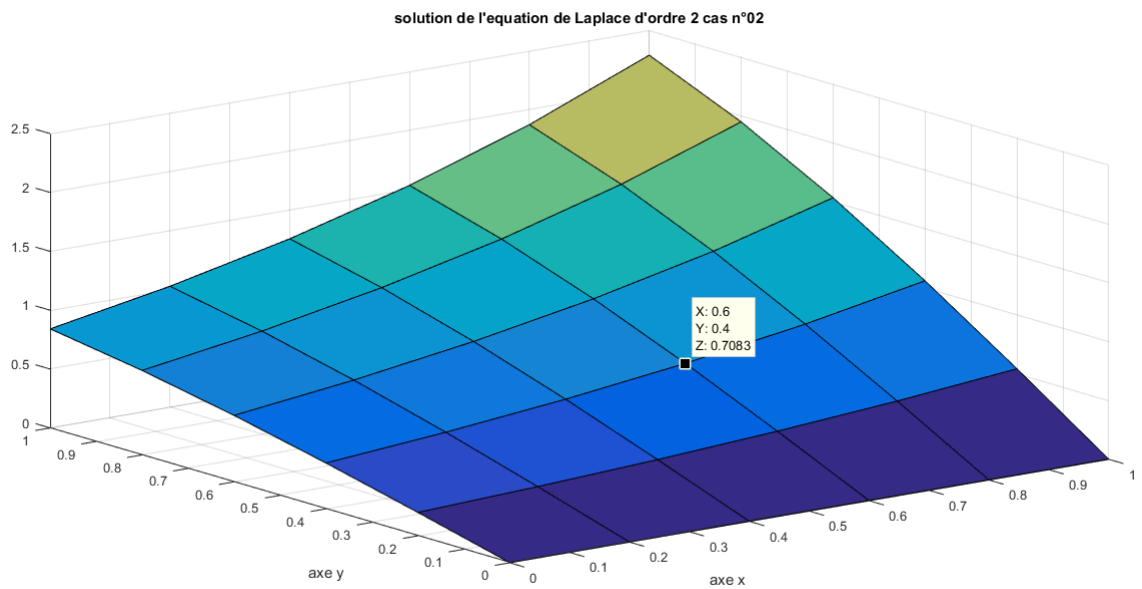


Figure 3.8: solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 5*5 exemple 02

