République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département Des Mathématiques et Informatiques

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En Mathématiques

Spécialité: Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

Sur les Fibrés Inverses

Présenté par :
Herchouche Aicha

Soutenu le 03 Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.SIDHOUMI NOURA	MCA	Univ. Oran	Présidente
Dr.MEKKI SLIMANE	MCA	C-Univ Naama	Examinateur
Dr.LATTI Fethi	MCB	C-Univ Naama	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Table des matières

Introduction **5**

1 VARIÉTÉS RIEMANNIENNES **6**

1.1 Métrique Riemannienne 6
1.1.1 Métrique Riemannienne de la variété produit 7
1.1.2 Image inverse d'une métrique 8
1.2 Connexion linéaire. 10
1.2.1 Tenseur de torsion 11
1.2.2 Connexion de Levi-Civita 12
1.3 Courbures. 15
1.3.1 tenseur de courbure 15
1.3.2 Courbure sectionnelle 15
1.3.3 Tenseur de Ricci 16
1.3.4 1.3.4 Courbure scalaire 18
1.4 Opérateurs sur une variété Riemannienne 19
1.4.1 L'opérateur gradient 19
1.4.2 L'opérateur divergence 21
1.4.3 La Hessienne d'une fonction 24
1.4.4 L'opérateur Laplacien 24
1.4.5 Formule de Bochner 26
1.5 Propriétés des Connexions sur une sous variété 29
1.5.1 Décomposition du fibré tangent 29
1.5.2 Opérateur Shape (Application de Weingarten) 30
1.5.3 Equation de Gauss 32
1.5.4 Equation de Codazzi 32

2 Géométrie du fibré vectoriel **34**

2.1 Fibrés vectoriels 34
2.1.1 Sections du fibré tangent 35
2.1.2 Produit tensoriel de fibré 36
2.1.3 Section sur le fibré produit tensoriel. 36
2.1.4 Fibré Somme de Whitney 38
2.1.5 Section sur le fibré somme de Whitney. 39

2.1.6 Fibré inverse (Pull-back) 40
2.1.7 Section sur un fibré inverse 40
2.2 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel. 41
2.2.1 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel. 41
2.2.2 Connexion induite sur le fibré dual 41
2.2.3 Connexion induite sur le fibré somme de Whitney . . 42
2.2.4 Connexion induite sur le fibré inverse 42
2.3 Métrique sur un fibré vectoriel 43
2.3.1 Métrique sur un fibré vectoriel. 43
2.3.2 Métrique induite sur le fibré dual 46
2.3.3 Métrique induite sur le produit tensoriel 46
2.3.4 Métrique induite sur le fibré somme de Whitney . . . 47
2.3.5 Métrique induite sur le fibré inverse 48
2.3.6 Inégalité de Young 49
2.3.7 Inégalité de Kato 49

Remerciements

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant
$\mathcal{ALLAH}$ *qui nous a réussi a achever ce travail.*
Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à $\mathcal{M}$ *monsieur Fethi Latti, pour le rôle d'initiateur qu' il a joué dans mes recherches, pour m'avoir permis d'enrichir ma réflexion sur différents aspects de mes études, pour ces conseils et pour son soutien constant tout au long de mon travail. Qu' il trouve ici l'expression de ma plus grande reconnaissance.*
je remercie chaleureusement Dr Sidhoumi Noura et Dr Mekki Slimane de m'avoir fait l'honneur de leurs présence comme membre de jury.
- Enfin, je remercie tous ceux qui m'aide, par un mot, par une réflexion ou par une remarque, ont réussi, avec ou sans attention, à aiguiser mon attention sur le chemin à suivre.

DÉDICACES

A

Mes chers parents,qui m'ont aidé a arriver a ce point d'étude .

A ma petite fille Djana.

A mes chères sœurs.

A mes chers frères.

A toute la famille.

A tous mes amies de la promotion de math 2021-2022.

Je dédie ce mémoire.

Introduction

Les Fibrés Inverses jouent un rôle très important dans la géométrie différentielle, notamment sur les variétés Riemannienne. On les utilise par exemple dans l'harmonicité et la bi-harmonicité entre deux variétés différentielles.
Ce travail est réparti en deux chapitres,le premier chapitre consiste a un rappel sur les variétés Riemanniennes,
en particulier les propriété de la courbure Riemannienne et la courbure de Ricci.
Dans le deuxième chapitre,nous présentons notre travail, en définissant de manière similaire les fibrés inverses et leurs propriétés.

Chapitre 1

VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Dans ce chapitre, on présente les notations, les définitions et les propriétés nécessaires concernant les variétés Riemannienne, variétés Riemannienne produit, connexion de Levi-Civita, tenseur de courbure et le tenseur de Ricci.

1.1 Métrique Riemannienne

Définition 1.1.1.

Soit M une variété différentiable, un tenseur métrique ou une métrique Riemannienne est une application qui a chaque couple de vecteur $A, B \in T_pM, p \in M$ fait correspondre un nombre $g(A, B) \in \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $p \in M$ l'application

$$\begin{array}{rcl} T_pM \times T_pM & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & g(A, B) \end{array}$$

est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive .
Si $u, v \in \Gamma(TM)$, la fonction $g(u, v)(p) \overset{\text{def}}{=} g(u_p, v_p) \quad \forall p \in M$, est différentiable.
Une variété Riemannienne est un couple (M, g), ou M est une variété différentiable et g une métrique Riemannienne.

Définition 1.1.2

Étant donnée une carte (N, φ) d'une variété Riemannienne de dimension $n(M, g)$ avec les champs de bases $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ associé , on appelle composantes du tenseur métrique les $n \times n$ fonctions g_{ij} définies par $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$.

Localement, si M est munie d'un système de coordonnées locales (u_i), alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i \otimes du_j \qquad (1.1)$$

Exemple 1.1.1

1) l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique :

$$g = du_1^2 + \cdots + du_n^2$$

2) La sphère unitaire de dimension 3 est définie par :

$$S^3 = \left\{(u,v,w,k) \in \mathbb{R}^4 / u^2 + v^2 + w^2 + k^2 = 1\right\}$$

On considère la paramétrisation :

$$\begin{cases} u = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \\ v = \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma \\ w = \cos\alpha \sin\beta, \\ k = \sin\alpha. \end{cases}$$

La métrique $h = du^2 + dv^2 + dw^2 + dk^2$ de $\mathbb{R}^4$ induit sur S^3 une métrique Riemannienne g, soient $\partial_\alpha, \partial_\beta$ et ∂_γ les champs de vecteurs de bases associé à cette paramétrisation g, soient $\partial_\alpha, \partial_\beta$ et∂_γ les champs de vecteurs de bases, les composantes de la métrique g est données par :

$$g_{11} = g(\partial_\alpha, \partial_\alpha) = 1, g_{12} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0, g_{13} = g(\partial_\alpha, \partial_\gamma) = 0,$$
$$g_{22} = g(\partial_\beta, \partial_\beta) = \cos^2\alpha, g_{23} = g(\partial_\beta, \partial_\gamma) = 0 \text{ et } g_{33} = g(\partial_\gamma, \partial_\gamma) = \cos^2\alpha\cos^2\beta,$$

c'est- à-dire $g = d\alpha^2 + \cos^2\alpha d\beta^2 + \cos^2\alpha\cos^2\beta d\gamma^2$.

1.1.1 Métrique Riemannienne de la variété produit

Proposition 1.1.1

Si M et N sont deux variétés de classe C^∞, alors :
les projections canoniques $\pi : M \times N \to M$ et $\sigma : M \times N \to N$ sont de classe C^∞.

.

Proposition 1.1.2

Soient M et N deux variétés de classe C^∞, alors :

$$T_{(u,v)}M \times N \cong T_u M \times T_v N, \quad \forall (u,v) \in M \times N$$

Proposition 1.1.3

Si (M, g) et (N, h) sont deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement, alors le tenseur $G = \pi^* g + \sigma^* h$ est une métrique Riemannienne sur $M \times N$, telle que :

$$G((U, C), (V, D)) = g(U, V) \circ \pi + h(C, D) \circ \sigma$$

$U, Z \in \Gamma(TM)$ et $C, D \in \Gamma(TN)$.

Remarque 1.1.1

La matrice associée a G :

$$\begin{pmatrix} (g_{ij}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (h_{ab}) \end{pmatrix}$$

La variété Riemannienne $(M \times N, G)$ est dite variété Riemannienne produit de (M, g) et (N, h).

1.1.2 Image inverse d'une métrique

Définition 1.2.1.

Soient (N, h) une variété Riemannienne, de dimension n, M une variété différentiable, de dimension m, et $f : M \longrightarrow N$ une immersion. Alors

$$f^* h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout $U, V \in \Gamma(\text{ TM })$ et $u \in M$ par

$$f^* h(U, V)_u = h_{f(u)} \left(d_u f \left(U_u \right), d_u f \left(V_u \right) \right), \qquad (1.2)$$

est une métrique sur M, appelée métrique inverse Expression locale de la métrique inverse $f^* h$ Soient (L, φ) une carte de M de base locale associée $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^m} \right)$ et (V, ψ) une carte de N de base locale associée $\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^n} \right)$, alors

$$\begin{aligned}
(f^*h)_{ij} &= f^*h\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^j} h\left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial}{\partial v^\beta}\right)\circ f \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial u^j}\left(h_{\alpha\beta}\circ f\right)
\end{aligned}$$

Définition 1.2.2.

Etant donnée une métrique Riemannienne g sur une variété M, on définit la norme $\|V\|_g$ d'un champ de vecteur $V \in \Gamma(TM)$ par

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V,V)} \qquad (1.3)$$

Localement, si $V = V^i\partial_i$ alors,

$$\|V\|_g^2 = g_{ij}V^iV^j$$

Proposition 1.2.1.

Soit g une métrique Riemannienne sur M. L'application,

$$\begin{aligned}
\sharp : \Gamma\left(TM^*\right) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\
\omega &\to \sharp\omega
\end{aligned}$$

définie par

$$g(\sharp\omega, V) = \omega(V), \qquad (1.4)$$

pour tout $V \in \Gamma(TM)$, est un isomorphisme $C^\infty(M)$-linéaire.

Lemme 1.2.1.

