



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Centre universitaire Salhi Ahmed -Naâma
Institut des Sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour obtenir le diplôme de
Master en Mathématiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Thème

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES

Présenté par :

AFRA Zineb

Soutenu le : 7 Juillet 2019

Devant le jury composé de :

Dr BELABED Zakaria	maître de conférences A	C-Univ Naâma	Président
Dr BELGUERNA Abderrahmane	maître de conférences A	C-Univ Naâma	Encadreur
Mme Khalaouti Hafida	maître assistant A	C-Univ Naâma	Examinatrice

Année universitaire 2018/2019

Remerciement

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur ***Belguerna Abderrahmane***, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodigué tout au long de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Mes vifs remerciements s'adressent aux membres du jury :

Mr. Belabed Zakaria et ***Mme Khalaouti Hafida***. Nous exprimons nos respectueux dévouements aux membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de jurer la commission d'examen de notre travail. J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur ***Belabed Zakaria*** pour ses conseils et son aide.

A tous nos enseignants qui nous ont transmis le meilleur de leur savoir et en particulier ***Mr. Mekki Slimane*** pour son aide, ses conseils et ses assistance pendant la période de l'étude .

Je remercie les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et surtout mes parents et ma famille et tout mes collègues, en particulier : ***Soufiane*** et ***Maamar, Sahli Ilham***.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Celle qu'est la seule chose qui me compte dans ce monde qu'elle veille toute sa vie pour nous et grâce à elle j'ai réalisé mes rêves, celle qui m'a poussé vers le chemin du savoir, celle qui représente pour moi l'exemple du sacrifice, du dévouement et de l'honnêteté. **MA MÈRE** : La prunelle de mes yeux.

Celui qui m'a été une épaule sur laquelle je suis toujours appuyé durant toutes ces années de mes études pour arriver à un niveau pareil.

MON PÈRE : Le plus chère à mon cœur.

Mes chères princesses sœurs : **Amina, Keltoum , faiza et Ilham** .

Mes chers frères : **Abdel basset et Abdellah , Faiçal.**

À mon âme frère : **abdel ali.**

Qui aucun mot ne pourra exprimer comment je les aime.

La lumière de notre maison : **Mohamed ouwais , Assil jourri et Yasmin**

Botaina

Ma belle cousine : **Asma Afra**

Mes chères amis, surtout :

Ilham ,jihad, siham, jihan.

À tous mes collègues et pour chacun de ceux mentionnés mon cœur et oublié ma

plume

Résumé

A l'origine de ce travail, on va présenter la résolution numérique des équations aux dérivées partielles elliptiques par trois familles des méthodes numériques : les différences finies, les volumes finis et les éléments finis. Dans le deuxième chapitre on va présenter les étapes de ces méthodes et Le dernier chapitre sera réservé à une application numérique de l'équation de Laplace avec la méthode des différences finies et on va programmer cette méthode sous MatLab.

Mots clés : EDP, solution numérique, schéma numérique, problème discret.

Abstract

At the origin of this work, we will present the numerical solution of the equations to elliptical partial derivatives by three families of numerical methods : the finite differences, finite volumes and finite elements. In the second chapter we will present the steps of these methods and the last chapter will be reserved for a numerical application of the Laplace equation with the finite difference method and we're going to program this method in MatLab.

Keywords : EDP, numerical solutions, numerical scheme, discrete problem.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	8
1 Généralités	10
1.1 Définitions	10
1.1.1 Notation	10
1.1.2 Définition des EDPs	11
1.1.3 EDP du premier ordre	11
1.1.4 EDP du second ordre	12
1.1.5 Conditions aux limites	12
1.1.6 Classification des EDP du second ordre	12
1.2 Solution exacte :Séparation des variables	13
2 Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique	19
2.1 La méthode des Différences Finies	19
2.1.1 Différences Finies en 1D	20
2.1.2 Justification des calculs : consistance, stabilité et convergence	25
2.1.3 Différences Finies en 2D	30