pour l'ordre 2 et

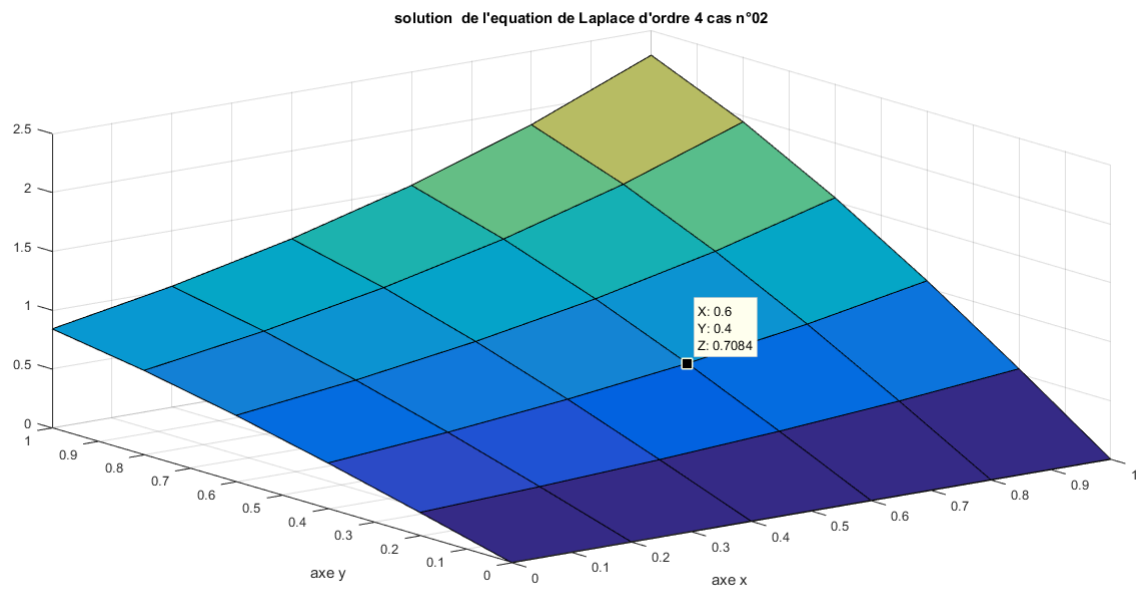


Figure 3.9: solution numérique de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 5*5 exemple 02

pour l'ordre 4 , et la solution exacte est présentée sur la figure

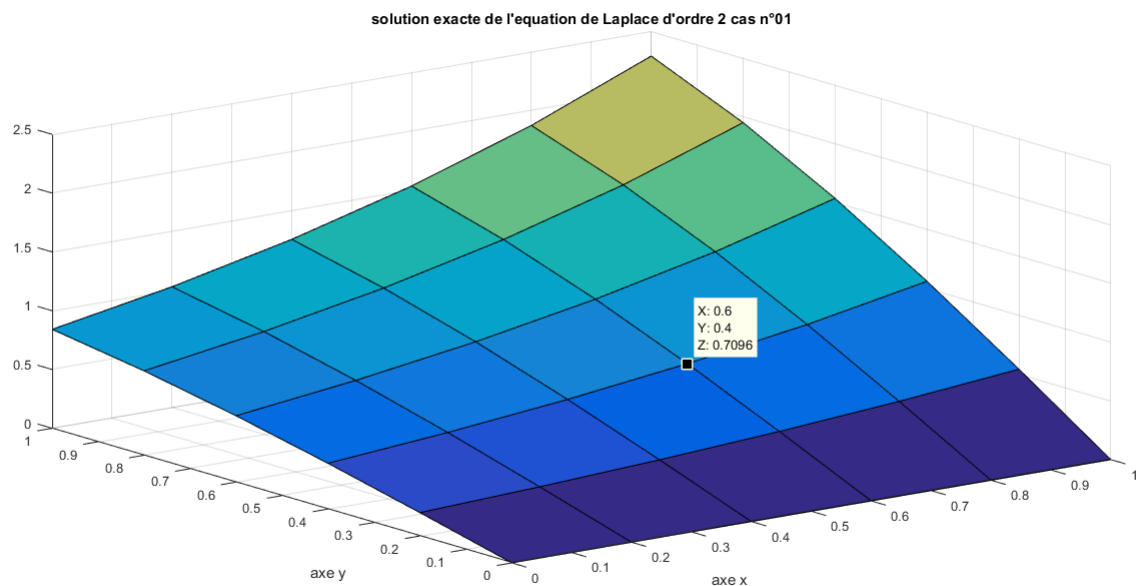


Figure 3.10: solution exacte de l'équation de Laplace du maillage 5*5 exemple 02

pour évaluer l'erreur commise par les deux schémas en différences finies, nous considérons les résultats obtenus au niveau de la coordonnée $X = 0.6$ $Y = 0.4$ pour les deux schémas, nous avons que la solution est $U_{Ordre2} = 0.7083$ et $U_{Ordre4} = 0.7083$, après la comparaison avec la solution exacte nous trouvons que les deux valeurs sont très proches à la solution exacte ($U_{exacte} = 0.7096$). vu que le maillage utilisé est grand ($dx = 1/5$ et $dy = 1/5$), les résultats approches ne présentent par un écart important, cette différence est très claire dans les figures