Soit g une métrique Riemannienne sur M. Pour tout $x \in M$ la métrique g induit un isomorphisme linéaire entre T_uM^* et T_uM

$$\begin{aligned}
\sharp_u : T_uM^* &\longrightarrow T_uM \\
\omega &\to \sharp_u\omega \\
g_u\left(\sharp_u\omega, v\right) &= \omega(v)
\end{aligned}$$

définit par, pour tout $v \in T_uM$.

Remarque 1.2.1.

Localement, si $\omega = \omega_i du^i$ et $g = g_{ij} du^i \otimes du^j$, alors

$$\#\omega = \omega_i g^{ij} \partial_j$$

ou $\left(g^{ij}\right)$ désigne la matrice inverse de (g_{ij}).

1.2 Connexion linéaire.

Définition 1.2.1.

Une connexion linéaire sur une variété M est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (U, Z) &\longmapsto \nabla_u Z \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_U(Z + W) = \nabla_U Z + \nabla_U W$
2. $\nabla_U(fZ) = U(f)Z + f\nabla_U Z$
3. $\nabla_{U+fV} Z = \nabla_U Z + f\nabla_V Z$,

pour tout $Z, W, U, V \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.2.2.

Soient ∇ une connexion sur une variété M de dimension n et $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ (resp $\left(du^1, \ldots, du^n\right)$) une base locale de section de $\Gamma(TM)$ (resp $\Gamma\left(T^*M\right)$). On défini les coefficients de Christoffel par

$$\Gamma_{ij}^k = du^k \left(\nabla_{\partial_i} \partial_j\right) \qquad (1.5)$$

Définition 1.2.3.

Une section $Z \in \Gamma(TM)$ est dite parallèle par rapport a la connexion ∇ si

$$\nabla_u Z = 0$$

pour tout $U \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.2.4.

Soit g une métrique Riemannienne sur M, On dit que la métrique g est compatible avec la connexion ∇ (ou parallèle), si

$$\nabla g = 0 \qquad (1.6)$$

i.e

$$\left(\nabla_u g\right)(Z, W) = 0$$

ou

$$U(g(Z, W)) = g\left(\nabla_u Z, W\right) + g\left(Z, \nabla_u W\right)$$

(1.7)
ou pour tout $U, Z, W \in \Gamma(TM)$.

1.2.1 Tenseur de torsion

Définition 1.2.5.

Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M. Le tenseur de torsion associé a ∇ est une application vectorielle $C^{\infty}(M)$-bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\mapsto \Gamma(TM) \\ (U, V) &\mapsto T(U, V) = \nabla_u V - \nabla_v U - [U, V] \end{aligned}$$

pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T \equiv 0$.

Remarques 1.2.1.

1. T est un champ de tenseur de type $(1, 2)$
2. $T(U, V) = -T(V, U)$ pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$ (T est antisymétrique)
3. La connexion ∇ est sans torsion ssi pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$ on a :

$$[U, V] = \nabla_u V - \nabla_v U$$

4. Pour tout $u \in M$, le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectoriel

$$\begin{aligned} T_x : T_u M \times T_u M &\to T_u M \\ (z, w) &\mapsto T_u(z, w) = \left(\nabla_u V\right)_u - \left(\nabla_v U\right)_u - [U, V]_u \end{aligned}$$

où $U, V \in \Gamma(TM)$, tel que $U_u = z$ et $V_u = w$ (indépendamment du choix de U et V).

Théorème 1.2.1.

Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Si $p \in M$ tel que $T_p \approx 0$, alors il existe une carte $(L, u^1, \ldots, u^n)$ telle que pour tout $i, j, k = 1, \ldots, n$, on a

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \qquad (1.8)$$

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

Théorème 1.2 .

Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'application :

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

donnée par la formule de Koszul :

$$2g\left(\nabla_u V, W\right) = U(g(V,W)) + V(g(W,U)) - W(g(U,V)) + g(W,[U,V]) + g(V,[W,U]) - g(U,[V,W]) \quad (1.9)$$

est une connexion linéaire sur M appelée la connexion de Levi-Civita.

Théorème 1.2.3.

Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g.
Preuve : On a

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_u V, W\right) - g\left(\nabla_v U, W\right) &= \frac{1}{2}\{g(W,[U,V]) - g(W,[V,U])\} \\ &= g(W,[U,V]), \end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion. Et,

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_u V, W\right) + g\left(\nabla_u W, V\right) &= \frac{1}{2}\{U(g(V,W)) + U(g(W,V))\} \\ &= U(g(V,W)), \end{aligned}$$

cela prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M. Comme g est non dégénérée, cette relation (1.9) détermine complètement la connexion ∇, ce qui donne l'unicité.

Exemple 1.2.1.

Une connexion linéaire ∇ sur M est une connexion linéaire sur le fibré tangent (TM, π, M).

Dans un système de coordonnées $\left(u^i\right)$ sur M, ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

En effet, si $U = u^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ et $V = V^j \frac{\partial}{\partial U^j}$ alors

$$\nabla_U V = V^i \left(\frac{\partial}{\partial U^i} V^k + \Gamma_{ij}^k V^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

Proposition 1.2.1.

Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, de dimension m et ∇ la connexion de Levi-Civita. Si (L, φ) est une carte sur M avec les champs de bases $\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^m}$ associés, alors les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right\} \\ g_{kl} \Gamma_{ij}^k &= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right\}, \end{aligned}$$

ou, g_{ij} sont les coordonnées de g relativement é la carte (l, φ).

Preuve :

Comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour tout $i, j = 1, \ldots, m$, ou $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$
on a,

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l\right) &= 2 \sum_{s=1}^m g\left(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l\right) \\ &= 2 \sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} \\ &= \partial_i \left(g\left(\partial_j, \partial_l\right)\right) + \partial_j \left(g\left(\partial_l, \partial_i\right)\right) - \partial_l \left(g\left(\partial_i, \partial_j\right)\right) \end{aligned}$$

donne,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right\}$$

d'où.

$$\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} g^{lk} \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right\}$$

et,

$$\sum_{s,l=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{lk} \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right\}$$

et comme $\left(g^{ij}\right)$ est la matrice inverse de (g_{ij}) on a $\sum_{l=1}^{m} g_{sl} g^{lk} = \delta_{ks}$, ou δ_{ks} est le symbole de Kronecker, d'où

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right\}$$

Exemple 1.2.2.

On considéré la paramétrisation de la sphère $S^n = \left\{ u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1 \right\}$ et soit la projection stéréographique, $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par

$$\psi(u) = \left(\frac{2u^1}{\|u\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2u^n}{\|u\|^2 + 1}, \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1} \right) \quad , u \in \mathbb{R}^n.$$

Les composantes du tenseur métrique relativement a ψ sont

$$g_{ij}(u) = \frac{4\delta_{ij}}{\left(1 + \|u\|^2\right)^2} \quad , u \in \mathbb{R}^n$$

Pour la preuve, en utilisant la formule 2.11. Les symboles de Christoffel sont,

$$\begin{array}{l} \Gamma_{ii}^{i}(u) = \Gamma_{ij}^{j}(u) = \Gamma_{ji}^{i}(u) = -\Gamma_{jj}^{i}(u) = \frac{-2u^i}{1+\|u\|^2}, \\ \Gamma_{ij}^{k}(u) = 0 \quad , \text{ pour } \quad i, j \text{ et } k = 1, ..n \text{ distincts.} \end{array}$$

pour la preuve en utilisant la proposition 1.2.1.

Théorème 1.2.4.

Soient (M, g) une variété Riemannienne et $p \in M$, alors il existe une carte $\left(N, u^1, \ldots, u^n\right)$ telle que

$$\Gamma_{ij}^{k}(p) = 0 \qquad (1.10)$$

$$g\left(\partial_i, \partial_j\right)(p) = \delta_{ij} \qquad (1.11)$$

pour tout $i, j, k = 1, \ldots, n$,

1.3 Courbures.

1.3.1 tenseur de courbure

Proposition 1.3.1

Soient (M, g) une variété Riemannienne et ∇ la connexion de Levi Civita. Alors, la fonction $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ définie par

$$R(U, V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U,V]} W \quad \forall U, V, W \in \Gamma(TM),$$

est un tenseur de type $(1, 3)$ sur M, appelée tenseur de courbure.

Propriétés 1.3.1

Soient $U, V, W, S \in \Gamma(TM)$ et R la courbure de Riemannienne, alors :

1. $R(U, V)W = -R(V, U)W$
2. $g(R(U, V)W, S) = -g(R(U, V)S, W)$
3. $g(R(U, V)W, S) = g(R(W, S)U, V)$
4. R vérifie l'identité de Bianchi Algébrique :
   $R(U, V)Z + R(V, W)U + R(W, U)V = 0$
5. R vérifie l'identité de Bianchi différentielle :
   $(\nabla_U R)(V, W) + (\nabla_V R)(W, U) + (\nabla_W R)(U, V) = 0$

1.3.2 Courbure sectionnelle

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n(n \geq 2), u \in M$ et P un 2-plan de $T_u M$ de base $\{U, V\}$, La courbure sectionnelle de P $K(P)$ définit par :

Définition 1.3.1

$$K(P) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{g(U, U)g(V, V) - g(U, V)^2}$$

si la base $\{U, V\}$ est orthonormée la courbure sectionnelle devient :

$$K(P) = g(R(U, V)V, U)$$

Définition 1.3.2

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n(n \geq 2)$. On dit que M est une variété a courbure sectionnelle constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$

telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan $P \in T_u M$:

$$K(P) = k.$$

Proposition 1.3.1

Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante k si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation suivante :

$$R(U, V)W = k(g(V, W)U - g(U, W)V)$$

Pour tout $U, V, W, \in \Gamma(TM)$.