2.1.4	Avantages et inconvénients des différences finies	32
2.2	La méthode des éléments finis	32
2.2.1	Éléments Finis en 1D	32
2.2.2	Éléments Finis en 2D	37
2.2.3	Avantages et inconvénients des éléments finis	40
2.3	La méthode des Volumes Finis	40
2.3.1	Volumes Finis en 1D	41
2.3.2	Volumes Finis en 2D	45
2.3.3	Analyse mathématiques du schéma des volumes finis	50
2.3.4	Avantages et inconvénients des volumes finis	54
3	Application numérique	55
	Conclusion et perspectives	59
	Bibliographie	61

TABLE DES FIGURES

2.1	Cellules admissibles d'un maillage "Volumes Finis"	47
2.2	Condition d'admissibilité du maillage pour les cellules du bord . . .	47
3.1	solution de l'équation de laplace d'ordre 2	58

Notation et abréviation

Les notations et les abréviations suivantes sont utilisées :

► $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

► $\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

► $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$

► $L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω

► H : l'espace de Hilbert

► $H^1 = \{u : u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}$

► $H_0^1 = \{v/v \in H^1, v|_{\partial\Omega} = 0\}$

INTRODUCTION

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques ou économiques sont modélisées à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et le développement de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces équations aux dérivées partielles.

Bien plus, dans de nombreux domaines de pointe (industrie aéronautique, industrie pétrolière, industrie nucléaire, problèmes de la fusion contrôlée, prévision météorologique, etc.), le progrès technique nécessite de résoudre numériquement des systèmes d'équations aux dérivées partielles parfois très compliqués afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions. Avec les progrès toujours aussi foudroyants des performances des ordinateurs, la simulation numérique des phénomènes devient plus souple, plus facile à réaliser, et surtout plus économique, que la simulation expérimentale et tend de plus en plus à s'y substituer.

Les notions d'infini et de continu sont couramment utilisées. La solution exacte d'un problème d'équations aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. En vue du pas-

sage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes :

- (1) la méthode de différences finies.
- (2) la méthode de volumes finies.
- (3) la méthode d'élément finies.
- (4) la méthode des caractéristiques.

Ce travail a pour objet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques par trois familles de méthodes numériques : les différences finies, les volumes finis et les éléments finis.

Dans le premier chapitre, va nous amener des généralités et des définitions sur les EDP, pour en savoir plus de quoi s'agit il. Et on présente la solution analytique des EDPs elliptiques par la méthode de séparation des variables.

L'objet du deuxième chapitre sera la présentation des méthodes numériques de résolution des EDP elliptiques :

- ▶ Différences Finies c'est la méthode la plus simple, elle est fondée sur le développement de Taylor.
- ▶ Éléments Finis qui s'appuie sur une formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles.
- ▶ Volumes Finis qui se base sur l'intégration de l'équation sur chaque volume après bien sure découpage du domaine de travail.

Le dernier chapitre sera réservé à une application numérique de l'équation de Laplace avec la méthode des différences Finies et on va programmer cette méthode sous MatLab.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion sur ce qu'on a fait durant ce mémoire.

CHAPITRE

1

GÉNÉRALITÉS

Les EDPs sont un sujet de recherche actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts de math, comme par exemple, transformée de Fourier et la théorie des distributions.

1.1 Définitions

1.1.1 Notation

* **Dérivées partielles du premier ordre :**

On utilisera les notations suivantes pour la dérivée partielle de u en x :

on a $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on note :

$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$, $\partial_{x_i} u(x)$ ou $\partial_i u(x)$ avec $u \in C^1(\Omega)$

* **Dérivées partielles d'ordre supérieur :**

soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^N$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

1.1.2 Définition des EDPs

Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes (x, y, \dots ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F \left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots \right) = 0 \quad (1.1)$$

où F est une fonction de plusieurs variables. L'équation (1.1) est considérée dans un domaine Ω de \mathbb{R}^{n+1} . Les solutions de l'équation aux dérivées partielles (1.1) sont les fonctions qui vérifient cette équation dans Ω [1].