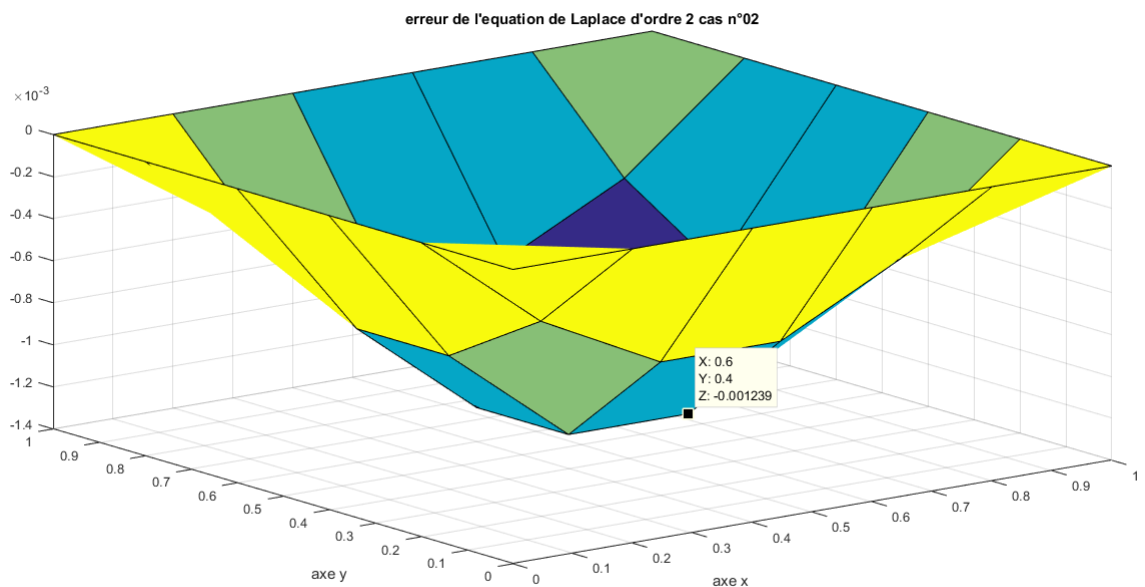


Figure 3.11: erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 5*5 exemple 02

Et

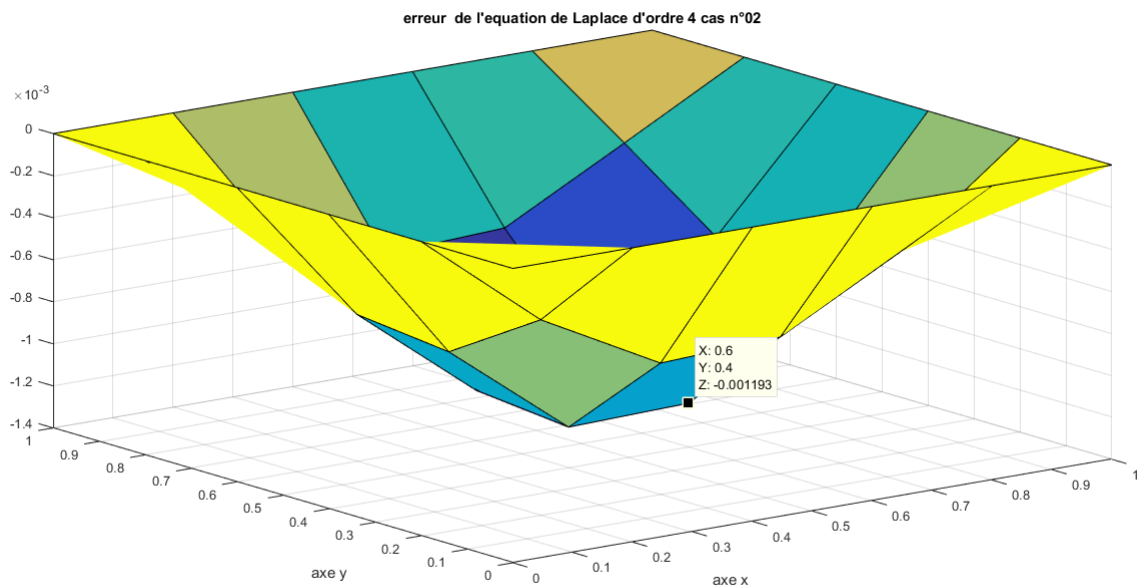


Figure 3.12: erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 5*5 exemple 02

pour l'erreur commise par l'ordre 2 et 4 respectivement.