1.3.3 Tenseur de Ricci

Définition 1.4.1

La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M, g) de dimension n est un tenseur de type $(0, 2)$ définit par :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(U, V) &= \operatorname{trace}(W \longrightarrow R(W, U)V) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g\left(R\left(e_i, U\right) V, e_i\right) \end{aligned}$$

Pour tout $U, V, W \in \Gamma(TM)$, ou $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormé sur M '

Propriété 1.4.1

Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors la courbure de Ricci est symétrique :
$\operatorname{Ric}(U, V) = \operatorname{Ric}(V, U) \forall U, V \in \Gamma(TM)$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(U,V) &= \sum_{i=1}^{n} g\left(R\left(e_i,U\right)V,e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g\left(R\left(U,e_i\right)e_i,V\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g\left(R\left(e_iV\right)U,e_i\right) \\
&= \operatorname{Ric}(V,U)
\end{aligned}$$

Définition 1.4.2

Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M,g) de dimension n, est un tenseur de type $(1,1)$ sur M, défini par :
1 $\operatorname{Ricci}(U) = \sum_{i=1}^{n} R\left(U,e_i\right)e_i \quad U \in \Gamma(TM)$

Définition 1.5.2

Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M,g) de dimension n, est un tenseur de type $(1,1)$ sur M, défini par :

$$\operatorname{Ricci}(X) = \sum_{i=1}^{n} R\left(U,e_i\right)e_i \quad U \in \Gamma(TM)$$

ou $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de M.

Remarque 1.5.1

Pour tout $U,V \in \Gamma(TM)$ on a :

$$\operatorname{Ric}(U,V) = g(\operatorname{Ricci}(U),V)$$

Définition 1.5.3

On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne (M,g) de dimension n, la fonction définie sur M par :

$$S = \text{ traceRic } = \sum_{i,j=1}^{n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$$

ou $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de M.

Corollaire 1.5.1

Soit (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n, de courbure sectionnelle constante k, alors :

1. $\operatorname{Ricci}(U) = (n-1)kU$,

2. $\operatorname{Ric}(U, V) = (n-1)\mathrm{kg}(U, V)$,

3. $S = n(n-1)k$.

Définition 1.5.4

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, La métrique g de (M, g) est dite d'Einstein si Ric $= \lambda g$ ou λ est une constante. La variété (M, g) est alors appelée variété d'Einstein.

Proposition 1.5.1

Toute variété Riemannienne a courbure sectionnelle constante k est une variété 1 d'Einstein.

Preuve :

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n,
a courbure sectionnelle constante k est une variété d'Einstein on a :

Pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(U, V) &= (n-1)kg(U, V) \\ &= \lambda g(U, V) \text{ avec } \quad \lambda = (n-1)k \end{aligned}$$

Donc, la variété M est Einsteinnienne.

1.3.4 1.3.4 Courbure scalaire

Définition 1.3.7.

On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne (M^m, g) la fonction définie sur M par

$$S = \operatorname{trace}_g \operatorname{Ric} = \sum_{i,j=1}^{m} g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, e_i\right)$$

ou $(e_i)_{i=1..m}$ une base orthonormée locale sur M.

Proposition 1.3.2.

Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante k si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :

$$R(U,V)Z = k(g(V,W)U - g(U,W)V)$$

pour tout U, V et $W \in \Gamma(TM)$.

Corollaire 1.3.1.

Si (M^m, g) est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante k, alors pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$ on a

1. $\mathrm{Ricci}(U) = (m-1)kU$,
2. $\mathrm{Ric}(U,V) = (m-1)\,\mathrm{kg}(U,V)$,
3. $S = m(m-1)k$.

Exemple 1.3.1.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du repère canonique $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, du produit scalaire euclidien $g = g_{ij} du_i \otimes du_j$, ou $g_{ij} = \delta_{ij}$. On vérifie immédiatement que $\Gamma_{ij}^k = 0, R_{ijk}^l = 0$ donc $R = 0$. En particulier, la courbure sectionnelle de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ est nulle.

1.4 Opérateurs sur une variété Riemannienne

1.4.1 L'opérateur gradient

Définition 1.4.1.

Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par

$$\mathrm{grad}: \begin{array}{rcl} C^\infty(M) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ f & \longmapsto & \mathrm{grad}\, f = \sharp df \end{array}$$

ou df est la différentielle de la fonction f.

Proposition 1.4.1. (Expression du gradient en coordonnées locales). Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $m, (L, \varphi)$ une carte sur M avec les champs de base associée $\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^m}$, alors pour tout $f \in C^\infty(M)$
on a

$$(\mathrm{grad}\, f)|_L = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \qquad (1.12)$$

Preuve :

On applique directement la définition de l'application $\sharp$ (voir proposition présidente), et la définition de la différentielle la fonction $f \in C^\infty(M)$ relativement a la carte (N, φ) sur M, on a

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i \\ \sharp df &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial u^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \end{aligned}$$

ou $du^1, \ldots, du^m$ est la base duale. De la Proposition 1.4.1, on déduit

Proposition 1.4.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteur $U \in \Gamma(TM)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a

$$df(l) = l(f) = g(\operatorname{grad} f, l)(1.13)$$

Propriétés 1.4.1.

Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a

1. $\operatorname{grad}(f+h) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h$
2. $\operatorname{grad}(fh) = h \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} h$
3. $(\operatorname{grad} f)(h) = (\operatorname{grad} h)(f)$

Preuve :

Soit $f, h \in C^\infty(M)$, pour tout $U \in \Gamma(TM)$ on a :

$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}(f+h), U) &= U(f+h) \\ &= U(f) + U(h) \\ &= g(\mathrm{gradf}, U) + g(\mathrm{gradh}, U) \\ &= g(\mathrm{grad} + \mathrm{gradh}, U) \end{aligned}$$

1).

$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}(f+h), U) &= U(f+h) \\ &= U(f) + U(h) \\ &= g(\mathrm{gradf}, U) + g(\mathrm{gradh}, U) \\ &= g(\mathrm{grad} + \mathrm{gradh}, U) \end{aligned}$$

2).

$$\begin{aligned} g(\mathrm{grad}(fh), U) &= U(fh) \\ &= hU(f) + fU(h) \\ &= hg(\mathrm{gradf}, U) + fg(\mathrm{gradh}, U) \\ &= g(h\,\mathrm{grad}\,f + f\,\mathrm{grad}\,h, U) \end{aligned}$$

3).

$$\begin{aligned} (\mathrm{grad}\,f)(h) &= g(\mathrm{grad}\,h, \mathrm{grad}\,f) \\ &= g(\mathrm{grad}\,f, \mathrm{grad}\,h) \\ &= (\mathrm{grad}\,h)(f) \end{aligned}$$

1.4.2 L'opérateur divergence

a)- Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $U \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M, g) on a

$$\begin{aligned} \nabla U : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ W &\longmapsto \nabla_W U \end{aligned} \qquad (1.14)$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇U est un tenseur de type $(1,1)$).

si $u \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla U)_u : T_uM &\longrightarrow T_uM \\ v &\longmapsto (\nabla_v U)_u \end{aligned} \qquad (1.15)$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

Définition 1.4.2.

Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $U \in \Gamma(TM)$, notée div U est une fonction sur M définie par

$$\mathrm{div}\,U = \mathrm{tr}_g(\nabla U)$$

pour tout $u \in M$, on a

$$(\mathrm{div}\,U)(u) = \mathrm{tr}_g\left((\nabla U)_u\right)$$

En locale (voir la Remarque 1.3.1), on a

$$\mathrm{div}\,U = du^i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} U\right)$$

$$= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} U, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$$

Si (e_i) est une base orthonormée locale sur M on a

$$\operatorname{div} U = \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} U, e_i\right)$$

Expression locale de la divergence

Proposition 1.4.3.

. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m, pour tout $U \in \Gamma(TM)$ on a localement

$$\operatorname{div} U = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial U^i}{\partial u^i} + u^j \Gamma^i_{ij} \right)$$

ou $U = U^i \frac{\partial}{\partial u^i}$.

Propriétés 1.4.2.

. Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tous $U, V \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\operatorname{div}(U+V) = \operatorname{div} U + \operatorname{div} V$$
$$\operatorname{div}(fU) = f \operatorname{div} U + U(f)$$

Preuve :

On applique directement la définition du divergence, soit (e_i) une base orthonormée locale sur M, on a

$$\operatorname{div}(U+V) = \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i}(U+V), e_i\right)$$

1)

$$\operatorname{div}(U+V) = \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i}(U+V), e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} U, e_i\right) + \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} V, e_i\right) = \operatorname{div} U + \operatorname{div} V,$$

2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fU) &= \sum_{i=1}^{m} g\left(\nabla_{e_i} fU, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g\left(e_i(f)U + f\nabla_{e_i}U, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(f) g\left(U, e_i\right) + \sum_{i=1}^{m} f g\left(\nabla_{e_i}U, e_i\right) \\
&= U(f) + f \operatorname{div} U
\end{aligned}$$

Lemme 1.4.1.

Sur une variété Riemannienne (M,g) Relativement a une carte locale

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right) = \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{lk}^{l}$$

(1.18)

Soit (M,g) une variété Riemannienne, pour tout $U \in \Gamma(TM)$ on a

$$\operatorname{div} U = \frac{1}{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}} \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} U^k\right)$$

Preuve :

D'aprés la proposition de première expression de la divergence en coordonneés locales nous avons,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} U &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U^i}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} U^j \Gamma_{ij}^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U^i}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{m} U^j \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ij}^{i}
\end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 1.4.1, avec $G = (g_{ij})$, alors un calcul direct donne,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} U &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \left(\sqrt{\det G} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U^i}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n} U^j \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^i \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \left(\sqrt{\det G} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U^i}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{m} U^j \frac{\partial}{\partial u_j} (\sqrt{\det G}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\det G} X^i \right)
\end{aligned}
$$

en utilisant la convention d'Einstein on a

$$
\operatorname{div}(U) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\det G} U^i \right)
$$

1.4.3 La Hessienne d'une fonction

Définition 1.4.4.

Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. La Hessienne de la fonction f noté Hess (f), est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire, définie par :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hess}(f) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\
(U, V) &\longmapsto g\left(\nabla_U \operatorname{grad}(f), V\right)
\end{aligned}
$$

Proposition 1.4.5.

Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. La Hessienne Hess (f), est une application symetrique.

1.4.4 L'opérateur Laplacien

Définition 1.4.5.

Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté $\triangle$, sur M par

$$
\begin{aligned}
\Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\
f &\longmapsto (f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{trace}_g(\operatorname{Hess}(f))
\end{aligned}
$$

appelé aussi opérateur de Laplace-Beltrami.

Propriétés 1.4.3.

Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a
1. $\triangle(f+h) = \triangle(f) + \triangle(h)$
2. $\triangle(fh) = h\triangle(f) + f\triangle(h) + 2g(\text{ grad } f, \operatorname{grad} h)$

Preuve :

Soit $f, h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que $U(f) = g(\operatorname{grad}(f), U)$, on obtient
1 .

$$\begin{aligned}\triangle(f+h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+h))\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h)\\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h)\\ &= \triangle(f) + \triangle(h)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\triangle(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh))\\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f)\\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f)\\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h)\\ &= f\triangle(h) + h\triangle(f) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h).\end{aligned}$$

Proposition 1.4.6. (Première expression du Laplacien en coordonnées locales).

Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\triangle(f) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u_k}\right) \qquad (1.19)$$

Preuve :

Soit $f \in C^{\infty}(M)$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
&= g^{ij} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial u^i} g\left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) - g\left(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right) \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right) - \Gamma_{ij}^k g\left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\right) \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u^k}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 1.4.1.

Soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard $g_0, (g_{ij} = \delta_{ij})$, alors pour tous fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $U = \left(U^1, \ldots, U^m\right)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ on a

1.
$$\begin{aligned}
\text{gradf} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u^m}\right)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\operatorname{div} U &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial U^i}{\partial u^i} \\
&= \frac{\partial U^1}{\partial u^1} + \ldots + \frac{\partial U^m}{\partial u^m}
\end{aligned}$$

3.
$$\triangle(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}$$

1.4.5 Formule de Bochner

Proposition 1.4.7.

Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^{\infty}(M)$, alors f verifie la formule suivante (dite formule de Bochner) :

$$\frac{1}{2}\Delta|\operatorname{grad}(f)|^2 = |\operatorname{Hess}(f)|^2 + g(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(\Delta f)) + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)) \tag{1.20}$$

ou $|\operatorname{Hess}(f)|^2 = \sum_i g\left(\nabla_{e_i} \operatorname{grad}(f), \nabla_{e_i} grad(f)\right)$ relativement une base locale orthonormale $(e_1, \ldots, e_m)$.

Preuve :

Soients $u \in M$ et $(e_1, \ldots, e_m)$ une base locale orthonormale de champs de vecteurs telque $(\nabla_{e_i} e_j)_u = 0, \quad 1 \leq i, j \leq m$. En développant le calcul en u, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\operatorname{grad}(f)|^2 =& \frac{1}{2}\sum_i e_i\left(e_i g(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f))\right)\\
=& \sum_i e_i\left(g\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\right)\right)\\
=& \sum_i e_i\left(\operatorname{Hess}(f)\left(e_i, \operatorname{grad}(f)\right)\right)\\
=& \sum_i e_i\left(\operatorname{Hess}(f)\left(\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right)\\
=& \sum_i e_i\left(g\left(\nabla_{\operatorname{grad}(f)}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right)\\
=& \sum_i \left(g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{\operatorname{grad}(f)}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right) + g\left(\nabla_{\operatorname{grad}(f)}\operatorname{grad}(f), \nabla_{e_i} e_i\right)\Bigg)\Bigg)\\
=& \sum_i g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{\operatorname{grad}(f)}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\Bigg)\\
=& \sum_i \left\{g\left(R\left(e_i, \operatorname{grad}(f)\right)\operatorname{grad}(f), e_i\right) + g\left(\nabla_{\operatorname{grad}(f)}\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right.\\
& \left. + g\left(\nabla_{[e_i, grad(f)]}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right\} \ldots \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_i g\left(R\left(e_i, \operatorname{grad}(f)\right)\operatorname{grad}(f) \qquad (1.22), e_i\right) = \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)).$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \Big\{ g\left(\nabla_{\operatorname{grad}(f)}\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right) &= \sum_i \operatorname{grad}(f)\left(g\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right) \\
&\quad - \sum_i g\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), \nabla_{\operatorname{grad}(f)}e_i\right)\Big\} \\
&= \sum_i \operatorname{grad}(f)\left(\mathrm{g}\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right) \\
&\quad - \sum_i g\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_j(f)\nabla_{e_j}e_i\right)\Big\} \\
&= \sum_i \operatorname{grad}(f)\left(g\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right)\right) - 0 \\
&= \operatorname{grad}(f)\operatorname{trace}\operatorname{Hess}(f). \\
&= \operatorname{grad}(f)(\triangle(f)) \\
&= \mathrm{g}(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}\triangle(f)). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g\left(\nabla_{[e_i, grad(f)]}grad(f), e_i\right) &= \sum_i \operatorname{Hess}(f)\left(\left[e_i, \operatorname{grad}(f)\right], e_i\right) \\
&= \sum_i \operatorname{Hess}(f)\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f) - \nabla_{\operatorname{grad}(f)}e_i, e_i\right) \\
&= \sum_i \operatorname{Hess}(f)\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right) - \sum_i \operatorname{Hess}(f)\left(\nabla_{\operatorname{grad}(f)}e_i, e_i\right) \\
&= \sum_i \operatorname{Hess}(f)\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), e_i\right) - 0 \\
&= \sum_i \operatorname{Hess}(f)\left(e_i, \nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f)\right) \\
&= \sum_i g\left(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f), \nabla_{e_i}\operatorname{grad}(f)\right) \qquad (2.24).
\end{aligned}$$

Enfin , en substituant les formules (1.22) , (1.23) et (1.24),on obtient la formule (1.20).

Définition 1.4.6.

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. On appelle mesure de volume Riemannienne, notée v^M ou v^g, la mesure définie localement dans un repère par

$$v^M = \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$$

Exemples 1.4.1.

On considère la variété $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartèsiennes (u, v) on a

$$g_0 = du^2 + dv^2$$

et,

$$v^{g_0} = \sqrt{\det(g_{ij})} du \wedge dv = du \wedge dv$$

On Considère la sphère S^2 muni de la métrique

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

alors,

$$v^g = \sqrt{\det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin\theta| d\theta \wedge d\varphi$$

Proposition 1.4.8.

(Théorème de divergence /7/). Soit D un domaine compact à bord dans une variété Riemannienne (M, g). Soit ω 1-forme et U un champ de vecteurs, définies sur un voisinage inclue dans D. Alors

$$\int_D (\operatorname{div}\omega) v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathfrak{n}) v^{\partial D} \text{ et } \int_D (\operatorname{div} U) v^M = \int_{\partial D} g(U, \mathfrak{n}) v^{\partial D},$$

ou ∂D est le bord de D et $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u)$ est le vecteur unitaire normale a ∂D.

Corollaire 1.4.1.

Pour tout ω une 1-forme et U un champ de vecteurs a supports compact dans un domaine D, alors

$$\int_D (\operatorname{div}\omega) v^M = 0 \quad \text{et} \quad \int_D (\operatorname{div} U) v^M = 0$$

1.5 Propriétés des Connexions sur une sous variété

1.5.1 Décomposition du fibré tangent

Définition 1.6.1.

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m, N une variété (resp sous variété de M) de dimension n, et $f : N \to M$ une immersion C^∞. Si N est muni de la métrique induite $h = f^*g$, alors l'application f est dite immersion isométrique, si de plus f est injective alors (N, h) est dite sous variété Riemannienne. Dans la suite de cette section, on considère le cas des immersions isométriques. On note par :

$$TM/N = \bigcup_{p \in N} T_pM \qquad (1.25)$$

le fibré vectoriel au dessus de N.

$$\mathcal{T}(N) = TN = \bigcup_{p \in N} T_pN \qquad (1.26)$$

le fibré vectoriel tangent a N.

$$\mathcal{N}(N) = \bigcup_{p \in N} (T_pN)^{\perp} = (TN)^{\perp} \qquad (1.27)$$

le fibré vectoriel normal a N. Le fibré TM/N se décompose en somme directe (somme de Whitney) :

$$TM/N = \mathcal{T}(N) \oplus \mathcal{N}(N) = \bigcup_{p \in N} \Big(T_pN \oplus (T_pN)^{\perp}\Big) \qquad (1.28)$$

Remarque 1.3.1

Localement pour tout $p \in N$, il existent un ouvert $U \subset M$ et une base locale $(E_1, \ldots, E_m) \in \Gamma(TM)$ de champ de vecteurs tels que pour tout $u \in U \cap N$, on a : $\big(E_{1/u}, \ldots, E_{n/u}\big)$ est une base de T_uN et $\big(E_{n+1/u}, \ldots, E_{m/u}\big)$ est une base de $\mathcal{N}_u(N)$ On note par :

$$\begin{aligned} \pi^{\top} &: M/N \quad \rightarrow \mathcal{T}(N) \\ \pi^{\perp} &: M/N \rightarrow \mathcal{N}(N) \end{aligned}$$

les projections canoniques.

1.5.2 Opérateur Shape (Application de Weingarten)

Soient ∇^M et ∇^N les connexions de Levi-Civita associée à M et N respectivement. Pour tout $U, V \in \Gamma(TN)$, on a la décomposition unique :

$$\nabla^M_U V = \big(\nabla^M_U V\big)^{\top} + \big(\nabla^M_U V\big)^{\perp} \qquad (1.29)$$

En vertu de l'unicité de la connexion de Levi-Civita sur la variété N, on a :

$$\big(\nabla^M_U V\big)^{\top} = \nabla^N_U V$$

d'où

$$\nabla^M_U V = \nabla^N_U V + \big(\nabla^M_U V\big)^{\perp} \qquad (1.30)$$

Des propriétés des connexions ∇^M et ∇^N (connexions sans torsions), on déduit que l'application :

$$\begin{aligned} B : \Gamma(TN) \times \Gamma(TN) &\to \Gamma\left(TN^{\perp}\right) \\ (U, V) &\mapsto B(U,V) = \left(\nabla^M_U V\right)^{\perp} \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(N)$-bilinéaire symétrique :

$$B(U,V) = \nabla^M_U V - \nabla^N_U V = \nabla^M_V U - \nabla^N_V U = B(V,U)$$

B est appelé deuxième forme fondamentale. La formule (1.29) s'écrit

$$\nabla^M_U V = \nabla^N_U V + B(U,V)$$

La formule (1.30) est dite formule de Gauss.
Pour $\in \Gamma(\mathcal{N}(N))$, on pose :

$$\begin{aligned} A_\xi : \Gamma(TN) &\to \Gamma(TN) \\ U &\mapsto A(U) = -\left(\nabla^M_U\right)^{\top} \qquad (1.31) \end{aligned}$$

Pour tout $V \in \Gamma(TM)$ et $U \in \Gamma(\mathcal{N}(N))$, on a :

$$0 = U(g(U,)) = g\left(\nabla^M_U, V\right) + g\left(, \nabla^M_U V\right) = g\left(\left(\nabla^M_U\right)^{\top}, V\right) + g\left(, \left(\nabla^M_U V\right)^{\perp}\right).$$

d'où

$$g\left(A(U), V\right) = g(, B(U,V)).$$

En déduit que A est une application $C^\infty(N)$-linéaire verifiant la condition de symétrie :

$$g\left(A(U), V\right) = g\left(A(V), U\right)$$

L'application A est appelé opérateur Shape où Application de Weingarten. (pour plus de détail sur les propriétés des sous-variétés voir [36]. L'application :

$$\begin{aligned} \nabla^{\perp} : \Gamma(TN) \times \Gamma(\mathcal{N}(N)) &\to \Gamma(\mathcal{N}(N)) \\ (U,) &\mapsto \nabla^{\perp}_U = \left(\nabla^M_U\right)^{\perp} \end{aligned}$$

définit une connexion, dite connexion normale et on a la formule de Weingarten :

$$\nabla^M_U = -A(U) + \nabla^{\perp}_U. \qquad (1.32)$$

1.5.3 Equation de Gauss

Proposition 1.6.1.