1.1.3 EDP du premier ordre

Définition 1.1.1. Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes x_1, \dots, x_n et des dérivées partielles du 1^{er} ordre de f par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (1.2)$$

est dite une équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre.

Exemples :

Equation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

1.1.4 EDP du second ordre

Définition 1.1.2. Soit f une fonction de deux variables x et y . On appelle équation aux dérivées partielles du second ordre, une relation de la forme

$$F \left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.4)$$

faisant intervenir f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 [2].

Exemples :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1.1.5 Conditions aux limites

Définition 1.1.3. En mathématiques, une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

1.1.6 Classification des EDP du second ordre

on considère l'équation linéaire d'ordre 2 suivante :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1.5)$$

et A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions de x et de y qui ne s'annulent pas simultanément. Nous supposons aussi que u, A, B, C, D, E, F et G ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre $m = 2$ continues sur un domaine Ω du plan x,y.

L'équation (1.5) est dite hyperbolique si

$$(B(x_0, y_0))^2 - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) > 0$$

parabolique si

$$(B(x_0, y_0))^2 - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) = 0$$

elliptique si

$$(B(x_0, y_0))^2 - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) < 0$$

Exemple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } c > 0$$

$B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique .

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } d > 0$$

$B^2 - 4AC = 0$ Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$B^2 - 4AC = -4 < 0$ Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

1.2 Solution exacte :Séparation des variables

Actuellement, la résolution numérique d'écoulements turbulents nécessite des maillages très fins et des temps de calculs très longs. Afin de réduire ces temps, on

se propose d'utiliser la méthode de séparation de variables permettant de passer de la résolution d'un problème de très grande taille à la résolution de plusieurs systèmes de petites tailles. Cette méthode consiste à chercher la solution sous la forme d'une somme de produits de fonctions de chaque variable d'espace pour les composantes de vitesse ou de pression.[3]

Résolution des problèmes elliptiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ 0 < x < L \\ 0 < y < L \\ u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0 \\ u(x, L) = u_0 \end{array} \right.$$

On cherche une solution particulière satisfaisant aux conditions aux frontières sous forme :

$$u(x, y) = X(x).Y(y)$$

alors

$$X''(x).Y(y) + X(x).Y''(y) = 0$$

D'où

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2(\text{ou } \lambda^2)$$

λ^2 appelée constante de séparation des variables.

Remarque 1.2.1. Si on choisit $+\lambda^2$, la solution obtenue ne satisfera pas les conditions aux limites pour les valeurs réelles λ .

On obtient les équations différentielles séparées :

L'équation (1) :

$$X'' + \lambda^2 X = 0, X(0) = X(L) = 0.$$

L'équation (2) :

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0, Y(0) = 0.$$

La solution générale de l'équation (1) s'écrit sous la forme :

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

avec A_1 et B_1 sont des constantes.

Et pour l'équation (2), la solution générale :

$$Y = A_2 \cosh(\lambda y) + B_2 \sinh(\lambda y)$$

(A_2, B_2 des constantes.)

On a

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X(x).Y(y) \\ &= [A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)] \times [A_2 \cosh(\lambda y) + B_2 \sinh(\lambda y)] \end{aligned}$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0 \text{ d'où } A_1 = 0 \text{ et } A_2 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x, y) &= B_1 B_2 \sin(\lambda x) \sinh(\lambda y) \\ &= A \sin(\lambda x) \sinh(\lambda y) \end{aligned}$$

$$u(L, y) = 0 \Rightarrow A \sin(\lambda L) \sinh(\lambda y) = 0.$$

Donc on obtient les caractéristiques λ_n appelées le plus souvent les valeurs propres du problème :

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, \dots \text{ pour } \sin(\lambda L) = 0$$

$\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$, on pose $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$.