Pour mieux présenter l'écart de l'erreur, nous considérons cette fois un maillage raffiné ($dx = 1/20$ et $dy = 1/20$).

Dans ce cas, les résultats obtenus sont très proches à la solution exacte et ca présente l'influence du maillage, par conséquence pour obtenir des résultats plus précises il faut raffiner le maillage pour éliminer l'erreur commis par la méthode. D'une autre coté, nous notons que la formulation obtenue par les différences finies d'ordre 2 élimine les termes de développement de Taylor d'ordre 3, cette procédure permettre d'introduire dans l'erreur le résidu d'ordre 3 c'est pour ca cette hypothèse confirme les erreurs présentées dans la figure

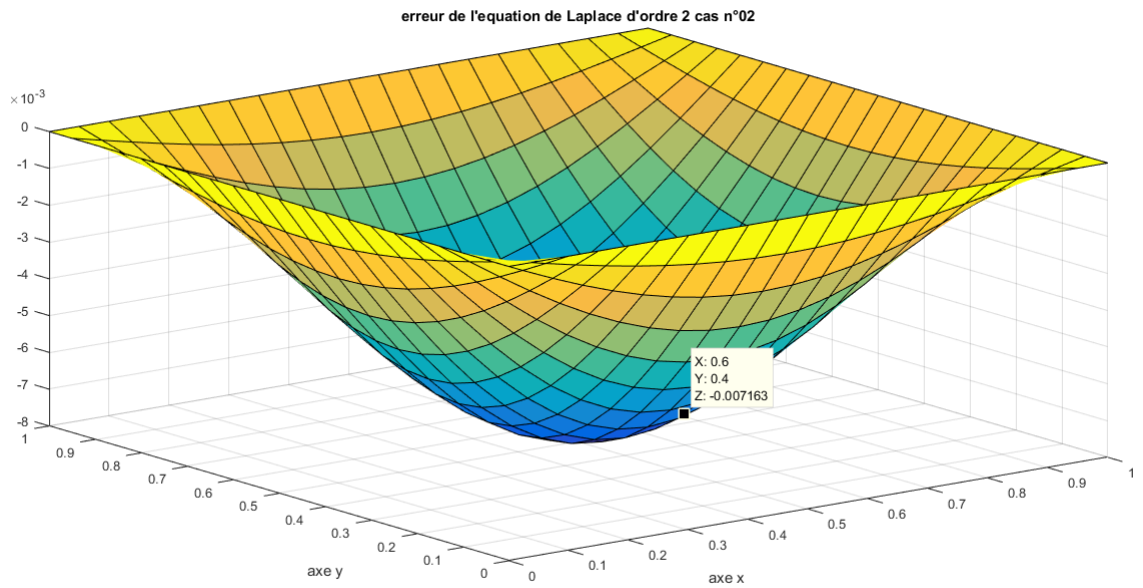


Figure 3.13: erreur de l'équation de Laplace d'ordre 02 du maillage 20*20 exemple 02

Concernant la formulation d'ordre 4, les termes sont réduit aux termes d'ordre 5 ce qui fait la diminution de l'erreur, cette remarque est illustrée dans la figure