Si R^M et R^N désignent les tenseurs de courbure de M et N respectivement, alors pour tout $U, V, W, S \in \Gamma(TM)$ on a l'équation de Gauss :

$$\begin{aligned} g\left(R^N(U,V)W, S\right) =& g\left(R^M(U,V)W, S\right) + g(B(V,W), B(U,S)) \\ & - g(B(U,W), B(V,S)) \qquad (1.33) \end{aligned}$$

Preuve

: Des formules (1.30) et (1.32) On obtient

$$\begin{aligned} \nabla_U^M \nabla_V^M W &= \nabla_U^M \nabla_V^N W + \nabla_U^M B(V,W) \\ &= \nabla_U^N \nabla_V^N W + B\left(U, \nabla_V^N W\right) - A_{B(V,W)} U + \nabla_U^{\perp} B(V,W) \\ (1.34) \nabla_V^M \nabla_U^M W &= \nabla_V^N \nabla_U^N Z + B\left(V, \nabla_U^N W\right) - A_{B(U,W)} V + \nabla_V^{\perp} B(U,W) \\ (1.35) \nabla_{[U,V]}^M W &= \nabla_{[U,V]}^N W + B([U,V], W). \qquad (1.36) \end{aligned}$$

En utilisant la définition du tenseur de courbure et les formules (1.34), (1.35) et (1.36), on déduit la formule (1.33).

Si K^M et K^N désignent les courbures sectionelles de M et N respectivement, alors pour tout champs de vecteurs orthonormales $u, v \in \Gamma(TN)$, on a :

$$K^N(U,V) = K^M(U,V) + g(B(U,U), B(V,V)) - \|B(U,V)\|^2.$$

1.5.4 Equation de Codazzi

Des formules (1.34), (1.35) et (1.36), on obtient

$$\begin{aligned} \left(R^M(U,V)W\right)^{\perp} =& B\left(U, \nabla_V^N W\right) + \nabla_U^{\perp} B(V,W) - B\left(V, \nabla_U^N W\right) - \nabla_V^{\perp} B(U,W) - B([U,V], W) \\ =& B\left(U, \nabla_V^N W\right) + \nabla_U^{\perp} B(V,W) - B\left(V, \nabla_U^N W\right) - \nabla_V^{\perp} B(U,W) - B\left(\nabla_U V, W\right) \\ & + B\left(\nabla_V U, W\right) \\ =& \nabla_U^{\perp} B(V,W) - B\left(\nabla_U V, W\right) - B\left(V, \nabla_U^N W\right) - \nabla_V^{\perp} B(U,W) + B\left(\nabla_V U, W\right) \\ & + B\left(U, \nabla_V^N W\right) \\ =& \left(\nabla_U^{\perp} B\right)(V,W) - \left(\nabla_V^{\perp} B\right)(U,W) \end{aligned}$$

ou :
L'équation

$$\begin{aligned} \left(\nabla_U^{\perp} B\right)(V,W) &= \nabla_U^{\perp} B(V,W) - B\left(\nabla_U V, W\right) - B\left(V, \nabla_U^N W\right) \\ \left(R^M(U,V)W\right)^{\perp} &= \left(\nabla_U^{\perp} B\right)(V,W) - \left(\nabla_V^{\perp} B\right)(U,W) \qquad (1.37) \end{aligned}$$

est dite équation de Codazzi.
Notons par $R^{\perp}$ le tenseur de courbure du fibré normal $TM^{\perp}$:

$$R^{\perp} : TM \times TM \times TM^{\perp} \to= TM^{\perp}$$
$$(U, V,) \mapsto R^{\perp}(U, V)$$

définit par :

$$R^{\perp}(U, V) = \nabla^{\perp}_U \nabla^{\perp}_V - \nabla^{\perp}_V \nabla^{\perp}_U - \nabla^{\perp}_{[U,V]}$$

Des formules de Gauss (1.46) et de Weingarten (1.48), on obtient l'équation de Ricci suivante :

$$\left(R^M(U, V)\right)^{\perp} = R^{\perp}(U, V) + B\,(AU, V) - B\,(AV, U)$$

(1.38)

Chapitre 2

Géométrie du fibré vectoriel

2.1 Fibrés vectoriels

Définition 2.1.1.

On appelle fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$, le triplet (E, π, M) ou E et M sont des variétés de classe C^∞, et $\pi : E \longrightarrow M$ une application surjective de classe C^∞ telles que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $x \in M, E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension k.
2. (Condition de trivialisation locale.)
Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tels que :
i) $P_1 \circ \varphi = \pi$, i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[drr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^K \arrow[d, "p_1"] \\ & & U \end{tikzcd}$$

ou $P_1 : (x, y) \in U \times \mathbb{R}^k \longmapsto x \in U$ désigne la première projection.
L'application $\varphi_x = \varphi_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$ est linéaire bijective pour tout $x \in M$.
ii) L'application $\varphi_x = \varphi_{|_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$ est linéaire brjective pour tout $x \in M$. a variété M est appelée base du fibré, E l'espace total et $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ la fibre au-dessus de x.

Exemple 2.1.1. Fibré tangent.

Soient M une variété de classe C^∞, de dimension n,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

(réunion disjointe de tous les espaces tangents à M), et

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto x \quad (v \in T_x M) \end{aligned}$$

la projection canonique.
Le triplet (TM, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^n$, En effet :
- TM est une variété C^∞ de dimension 2n .

2.1.1 Sections du fibré tangent

Définition 2.1.2.

Un champs de vecteurs de classe C^k sur une variété de classe C^{k+1} est une section de classe C^k du fibré tangent, c'est à dire une application de classe C^k, $\xi : M \to T(M)$, telle que : $\forall a \xi(a) \in T_a(M)$.

Il y a toujours au moins un champ de vecteurs : la section nulle. L'existence d'un champ de vecteur qui ne s'annulle pas est un problème intéressant non trivial.

Un difféomorphisme de classe $C^{k+1}, f : M \to N$, transporte les champs de vecteurs de classe C^k. Etant donné un champ de vecteur $\xi : M \to T(M)$, le champ de vecteurs correspondant, appelé image directe est défini pour $b = f(a)$ par :

$$(f_* \xi)(b) = (T_a(f) \circ \xi)(a) = T_a(f) \cdot \xi(a).$$

Etant donné une variété M de classe C^{k+1}, l'espace $\Gamma^k(TM)$ des champs de vecteurs de classe C^k sur M est un module sur l'algèbre $C^k(M)$ des fonctions de classe C^k sur M. La correspondance précédente est compatible avec cette structure de module : étant donné une fonction $\psi \in C^k(N)$, on a

$$(\psi \cdot f_* \xi)(b) = f_*((\psi \circ f) \cdot \xi)(a).$$

la projection canonique.
Le triplet (T^*M, π, M) est un fibré vectoriel, de fibre type $\mathbb{R}^n$ et de carte de trivialisation locale associée à $(U, \psi) \in$ atl (M) définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : (\pi^*)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ (y, \omega) &\longmapsto \left(y, \omega\left(\partial_1|_y\right), \ldots, \omega\left(\partial_n|_y\right)\right) \end{aligned}$$

ou $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ désigne la base des champs de vecteurs relative à la carte (V, ψ). (T^*M, π^*, M) est le fibré dual du fibré tangent (TM, π, M), appelé fibré cotangent.

2.1.2 Produit tensoriel de fibré

Définition 2.1.14.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement. Nous définissons le produit tensoriel de E et F, noté $E \otimes F$ par

$$E \otimes F = \bigcup_{x \in M} E_x \otimes F_x$$

ou, E_x (resp. F_x) la fibre au-dessus de x sur E(resp. sur F) et l'application π par

$$\begin{aligned} \pi : E \otimes F &\longrightarrow M \\ v \otimes w &\longmapsto \pi(v \otimes w) = \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{aligned}$$

Alors $(E \otimes F, \pi, M)$ est un fibré vectoriel sur M de fibre type $\mathbb{R}^{k.l}$, appellé fibré produit tensoriel de (E, π_E, M) et (F, π_F, M). Carte de trivialisation locale Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes vérifiants la condition de trivialisation locale sur E et F respectivament avec $U \cap V \neq \emptyset$, alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : \pi^{-1}(U \cap V) &\longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \\ v \otimes w \in E_x \otimes F_x &\longmapsto (x, \varphi_x(v) \otimes \psi_x(w)) \end{aligned}$$

définit une carte sur $E \otimes F$ vérifiant la condition de trivialisation locale, ou

$$\varphi_x = Pr_2 \circ \varphi|_{E_X} \quad , \quad \psi_x = \tilde{P}r_2 \circ \psi\Big|_{F_X},$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{P}r_2 : M \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

2.1.3 Section sur le fibré produit tensoriel.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement.
Une section sur le produit tensoriel $E \otimes F$ est une application,

$$T : M \longrightarrow E \otimes F$$

de classe C^∞ telle que $\pi \circ T = Id_M$ (i.e : $T(x) \in E_x \otimes F_x$ pour tout $x \in M$). Soit (U, φ) (resp (V, ψ)) une carte vérifiant la condition de trivialisation locale sur E (resp F) de base locale de sections $(\sigma_i^{\varphi})_{i=1}^{k}$ $\left(\text{resp} \left(\sigma_j^{\psi}\right)_{j=1}^{l}\right)$. Si $T \in \Gamma(E \otimes F)$ est une section sur le produit tensoriel $E \otimes F$ on a

$$T|_{U\cap V} = T^{ij}\sigma_i^{\varphi} \otimes \sigma_j^{\psi},$$

ou T^{ij} sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur M pour tout $i = 1..k$ et $j = 1.l$.