A chaque valeur propre correspond une valeur de la solution particulière (appelée fonction propre).

Donc :

$$u_n(x, y) = A_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y), n = 1, 2, \dots \infty$$

Pour la condition $u(x, L) = u_0$:

$$u(x, L) = u_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n L) = u_0$$

Les coefficients A_n sont les coefficients de Fourier, alors par définition

$$A_n = \frac{2u_0(1 - \cos(\lambda_n L))}{\lambda_n L \sinh(\lambda_n L)}$$

Alors

$$u(x, y) = \frac{2u_0}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\lambda_n L))}{\lambda_n \sinh(\lambda_n L)} \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y)$$

Qui est la solution du problème.

Exemple :

Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de séparation des variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(x, 1) = 0 \end{array} \right.$$

On pose :

$$u(x, y) = X(x).Y(y)$$

Donc

$$X'' + \lambda^2 X = 0.$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

$$u(x, 1) = 0 \Rightarrow X(x).Y(1) = 0 \Rightarrow Y(1) = 0$$

$$u(0, y) = 0 \Rightarrow X(0).Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(1, y) = 0 \Rightarrow X(1).Y(y) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

Les valeurs propres et les fonctions propres orthogonales pour X(x) sont solution générale :

$$X = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow B_1 \sin(\lambda) = 0, B_1 \neq 0 \text{ d'où } \sin(\lambda) = \sin(n\pi) \text{ donc } \lambda_n = n\pi.$$

D'où les fonctions propres :

$$X(x) = B_1 \sin(n\pi x)$$

La solution générale pour Y(y) est

$$Y(y) = A_2 \cosh(\lambda y) + B_2 \sinh(\lambda y)$$

$$Y(1) = 0 \Rightarrow A_2 \cosh(\lambda) + B_2 \sinh(\lambda) = 0 \text{ donc } A_2 = 0$$

(puisque $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \cosh \lambda > 0$), $B_2 \neq 0$ et $\lambda \neq 0$ sinon $u \equiv 0$

(puisque $\sinh \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$)).

Et $Y(y) = B_2 \sinh(\lambda(1 - y))$ (puisque $(Y(1)=0$ et $B_2, \lambda \neq 0$)).

$$\text{Alors } u(x, y) = X(x).Y(y) = [B_1 \sin(n\pi x)].[B_2 \sinh(\lambda(1 - y))]$$

$$\text{d'où } u_n(x, y) = A_n \sin(n\pi x) \sinh(\lambda_n(1 - y))$$

Alors

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi(1 - y))$$

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi) = f(x)$$

d'où

$$A_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

. Donc la solution :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \right] \sin(n\pi x) \sinh(n\pi(1 - y))$$

CHAPITRE

2

MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE EDP ELLIPTIQUE

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

2.1 La méthode des Différences Finies

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Rappel

Théorème 1. *Supposons que f soit de classe C^n sur un intervalle ouvert I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\epsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}}{k!}f^{(k)}(x_0) + h^n\epsilon(h) \end{aligned}$$

Définition 2.1.1. *Soient $u = u(x, y)$ et une EDP dans Ω domaine (ouvert connexe). Trois types de conditions aux frontières existent :*

- 1 *On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Dirichlet.*
- 2 *On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n} = (\overrightarrow{\text{gradu}}) \cdot \overrightarrow{n}$. C'est la condition de Neumann.*
- 3 *On impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy.*

Définition 2.1.2. Problème bien posé :

Soit une EDP valide dans Ω munie de conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :

- 1 *il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions frontières (existence).*
- 2 *la solution doit être unique (unicité).*
- 3 *la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).[4]*

2.1.1 Différences Finies en 1D

[5]on prend le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

On va étudier la résolution numérique de l'e.d.p (2.1). En supposant la solution u régulière (autrement dit $u \in C^2(0, 1)$). On admettra que le problème est bien posé.