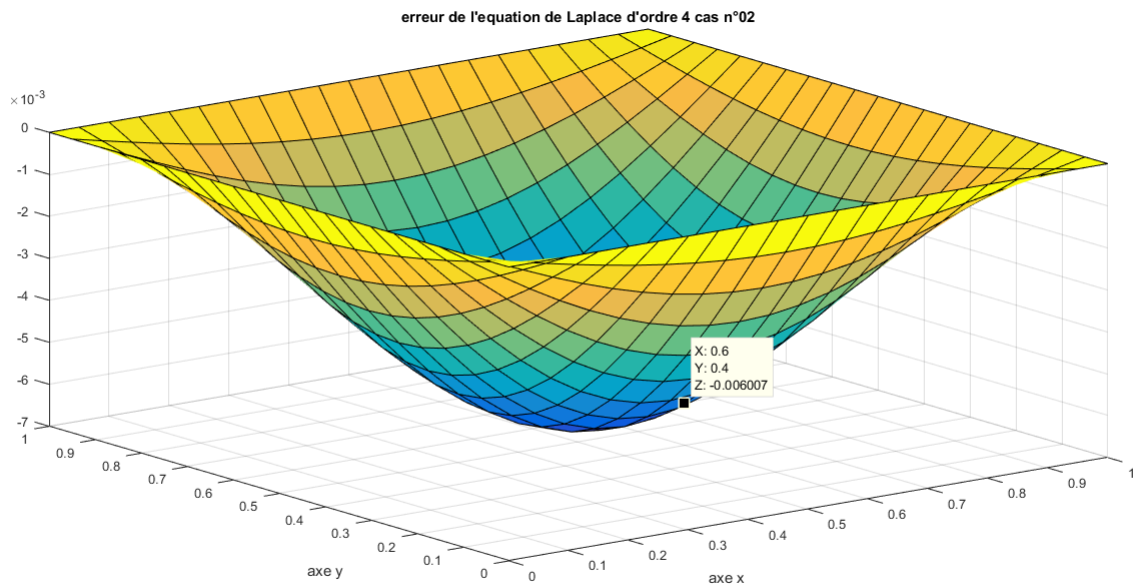


Figure 3.14: erreur de l'équation de Laplace d'ordre 04 du maillage 20*20 exemple 02

Le paramètre du maillage est très important pour obtenir des résultats efficaces et précis mais avec l'utilisation une formulation élevée ce paramètre ne joue pas un rôle important car ce type de formulation fournit un ordre élevé des paramètres et inconnus supplémentaires peut remplacer le raffinage des maillages. D'un autre stade, les formulations d'ordre élevé présentent un avantage vu à sa simplicité de développer et d'implanter dans un programme de calculs par contre les autres méthodes numériques telles que la méthode des éléments finies ou d'autre processus numérique, ces méthodes exigent des démarches importantes et des outils numériques très avancés qui influent sur le taux global des calculs. Finalement, on peut dire que notre formulation n'est pas seulement simple à formuler mais très proches à la solution exacte avec des processus numériques utilisés très simples.

3.4 Conclusion

Les résultats indiqués sur ces figures suscitent les commentaires suivants :

- Nous montrons dans ce cas-là, le maillage en fonction des pas par cotés donne même résultats pour toutes discrétisations ainsi que tous ces résultats sont proches à la solution exacte du problème traité, ça présente la performance de notre formulation en MDF dans le cas où la géométrie ou/et le maillage sont réguliers.
- D'autre part de ce test, nous avons aussi présenté l'influence de l'ordre de la formulation sur la précision des résultats obtenus vis-à-vis la solution exacte avec même maillage et méthode de résolution, il est claire d'après les hypothèses et la formulation de chaque processus, que l'exactitude variée entre chaque schéma de différences finies. En plus, la performance de notre formulation est bien marquée dans ces cas.
- Puisque notre formulation est basée sur le développement de Taylor donc ça permet d'ajouter les termes d'ordre supérieur donc l'erreur peut minimiser avec le traitement de ces termes. Par conséquence, la performance et l'efficacité est bien marquée dans les cas des différences finies d'ordre 04

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons abordé les deux aspects principaux de la méthode des différences finies qui sont la formulation théorique du problème traité et la mise en oeuvre d'un code de calcul sur Matlab basé sur cette formulation numérique. Nous développons une formulation pour analyser le problème elliptique illustré par l'équation de Laplace. Ce dernier aspect est introduit à la formulation de par la MDF par l'intermédiaire d'une projection de la forme différentielle vers la discrétisation paramétrique basée sur le développement limité de Taylor d'ordre 4. Les procédés de cette formulation résulte un code de calcul programmé sous l'environnement du Matlab en respectant les démarches de programmation de la méthode des différences finies de disposer en fin de compte d'un outil simple dans sa mise au point et efficace dans son utilisation. En effet La comparaison des résultats obtenus par la solution approche qui incorpore les résultats analytiques tirés de la littérature pour la résolution exacte de l'équation de Laplace, nous a permis de conclure que cette formulation d'ordre 4 est remarquablement performant.. Il possède cette capacité notable par rapport aux différences finies classiques d'ordre 2.