Remarque 2.1.2.

La Définition 2.1.8 peut être prolongé au produit tensoriel quelconque de fibrés :

$$\bigotimes_{i=1}^{n} E_i = E_1 \otimes \ldots \otimes E_n.$$

Exemple 2.1.6.

Soient M une variété différentiable, de dimension m et $x \in M$, on note :

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{p-\text{ fois}} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes \ldots \otimes T_x^*M}_{q-f\text{ ois}}$$
$$T^{(p,q)}M = \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{p-\text{ fois}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{q\text{-fois}}$$
$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x\in M} T_x^{(p,q)}M$$

$T^{(p,q)}M$ est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^{m^{p+q}}$. Si $\mathfrak{T}_p^q(M)$ désigne l'espace des sections sur le fibrés $T^{(p,q)}M$, on a alors :

$$\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M), \quad \mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}(M) \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}^*(M).$$

Relativement à une carte $\left(U, x^i\right) \in$ atl (M), un champ de tenseur $T \in \mathfrak{T}_p^q(M)$ sécrit en coordonnée locale

$$T = T_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q},$$

ou, $T_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur U. La formule (2.2) nous permet d'identifier $\mathfrak{T}_p^q(M)$ à l'espace $C^\infty(M)$-module

$$\left\{ B : \bigotimes^{q} \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \bigotimes^{p} \mathfrak{X}(M) \mid C^\infty(M)\text{-q linéaire} \right\},$$

ou, $\bigotimes^s \mathfrak{X}(M) = \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s-\text{ fois}}$ pour $s \geq 1$ et $\bigotimes^0 \mathfrak{X}(M) = C^\infty(M)$.

définit une carte sur $E \otimes F$ vérifiant la condition de trivialisation locale, ou

$$\varphi_x = Pr_2 \circ \varphi|_{E_X} \quad , \quad \psi_x = \tilde{P}r_2 \circ \psi\Big|_{F_X} ,$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x,z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{P}r_2 : M \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (x,z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

2.1.4 Fibré Somme de Whitney

Définition 2.1.15.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement. Nous définissons la somme de Whitney de E et F, noté $E \oplus F$ par :

$$E \oplus F = \bigcup_{x \in M} E_x \times F_x,$$

ou, E_x (resp. F_x) la fibre au-dessus de x sur E(resp. sur F) et l'application π par

$$\begin{aligned} \pi : E \oplus F &\longrightarrow M \\ (v,w) &\longmapsto \pi((v,w)) = \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{aligned}$$

Alors $(E \oplus F, \pi, M)$ est un fibré vectoriel sur M de fibre type $\mathbb{R}^{k+l}$ et de dimension $m+k+l$, appellé Somme de Whitney de (E, π_E, M) et (F, π_F, M).

Remarque 2.1.3.

$$E \oplus F = \{(u,v) \in E \times F; \quad \pi_E(v) = \pi_F(w)\}.$$

Exemple 2.1.8.

$$(M \times \mathbb{R}^p) \oplus (M \times \mathbb{R}^q) = M \times \mathbb{R}^{p+q}$$

Carte de trivialisation locale
Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes qui vérifient la condition de trivialisation locale sur E et F respectivament avec $U \cap V \neq \emptyset$, alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi : \pi^{-1}(U \cap V) &\longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \\ (v,w) \in E_x \oplus F_x &\longmapsto (x, \varphi_x(v), \psi_x(w)) \end{aligned}$$

définit une carte sur $E \oplus F$ vérifiant la condition de trivialisation locale, ou

$$\varphi_x = \mathrm{Pr}_2 \circ \varphi|_{E_X} \quad , \quad \psi_x = \tilde{P}r_2 \circ \psi\Big|_{F_X},$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x,z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{P}r_2 : M \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (x,z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

2.1.5 Section sur le fibré somme de Whitney.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement.

Définition 2.1.16.

Une section sur le fibré somme de Whitney $E \oplus F$ est une application,

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow E \oplus F \\ x &\mapsto T(x) = (T_1(x), T_2(x)) \end{aligned}$$

de classe C^∞ telle que $\pi \circ T = Id_M$. On a :
- $\forall x \in M \quad T(x) \in E_x \oplus F_x$.
- $T = T_1 \oplus T_2; T_1 \in \Gamma(E)$ et $T_2 \in \Gamma(F)$

Soit (U, φ) (resp (V, ψ)) une carte vérifiant la condition de trivialisation locale sur E (resp F) de base locale de sections $(\sigma_i^\varphi)_{i=1}^k$ $\left(\text{resp} \left(\sigma_j^\psi\right)_{j=1}^l\right)$.
Si $T \in \Gamma(E \oplus F)$ est une section sur le fibré somme de Whitney $E \oplus F$ on a

$$\begin{aligned} T|_{U\cap V} &= (T_1^i \sigma_i^\varphi) \oplus \left(T_2^j \sigma_j^\psi\right) \\ &= \left(T_1^i \sigma_i^\varphi, T_2^j \sigma_j^\psi\right) \\ &= T_1^i (\sigma_i^\varphi, 0) + T_2^j \left(0, \sigma_j^\psi\right) \end{aligned}$$

ou T_1^i et T_2^j sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur M pour tout $i = 1..k$ et $j = 1..l$.

Remarque 2.1.4.

La définition 2.1.9 peut étre prolongé a la somme quelconque de Whitney :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n.$$

2.1.6 Fibré inverse (Pull-back)

Définition 2.1.17.

Soient M, N deux variétés différentiables, (F, π_N, N) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur N et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. On pose

$$\begin{aligned} E_x &= \{x\} \times F_{f(x)} = \left\{(x,v) \mid v \in F_{f(x)}\right\}, \quad x \in M \\ E &= \bigcup_{x\in M} E_x. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow M \\ (x,v) &\longmapsto x \end{aligned}$$

la projection naturelle. Alors le triplet (E, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur M, appellé fibré inverse (Pull - back) ; On le note par f^{-1} F.

Carte de trivialisation locale

Si (W, ψ) est une carte sur F vérifiant la condition de trivialisation locale et U un ouvert de M tel que $f(U) \subset W$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k, \\ (x,v) &\longmapsto \left(x, \psi_{f(x)}(v)\right) \end{aligned}$$

Alors, (U, φ) est une carte sur E, vérifiant la condition de trivialisation locale. E est une variété de dimension égale à $\dim(M) + k$.

2.1.7 Section sur un fibré inverse

Une section sur un fibré inverse $\left(f^{-1}F, \pi, M\right)$ est une application $V : M \longrightarrow F$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in M, V_x \in F_{f(x)}$. Si (W, ψ) est une carte sur F vérifiant la condition de trivialisation locale de base locale associés $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, et U un ouvert de M tel que $f(U) \subset W$, alors toute section $V \in \Gamma\left(f^{-1}F\right)$ s'ecrit

$$V|_U = \sum_{i=1}^{k} V^i \cdot \sigma_i \circ f$$

ou $V^i \in C^\infty(U)$, pour tout $i = 1, \dots, k$.

2.2 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.

2.2.1 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.

Définition 2.2.1.

Une connexion linéaire sur un fibré vectoriel (E, π, M) est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2. $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3. $\nabla_{X+fY} V = \nabla_X V + f\nabla_Y V,$

   pour tout $V, W \in \Gamma(E), X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Définition 2.2.2.

Une section $V \in \Gamma(E)$ est dite parallèle par rapport a la connexion ∇ si

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

2.2.2 Connexion induite sur le fibré dual

ou, ω_i^j sont des fonctions différentiables sur $U \cap V$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$. Si de plus $V = V^i \sigma_i$, alors

$$\omega(V) = \omega_i^j V^i \rho_j.$$

Remarque 2.2.1.

Si $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$, une 1-forme vectorielle, alors pour $X \in \Gamma(TM$ $\nabla_X \omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$ est une 1-forme vectorielle définie par

$$(\nabla_X \omega)(V) = \nabla_X \omega(V) - \omega(\nabla_X V)$$

pour tout $V \in \Gamma(E)$.

Remarque 2.2.2.

On général, soient $(F,\pi,M),(E_i,\pi_i,M)\,(i=1,\ldots,p)$ des fibrés vectoriel. Si $\omega\in\Gamma\left(E_1^*\otimes\ldots\otimes E_p^*\otimes F\right)$, alors pour tout $(V_1,\ldots,V_p)\in\Gamma(E_1)\times\ldots\times\Gamma(E_p)$, on a

$$(\nabla_X\omega)(V_1,\ldots,V_p)=\nabla_X\omega(V_1,\ldots,V_p)-\sum_{j=1}^{p}\omega\left(V_1,\ldots,\nabla_X^{E_j}V_j,\ldots,V_p\right)$$

2.2.3 Connexion induite sur le fibré somme de Whitney

Proposition 2.2.2.

Soient ∇^E et ∇^F deux connexions linéaire sur (E,π_E,M) et $(F,\pi_F,M$ respectivement. On définit alors une unique connexion sur,$\Gamma(E\oplus F)$ par :

$$\begin{aligned}\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(E\oplus F)\longrightarrow&\quad\Gamma(E\oplus F)\\(X,T_1\oplus T_2)\mapsto&\quad\nabla_XT_1\oplus T_2=\left(\nabla_X^ET_1\right)\oplus\left(\nabla_X^FT_2\right)\\&\quad=\left(\nabla_X^ET_1,\nabla_X^FT_2\right)\end{aligned}$$

pour tout $X\in\Gamma(TM),T_1\in\Gamma(E)$ et $T_2\in\Gamma(F)$. ∇ est appelé connexion somme, notée $\nabla^E\oplus\nabla^F$.