Remarque 2.1.1. *Pour que la solution u de (2.1) soit régulière, il est nécessaire que f soit continue. Dans ce cas, il est alors assez simple de déterminer u . L'intérêt de développer une méthode numérique pour résoudre l'équation (2.1) réside dans le fait que cette méthode s'adapte ensuite à tout problème elliptique et s'écrit simplement dans le cas de l'équation (2.1) .*

les étapes de la méthode :

On décrit la méthode en trois parties :

- * choix du maillage
- * choix du schéma numérique
- * détermination du problème discret

1ère étape : Choix de la discrétisation, maillage.

On considère une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

de l'intervalle $[0, 1]$, où $N \in \mathbb{N}$. Pour $i = 0, \dots, N$, on pose $h_i := x_{i+1} - x_i$. Le pas du maillage est défini par

$$h := \max_{i=1, \dots, N} h_i$$

Pour simplifier, on se limitera à un pas constant :

$$h = h_i, \forall i = 0, \dots, N$$

On a alors $x_{i+1} = x_i + h$ pour tout $i = 0, \dots, N$. La première étape de discrétisation consiste à remplacer le problème (2.1) par

$$\begin{cases} -u''(x_i) &= f(x_i), \forall i = 1, \dots, N \\ u(x_0) &= u(x_{N+1}) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

2ème étape : Construction d'un schéma numérique

On suppose $u \in C^2(0, 1)$. Alors u admet un développement limité sous la forme

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \Theta(h^3)$$

et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \Theta(h^3)$$

où $|\Theta(h^3)| \leq ch^3$ où c est une constante indépendante de h . En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'expression suivante pour $u''(x_i)$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \Theta(h) \quad (2.3)$$

Donc $\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$ est une approximation de $u''(x_i)$

Avec ce choix d'approximation, on peut approcher le problème (2.2) par le problème discret suivant :

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \forall i = 1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Remarque 2.1.2. *Ce choix d'approximation n'est pas unique, il est celui qui détermine le schéma numérique considéré. Dans notre cas le schéma sera dit centré car il fait intervenir $i-1$ et $i+1$, d'où une symétrie par rapport à l'indice i .*

QUELQUES SCHÉMAS

différences finies centré, ordre 2

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

différences finies centré, ordre 4

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u''_i$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u'''_i$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

3ème étape : Passage au problème matriciel.

On va écrire (2.4) sous forme d'un système matriciel. On pose $U_h = (u_1, \dots, u_N)^T$. Il faut tout d'abord prendre en compte les conditions aux limites

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

. Pour $i=1$, puisque $u_0 = 0$, le problème se simplifie

$$-\frac{u_2 - 2u_1}{h^2} = f(x_1)$$

De même, pour $i=N$, on a

$$-\frac{2u_N + u_{N+1}}{h^2} = f(x_N)$$

Ainsi, (2.4) s'écrit

$$-\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Autrement dit, le vecteur U_h est solution du système matriciel

$$A_h U_h = b_h \tag{2.5}$$

où $A_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $b_h \in \mathbb{R}^N$ sont donnés par

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Bilan 1. Ainsi, on a la méthode suivante pour obtenir une approximation numérique de la solution u de (2.1) :

- 1 On choisit un pas de maillage $h > 0$ petit (détermine la subdivision $(x_i)_{i=0, \dots, N+1}$).
- 2 On détermine une approximation de $u''(x_i)$ par les développements de Taylor

- 3 On en déduit un système matriciel $A_h U_h = b_h$ dont la solution $U_h = (u_1, \dots, u_N)^T$ approche le vecteur $(u(x_1), \dots, u(x_N))^T$
- 4 On résout le système $A_h U_h = b_h$

Il reste certains points à vérifier :