La deuxième partie de ce travail concerne une étude paramétrique de la formulation en variant quelques paramètres numériques (maillage, analyse de l'erreur...), le but souligné est de présenter la performance de notre formulation en différences finies d'ordre 4.

A la fin, l'ensemble des avantages que nous avons cité dans les conclusions du Chapitre 3, nous conduit à déduire que c'est une formulation en MDF simple, efficace et fiable. Elle est constitué un grand intérêt pour l'analyse d'autre équations aux drivées partielles à travers un domaine régulière.

Recommandations pour des travaux futurs :

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre étude, nous a permis de nous familiariser avec le domaine du développement théorique et numérique des EDPs. Nous le considérons comme une base pour un futur développement dans le domaine de calcul numérique, et dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail peut ce résumé dans les points suivants :

- Étendre cette étude à la formulation combinée en éléments finis ou d'autres

procédures numériques, car ces méthodes nous offrent un outil d'analyse très puissant pour les différentes simulations des problèmes numériques.

- Nous pouvons considérer les résultats obtenus par la présente étude comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques
- Adaptation de la présente formulation à étudier les domaines de formes géométriques annulaires sectorielles.
- Effectuer une formulation numérique basée l'analyse des EDP non linéaire.
- appliquer cette formulation pour résoudre les problèmes EDP fractionnaires.

Enfin, nous attribuons notre modeste travail intitulé « Un modèle de différences finies d'ordre élevé pour la résolution numérique de l'équation de Laplace » dans l'actualité de la recherche scientifique dans le domaine de calcul numérique des EDP soutenu par notre centre universitaire

ANNEXE

En deux dimensions, l'équation de Laplace avec un simple ensemble de conditions aux limites peut être écrite comme suit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq H \quad (3.1)$$

$$u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0 \quad u(x, H) = u_N(x)$$

Ici, les conditions aux limites donnent $u = 0$ à $x = 0$, $x = L$ et $y = 0$. à $y = H$, la condition aux limites est une fonction connue de x . Notez qu'il peut y avoir une discontinuité aux bords de la limite supérieure ($x = 0, y = H$) et ($x = L, y = H$).

La solution de l'équation de Laplace procède par une méthode appelée séparation des variables. Dans cette méthode, nous posons une solution qui est le produit de deux fonctions, $X(x)$ une fonction de x seulement et $Y(y)$ une fonction de y seulement. Avec cette hypothèse, notre solution devient.

$$u(x, t) = X(x)Y(y) \quad (3.2)$$

Nous ne savons pas, à l'avance, si cette solution fonctionnera. Cependant, nous supposons qu'il le fera et nous le substituons à u dans l'équation (3.1). Puisque $X(x)$ est une fonction de x seulement et que $Y(y)$ est une fonction de y seulement, nous obtenons le résultat suivant en substituant l'équation (3.2) à l'équation (3.1).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial y^2} = Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

Si nous divisons l'équation finale par le produit $X(x)Y(y)$ et si nous déplaçons la dérivée y de l'autre côté du signe égal, nous obtenons le résultat suivant.

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

Le côté gauche de l'équation (3.6) est une fonction de x uniquement; le côté droit est uniquement fonction de y . La seule façon que cela puisse être correcte est si les deux côtés sont égaux. Cela montre également que la solution de séparation des variables fonctionne. Pour simplifier la solution, nous choisissons la constante égale à λ^2 . Cela nous donne deux équations différentielles ordinaires à résoudre :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\lambda^2 \quad - \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -\lambda^2 \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) montre que nous avons deux équations différentielles distinctes, chacune ayant une solution générale connue. Ces équations et leurs solutions générales sont présentées ci-dessous.