2.2.4 Connexion induite sur le fibré inverse

Soient M et N deux variétés différentiables, (F,π_N,N) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}$ sur N et $f:M\longrightarrow N$ une application de classe C^∞. Si ∇^N est une connexion linéaire su (F,π_N,N), on définit la connexion sur le fibré inverse (Pull-back) $f^{-1}F$,

$$\nabla^f:\Gamma(TM)\times\Gamma\left(f^{-1}F\right)\longrightarrow\Gamma\left(f^{-1}F\right),$$

par

$$\left(\nabla_X^fV\right)_x=\left(\nabla^N_{d_xf(X_x)}\tilde{V}\right)_{f(x)}$$

pour tout $X\in\Gamma(TM),V\in\Gamma\left(f^{-1}F\right),x\in M$ et $\tilde{V}\in\Gamma(F)$ tel que $\tilde{V}\circ f=V$ au voisinage x.

Remarque 2.2.3.

La relation (1.8) est indéendante du choix de $\tilde{V}$. En effet, soient $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\right.$, une base locale de $\Gamma(TM)$, $\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right)$ une base locale de $\Gamma(TN)$ et $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ base locale

$\Gamma(F)$, pour $X = X^i\partial_i \in \Gamma(TM), V = V^\beta(\sigma_\beta \circ f) \in f^{-1}F, \tilde{V} = \tilde{V}^\beta\sigma_\beta \in \Gamma(F)$ et $x \in M$ on a

$$\begin{aligned}\left(\nabla^f_X V\right)_x &= \left(\nabla^N_{d_xf(X_x)}\tilde{V}\right)_{f(x)} \\ &= X^i_x \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\bigg|_x \left(\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\tilde{V}^\beta\sigma_\beta\right)_{f(x)}\end{aligned}$$

$$= X^i_x \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\bigg|_x \left\{\frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha}\sigma_\beta + \tilde{V}^\beta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sigma_\gamma\right\}\bigg|_{f(x)},$$

ou, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ sont des fonctions différentiables sur N, définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\sigma_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sigma_\gamma$$

Remarquons que $\tilde{V}^\beta_{f(x)} = V^\beta_x$ et $\frac{\partial V^\beta}{\partial x^i}\Big|_x = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tilde{V}^\beta \circ f\right)\Big|_x = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\Big|_x \frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha}\Big|_{f(x)}$, pour tout $\beta = 1, \ldots, k$, d'ou

$$\left(\nabla^f_X V\right) = X^i\left(\frac{\partial V^\gamma}{\partial x^i} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}V^\beta\left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ f\right)\right)(\sigma_\gamma \circ f),$$

2.3 Métrique sur un fibré vectoriel

2.3.1 Métrique sur un fibré vectoriel.

Définition 2.3.1.

Une métrique g sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$ est une application,

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

Remarques 2.3.1.

Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$, pour tout $V, W \in \Gamma(E)$, on a :
1. $-g(V, W) = g(W, V)$. (symétrique)
$-g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$. (non dégénérée)
$-g(V, V) \geq 0$. (définie positive)
2. $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ Si (U, φ) est une carte sur E vérifiant la condition de trivialisation locale de base associé $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ et de base dual associé $\left(\sigma^1, \ldots, \sigma^k\right)$, alors

$$g = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}\sigma^i \otimes \sigma^j,$$

ou g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appellé composantes du tenseur métrique relativement a la carte (U, φ). Si $V = V^i \sigma_i$ et $W = W^j \sigma_j$ on a

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3. Pour tout $x \in M$ on a

$$g_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, ou E_x la fibre au-dessus de x.

Définition 2.3.2.

Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) et ∇ une connexion sur(E, π, M), la métrique g est dite compatible avec la connexion ∇ si

$$\widetilde{\widetilde{\nabla}} g = 0$$

ou $\widetilde{\widetilde{\nabla}}$ est la connexion induite sur $E^* \otimes E^*$ La relation 2.9 est équivalente

$$X\left(g\left(\sigma_1, \sigma_1\right)\right) = g\left(\nabla_X \sigma_1, \sigma_2\right) + g\left(\sigma_1, \nabla_X \sigma_2\right)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$.

Définition 2.3.3.Image inverse d'une métrique

Soient $(E_1, \pi_1, M), (E_2, \pi_2, N)$ deux fibrés vectoriels et $(F, f) : (E_1, \pi_1, M) \rightarrow (E_2, \pi_2, N)$ un homomorphisme injective de fibré vecoriel. Si h est une métrique sur (E_2, π_2, N) Alors

$$F^* h :\in \Gamma\left(E_1\right) \times \in \Gamma\left(E_1\right) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

définie pour tout $X, Y \in \Gamma\left(E_1\right)$ et $x \in M$ par

$$F^* h(X, Y)_x = h_{f(x)}\left(F_x\left(X_x\right), F\left(Y_x\right)\right),$$

est une métrique sur (E_1, π_1, M), appelée métrique inverse

Expression locale de la métrique $F^* h$

Soients (U, φ) une carte de trivialisation locale (E_1, π_1, M) de base de sections associées $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ et (V, ψ) une carte de trivialisation locale

(E_2, π_2, N) de base de sections associées $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_m)$, alors

$$\begin{aligned}
(F^*h)_{ij} &= F^*h\left(\sigma_i, \sigma_j\right) \\
&= h\left(F\left(\sigma_i\right), F\left(\sigma_j\right)\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_i^\alpha F_j^\beta h\left(\bar{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\beta\right) \circ f \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_i^\alpha F_j^\beta h_{\alpha\beta} \circ f.
\end{aligned}$$

Définition 2.3.4.

étant donnée une métrique g sur un fibré vectoriel (E, π, M), on définit la longueur $\|V\|_g$ d'une section $V \in \Gamma(E)$ par

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V, V)}$$

En coordonneés locales, si $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ est une base locale de $\Gamma(E), g_{ij} = g\left(\sigma_i, \sigma_j\right)$ et $V = V^i \sigma_i$ alors,

$$\|V\|_g^2 = g_{ij} V^i V^j$$

Proposition 2.3.1.

Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$. L'application,

$$\sharp : \Gamma\left(E^*\right) \longrightarrow \Gamma(E),$$

définie par,

$$g(\sharp\omega, V) = \omega(V),$$

pour tout $\omega \in \Gamma\left(E^*\right)$ et $V \in \Gamma(E)$, est un isomorphisme $C^\infty(M)$-linéaire.

Lemme 2.3.1.

Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$. Pour tout $x \in M$ la métrique g induit un isomorphisme linéaire entre E_x^* et E_x

$$\sharp_x : E_x^* \longrightarrow E_x,$$

définit par,

$$g_x\left(\sharp_x \omega, v\right) = \omega(v),$$

pour tout $\omega \in E_x^*$ et $v \in E_x$.

Remarque 2.3.1.

Soit $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ une base locale de $\Gamma(E)$ et $\left(\sigma^1, \ldots, \sigma^k\right)$ une base locale du dual $\Gamma\left(E^*\right)$. Si $\omega = \omega_i \sigma^i$ et $g = g_{ij}\sigma^i \otimes \sigma^j$ on a

$$\#\omega = g^{ij}\omega_i \sigma_j$$

ou $\left(g^{ij}\right)$ désigne la matrice inverse de (g_{ij}).

2.3.2 Métrique induite sur le fibré dual

Définition 2.3.5.

Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$. Alors g induit une métrique sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M),

$$g^* : \Gamma\left(E^*\right) \times \Gamma\left(E^*\right) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie par,

$$g^*(\omega, \eta) = g(\sharp\omega, \sharp\eta),$$

pour tout $\omega, \eta \in \Gamma\left(E^*\right)$.

Expression locale de la métrique g^*

Soient $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ une base locale de $\Gamma(E)$ et $\left(\sigma^1, \ldots, \sigma^k\right)$ la base duale locale de $\Gamma\left(E^*\right)$ associée, alors pour $\omega, \sigma \in \Gamma\left(E^*\right)$ tels que $\omega = \omega^i \sigma^i$ et $\eta = \eta^j \sigma^j$ on a

$$\begin{gathered} g^* = \textstyle\sum_{ij} g^{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \\ g^*(\omega, \eta) = \textstyle\sum_{ij} g^{ij} \omega^i \eta^j \end{gathered}$$

avec $\left(g^{ij}\right)$ est la matrice inverse de (g_{ij}),

2.3.3 Métrique induite sur le produit tensoriel

Définition 2.3.6.

Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M), on définit la métrique produit tensoriel

$$g \otimes h : \Gamma(E \otimes F) \times \Gamma(E \otimes F) \longrightarrow C^\infty(M),$$

comme étant l'unique métrique vérifiant,

$$(g \otimes h)(V \otimes A, W \otimes B) = g(V, W)h(A, B)$$

pour tout $V, W \in \Gamma(E)$ et $A, B \in \Gamma(F)$.

Remarque 2.3.2.

Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M), alors

$$g \otimes h \in \Gamma\left(E^* \otimes F^* \otimes E^* \otimes F^*\right) \simeq \Gamma\left(E^* \otimes E^* \otimes F^* \otimes F^*\right).$$

Proposition 2.3.2.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels muni respectivement des connexions ∇^E et ∇^F, et des métriques g_E et $g_F.Si \nabla^E$ (resp. ∇^F) est compatible avec la métrique g_E (resp. g_F), alors la connexion $\nabla^E \otimes \nabla^F$ et la métrique $g_E \otimes g_F$ induites sur le produit tensoriel $E \otimes F$ sont compatibles.