- 1 que le système matriciel $A_h U_h = b_h$ admet une solution unique,
- 2 que U_h est continue par rapport aux données b_h .
- 3 que, pour $h \rightarrow 0$, le vecteur U_h solution de $A_h U_h = b_h$ converge bien vers $(u(x_1), \dots, u(x_N))^T$

Remarque 2.1.3. *Les deux premiers points forment une version discrète de la notion de problème bien posé d'Hadamard. Le premier point est logique du fait que l'on cherche à déterminer U_h , d'où la nécessité d'existence. L'unicité est utile pour obtenir le U_h cherché (et non une autre solution). Le deuxième point est particulièrement important car en pratique le vecteur b_h est obtenu en calculant des valeurs approchées des $f(x_i)$, ainsi on commet une légère erreur sur b_h . La continuité de U_h par rapport à b_h permet de s'assurer que la légère erreur commise sur b_h n'entraîne qu'une légère erreur sur U_h*

2.1.2 Justification des calculs : consistance, stabilité et convergence

Pour justifier l'approche formelle de la section précédente, on introduit trois notions que l'on définira rigoureusement plus loin :

- 1 Consistance, signifie que le système matriciel $A_h U_h = b_h$ est une approximation de l'e.d.p (2.1).
- 2 Stabilité, signifie que la solution U_h est continue par rapport aux données b_h
- 3 Convergence, signifie que U_h converge (dans un sens à préciser) lorsque $h \rightarrow 0$ vers la solution u de (2.1).

Proposition 2.1.1. (*Principe du maximum discret*). Soit $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Si $U \in \mathbb{R}^N$ vérifie $A_h U = b$, alors $U_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$

Démonstration 2.1.1. Soit k le plus petit entier tel que :

$$U_k = \max_{i=1, \dots, N} U_i$$

On suppose $U_k < 0$. Trois cas sont possibles : $k = 1$, $1 < k < N$ et $k = N$.

Pour $k = 1$, $(A_h U)_1 = b_1 = 0$ entraîne

$$-\frac{U_2 - 2U_1}{h^2} \geq 0$$

d'où

$$U_2 \leq 2U_1$$

Or $U_1 = \min U_i = U_2$ donc $2U_1 = U_2 + U_1 < U_2$ car $U_1 < 0$.

Finalement $U_2 < U_2$: impossible. Pour $k = N$ on procède de la même manière.

Pour $1 < k < N$, $(AU)_k = b_k = 0$ entraîne

$$-\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} \geq 0$$

d'où

$$(U_{k+1} - U_k) + (U_{k-1} - U_k) \leq 0$$

Or $U_{k+1} - U_k \geq 0$ et $U_{k-1} - U_k \geq 0$ donc $((U_{k+1} - U_k) + (U_{k-1} - U_k)) = 0$. Alors $U_k = U_{k-1} = U_{k+1}$, en réitérant le même raisonnement sur $k-1$ on aboutit au cas $k = 1$ vu précédemment. L'hypothèse $U_k < 0$ est donc fautive, d'où $U_k = 0$.

Alors $0 = U_k = U_i$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

On peut maintenant montrer le résultat suivant :

Proposition 2.1.2. Le système matriciel $A_h U_h = b_h$ admet une unique solution.

Remarque 2.1.4. Le principe du maximum discret est l'ingrédient clé pour la démonstration de la Proposition 2.1.2. C'est une méthode classique pour les schémas numériques des e.d.p. elliptiques de démontrer un principe du maximum discret et d'en déduire l'existence et unicité du problème discret.

Démonstration 2.1.2. *Supposons que le système $A_h U_h = b_h$ admet deux solutions U et V . Alors $W := U - V$ est solution de $A_h W = 0$ donc $A_h W \geq 0$ et $A_h W \leq 0$. Par le principe du maximum discret, on en déduit $W \geq 0$ et $W \leq 0$ d'où $W = 0$ donc $U = V$. En particulier on en déduit que l'application linéaire associée à la matrice A_h est injective or, en dimension finie, toute application linéaire injective est bijective donc la matrice A_h est inversible et le système $A_h U_h = b_h$ admet une unique solution.*

La consistance

c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.