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \lambda^2 Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C \sinh(\lambda y) + D \cosh(\lambda y) \quad (3.7)$$

À partir des solutions des équations (3.6) et (3.7), nous pouvons écrire la solution générale pour $u(x, y) = X(x)Y(y)$ comme suit.

$$u(x, y) = [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)][C \sinh(\lambda y) + D \cosh(\lambda y)] \quad (3.8)$$

Nous appliquons maintenant les conditions aux limites montrées avec l'équation originale (3.1) pour évaluer les constantes A, B, C et D. Si nous substituons la condition aux limites à $x = 0$ dans l'équation (3.8), nous obtenons le résultat suivant.

$$u(0, y) = [A \sin(\lambda 0) + B \cos(\lambda 0)][C \sinh(\lambda y) + D \cosh(\lambda y)] \quad (3.9)$$

Comme $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, l'équation (3.9) ne sera satisfaite pour tout y que si $B = 0$. Nous définissons donc $B = 0$. Nous appliquons ensuite la solution dans l'équation (3.8) (avec $B = 0$) à la condition limite à $y = 0$

$$u(x, 0) = 0 = [A \sin(\lambda x)][C \sinh(\lambda 0) + D \cosh(\lambda 0)] \quad (3.10)$$

Puisque $\sinh(0) = 0$ et $\cosh(0) = 1$, cette condition limite ne sera satisfaite que si $D = 0$. La troisième condition limite que $u = 0$ se produit à $x = L$. Nous obtenons ici le résultat suivant: en utilisant la solution dans (3.8) avec $B = 0$ et $D = 0$ comme précédemment trouvé.

$$u(L, y) = 0 = [A \sin(\lambda L)][C \sinh(\lambda y)] \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) ne peut être satisfaite que si le terme sine est zéro. Cela ne sera vrai que si L est une fois intégrale. Si n dénote un entier, il faut avoir

$$\lambda L = n\pi \quad \text{Où} \quad \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (3.12)$$

Étant donné que toute valeur intégrale de n donne une solution aux équations différentielles d'origine, avec les conditions aux limites $u = 0$ aux deux limites, la solution la plus générale est celle qui est la somme de toutes les solutions possibles, chacune multipliée par une constante différente. Dans la solution générale pour une valeur de n , que nous pouvons maintenant écrire en tant que $A \sin(\lambda nx) C \sinh(\lambda ny)$, avec $\lambda n = \frac{n\pi}{L}$, nous pouvons écrire le produit de deux constantes, AC , en tant que constante unique, C_n , qui peut être différente pour chaque valeur de n . La solution générale qui est la somme de toutes les solutions avec des valeurs différentes de n s'écrit comme suit:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y) \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.13)$$

La condition limite finale, celle à $y = H$, indique que $u(x, H)$ est une fonction donnée de x , $u_N(x)$. Si vous définissez $u(x, H) = u_N(x)$ dans l'équation (3.13), vous obtenez le résultat suivant.

$$u(x, H) = u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \quad (3.14)$$

Bibliographie :

- [1] BREZIS H., Analyse fonctionnelle, Masson, Paris (1983).
- [2] ALLAIRE G., Analyse numérique et optimisation, Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (2005).
- [3] A. W. El Khafadji, J. R. Tooley, 'Numerical Methods in Engineering Practice', CBS Publising, Japan Ltd., 1986
- [4] David Manceau ,Résolution pratique des équations aux dérivées partielles
- [5] C. F. Gerald and P. O. Wheastley, 'Applied Numerical Analysis', Addison Wesley Publishing Company, 3ième edition, 1984
- [6] D. Euvrard, 'Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur-Différences finies, éléments finis, méthode des singularités', 2e édition, Masson, Paris, 1990
- [7] G.E. Forsythe and W. R. Wasov, "Finite difference methods for Partial Differential Equations", Wiley, New York, 1960
- [8] M. Boumahrat et A. Gourdin, 'Méthodes numériques appliquées', OPU, Alger, 1983.
- [9] Li, Zhilin-Tang, Tao-Zhonghua, Qiao-Numerical solution of differential equations - introduction to finite difference and finite difference and finite element methods- Cambridge University Press 2018
- [10] Baddou (R.), BEN Hammouda (Z.). -Etude de quelques problème aux limites de la physique Mathématique. -19 May 2011, pp11-17.