Preuve :

Pour tout $V, W \in \Gamma(E)$ et $A, B \in \Gamma(F)$ on a,

$$\begin{aligned}
X\left(g_E \otimes g_F(V \otimes A, W \otimes B)\right) = & X\left(g_E(V, W) g_F(A, B)\right) \\
= & X\left(g_E(V, W)\right) g_F(A, B) + g_E(V, W) X\left(g_F(A, B)\right) \\
= & \left[g_E\left(\nabla_X^E V, W\right) + g_E\left(V, \nabla_X^E W\right)\right] g_F(A, B) \\
& + g_E(V, W)\left[g_F\left(\nabla_X^F A, B\right) + g_F\left(A, \nabla_X^F B\right)\right] \\
= & g_E \otimes g_F\left(\nabla_X^E V \otimes A, W \otimes B\right) + g_E \otimes g_F\left(V \otimes A, \nabla_X^E W \otimes B\right) \\
& + g_E \otimes g_F\left(V \otimes \nabla_X^F A, W \otimes B\right) + g_E \otimes g_F\left(V \otimes A, W \otimes \nabla_X^F B\right) \\
= & g_E \otimes g_F\left(\nabla_X(V \otimes A), W \otimes B\right) + g_E \otimes g_F\left(V \otimes A, \nabla_X(W \otimes B)\right).
\end{aligned}$$

2.3.4 Métrique induite sur le fibré somme de Whitney

Définition 2.3.7.

Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M), on définit la métrique somme par :
$g \oplus h : (E_x \oplus F_x) \times (E_x \oplus F_x) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\left(u_1, v_1\right), \left(u_2, v_2\right)\right) \mapsto g\left(u_1, u_2\right) + h\left(v_1, v_2\right)$$

on a

$$g \oplus h : \Gamma(E \oplus F) \times \Gamma(E \oplus F) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

$$\left(T_1 \oplus T_2, \sigma_1 \oplus \sigma_2\right) \mapsto g\left(T_1, \sigma_1\right) + h\left(T_2, \sigma_2\right)$$

Proposition 2.3.3.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels muni respectivement des connexions ∇^E et ∇^F, et des métriques g_E et $g_F.Si\nabla^E$ (resp. ∇^F) est compatible avec la métrique g_E (resp. g_F), alors la connexion $\nabla^E \oplus \nabla^F$ et la métrique $g_E \oplus g_F$ induites le fibré somme de Whitney $E \oplus F$ sont compatibles.

2.3.5 Métrique induite sur le fibré inverse

Définition 2.3.8.

Soient M et N deux variétés différentiables, (F, π_N, N) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur N et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. Si h est une métrique sur le fibré vectoriel (F, π_N, N), alors h induit une métrique sur $f^{-1}F$,

$$h_f : \Gamma\left(f^{-1}F\right) \times \Gamma\left(f^{-1}F\right) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie par,

$$h_f(V, W)_x = h_{f(x)}\left(V_x, W_x\right),$$

pour tout $x \in M$ et $V, W \in \Gamma\left(f^{-1}F\right)$.

Norme de Hilbert Schmidt.

Soient g une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M) ; On définit la norme de Hilbert Shmidt $\omega \in \Gamma\left(E^* \otimes F\right)$ $(\omega : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ une forme vectorielle), par

$$|\omega|^2 = \left(g^* \otimes h\right)(\omega, \omega).$$

En coordonnées locales relativement à $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ base de $\Gamma\left(E^*\right)$, $\left(\sigma^1, \ldots, \sigma^k\right)$ base de $\Gamma\left(E^*\right)$, $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ base de $\Gamma(F)$ et $\left(\rho^1, \ldots, \rho^k\right)$ base de $\Gamma\left(F^*\right)$ on a :

$$|\omega|^2 = g^{ij}\omega_i^a\omega_j^b h_{ab}.$$

ou, $\omega = \omega_i^a\sigma^i \otimes \rho_a, g = g_{ij}\sigma^i \otimes \sigma^j$ et $h = h_{ab}\rho^a \otimes \rho^b$.

Exemple 2.3.1.

Si $E = F = TM$ et $\phi : M \longrightarrow M$ de classe C^∞, on a

$$d\phi : TM \longrightarrow TM$$

est une 1-forme vectorielle,définie en coordonnées locales par

$$d\phi = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx^j \otimes \partial_i.$$

et de norme

$$\begin{aligned}
|d\phi|^2 &= (g^* \otimes g) \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} dx^i \otimes \partial_s, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} dx^j \otimes \partial_k \right) \\
&= \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} g^* \left(dx^i, dx^j\right) g \left(\partial_s, \partial_k\right) \\
&= \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} g^{ij} g_{sk}
\end{aligned}$$

2.3.6 Inégalité de Young

Proposition 2.3.4.

Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$ et tout $\epsilon > 0$, on a l'inégalité de Young :

$$2|\langle X, Y\rangle| = |g(X, Y)| \leq \frac{1}{\epsilon} \|X\|^2 + \epsilon \|Y\|^2$$

Preuve : Pour $\epsilon > 0$, on a :

$$|X \pm \epsilon Y|^2 = |X|^2 + \epsilon^2 |Y|^2 \pm 2\epsilon \langle X, Y\rangle \geq 0$$

d' ou la formule (2.12).

2.3.7 Inégalité de Kato

Proposition 2.3.5. (version 1)

Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteurs $\xi \in \Gamma(TM)$, on a
l'inégalité de Kato :
ou $|\nabla \xi|^2 =< \nabla \xi, \nabla \xi >= \sum_i g\left(\nabla_{e_i} \xi, \nabla_{e_i} \xi\right)$ relativement à une base orthonormée $(e_i)_i$.

Preuve :

On a :

$$
\begin{aligned}
\left|d|\xi|^2\right| &= 2|\xi||d|\xi|| \\
d|\xi|^2 &= \sum_i e_i\left(|\xi|^2\right)e_i^* \\
\left|d|\xi|^2\right|^2 &= \sum_i \left|e_i\left(|\xi|^2\right)\right|^2 \\
&= \sum_i |e_i(g(\xi,\xi))|^2 \\
&= \sum_i |2g\left(\nabla_{e_i}\xi,\xi\right)|^2 \\
&\leq 4\sum_i \left|\nabla_{e_i}\xi\right|^2|\xi|^2 \qquad \text{(inégalité de Schwarz)} \\
&\leq 4|\xi|^2\sum_i g\left(\nabla_{e_i}\xi,\nabla_{e_i}\xi\right) \\
&\leq 4|\xi|^2|\nabla\xi|^2
\end{aligned}
$$

Proposition 2.3.6. (version 2)

Soient (M^m, g) et (N^n, h) des variétés Riemanniennes. Si $\varphi : M \to N$ est une appication de classe C^∞, alors on a l'inégalité de Kato :

$$|\mathrm{grad}_M|\, d\varphi|| = |d|d\varphi|| \leq |\nabla\varphi|$$

ou $|\nabla d\varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^m h\left(\nabla d\varphi\left(e_i,e_j\right),\nabla d\varphi\left(e_i,e_j\right)\right)$ et $|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^m h\left(d\varphi\left(e_i\right),d\varphi\left(e_i\right)\right)$, relativement *à* une base orthonormée $\{e_i\}_i$.

Preuve

Soit $x \in M$ et $\{e_i\}_i$ une base orthonormée telle que $\left(\nabla_{e_i}e_j\right)_x = 0, \quad 1 \leq i,j \leq m$, On a :

$$
\begin{aligned}
|df| &= |\mathrm{grad}_M\, f| = |\sharp df| \quad (\forall f \in C^{\infty}(M) \quad () \text{ voir la Définition 1.4.1)} \\
|d|d\varphi|^2\ | &= 2|d\varphi||dd\varphi|\ | \\
d|d\varphi|^2 &= \sum_i e_i\left(|d\varphi|^2\right) e_i^* \\
|d|d\varphi|^2\Big|^2 &= \sum_i \left|e_i\left(|d\varphi|^2\right)\right|^2 \\
&= \sum_i |\ e_i \left(\sum_j h\left(d\varphi\left(e_j, d\varphi\left(e_j\right)\right)|^2\right)\right) \\
&= \sum_i |\ 2 \left(\sum_j h\left(\nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right), d\varphi\left(e_j\right)\right)\Bigg|^2\right) \\
&\leq 4 \sum_i \left(\sum_j h\left(\nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right), \nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right)\right) h\left(d\varphi\left(e_j\right), d\varphi\left(e_j\right)\right)\right)^2 \quad \text{(inégalité de Schwarz)} \\
&\leq 4 \sum_i \left(\sum_j h\left(\nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right), \nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right)\right)\right)^2 \text{Big} \left(\sum_j h\left(d\varphi\left(e_j\right), d\varphi\left(e_j\right)\right)\right)^2 \\
&\leq 4 \left(\sum_i \sum_j h\left(\nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right), \nabla_{e_i} d\varphi\left(e_j\right)\right)\right)^2 \text{Big} \left(\sum_j h\left(d\varphi\left(e_j\right), d\varphi\left(e_j\right)\right)\right)^2 \\
&\leq 4|\nabla d\varphi|^2 |d\varphi|^2
\end{aligned}
$$

Proposition 1.1.1

Si M et N sont deux variétés de classe C^{∞}, alors : les projections canoniques $\pi : M \times N \to M$ et $\sigma : M \times N \to N$ sont de classe C^{∞}.

Bibliographie

[1] O'Neil,Semi-Riemannian Geometry, AcadimicPress, INC, New York, 1983.,

[2] A.Mohamed Cherif,Géometrie Semi-Riemannienne, Notes de cours de Master 2, Université de Mascara,(2016)

[3] T.Masson.,*Géométrie différentielle*, groupes et algèbre de lie,fibré et connexions,Université Paris XI ,2001.

[4] F.Paulin,Géometrie différentielle élémentaire ,Notes cours de master 1 ,ENS ULM , 2006-2007.

[5] M.DJAA ,Introduction a la géométrie riemannienne, Cours de Master 1 ,Université de Relizane.

[6] Notes de cours de Master 2 , Université de Mascara (2017).

[7] Tsukada,K :eigenvalues of the Laplacian on Calabi-Eckmann manifolds,J.Math.
Soc.Japan 33,673.691(1981).

[8] T. Masson ,Géométrié différentielle , groupes et algèbre de Lie , fibrés et connexions ,Université Paris XI , 2001 .

[9] Yano,K.,M STRUCTURES ON MANIFOLDS ,Séries in Pure Mathematics- Volume3,World Scientific,1984.

[10] G.Beldjilali,structures presque complexe, Notes de cours de Master 1 ,Université de Mascara,(2016).