Définition 2.1.3. (*Erreur de consistance*) *On appelle erreur de consistance R d'un schéma numérique la quantité obtenue en remplaçant, dans le schéma numérique, l'inconnue par la solution exacte u . En particulier, pour le schéma $A_h U_h = b_h$, on a $R = A_h U - b_h$ où $U = (u(x_1), \dots, u(x_N))^T$.*

Dans le cadre du schéma numérique $A_h U_h = b_h$, l'erreur de consistance r_i au point x_i (ième coordonnée de \mathbb{R}) est donnée par

$$r_i = -\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) - f(x_i). \quad (2.6)$$

Définition 2.1.4. (*Ordre d'un schéma*) *On dit qu'un schéma numérique à N points de discrétisation est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ indépendante de la solution exacte telle que l'erreur de consistance vérifie*

$$\max_{i=1, \dots, N} |r_i| \leq Ch^p.$$

De plus, on dit que le schéma est consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i=1, \dots, N} |r_i| = 0$$

Dans le cadre du schéma $A_h U_h = b_h$, on a :

Lemme 1. *Si la solution exacte u de (2.1) vérifie $u \in C^4(0,1)$ alors le schéma $A_h U_h = b_h$ est consistant d'ordre 2. Précisément, on a*

$$|r_i| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Démonstration 2.1.3. *Puisque $u \in C^4(0,1)$ on a le développement de Taylor à l'ordre 4 :*

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i)$$

où $\xi_i \in [0,1]$. Le dernier terme $\frac{h^4}{24}u^{(4)}\xi_i$ est le reste de la formule de Taylor. De même, on a

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\nu_i)$$

où $\nu_i \in [0,1]$. On en déduit

$$\begin{aligned} r_i &= -\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) - f(x_i) \\ &= -\frac{1}{h^2}(h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\nu_i)) - f(x_i) \\ &= -u''(x_i) - f(x_i) + \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\nu_i)) \end{aligned}$$

Or, comme u est la solution exacte de (2.1) on a $-u''(x_i) = f(x_i)$ donc

$$r_i = \frac{h^2}{24}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\nu_i))$$

On en déduit le résultat du (2.7) (lemme1).

Remarque 2.1.5. *On peut remarquer que si, de plus, u vérifie $u^{(4)} = 0$ alors $r_i = 0$ donc $u_i = u(x_i)$*

Stabilité

Définition 2.1.5. *Un schéma numérique est dit stable pour la norme $\|\cdot\|$ si sa solution (quand elle existe) est continue pour la norme $\|\cdot\|$ par rapport aux données. En particulier, pour le schéma $A_h U_h = b_h$, cela signifie qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et b_h telle que $\|U_h\| = C \|b_h\|$*

La convergence

Définition 2.1.6. *Pour un schéma numérique $A_h U_h = b_h$ de l'équation (2.1), on appelle erreur de discrétisation (ou de convergence) le vecteur $e \in \mathbb{R}^N$ dont les coefficients sont*

$$e_i := u(x_i) - u_i, \forall i = 1, \dots, N.$$

où u est la solution exacte de (2.1). De plus, on dit que le schéma numérique converge en norme $\|\cdot\|$ si l'erreur de discrétisation tend vers 0 en norme $\|\cdot\|$ lorsque le pas h tend vers 0

Théorème 2. *Soit u la solution exacte de (2.1) et U_h la solution du schéma numérique $A_h U_h = b_h$. On suppose $u \in C^4([0, 1])$. Alors, l'erreur de discrétisation vérifie*

$$\|e\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty$$

Donc le schéma numérique $A_h U_h = b_h$ converge en norme $\|\cdot\|_\infty$ et est d'ordre 2

Remarque 2.1.6. 1 *La stratégie employée est classique : on étudie la consistance puis la stabilité du schéma et cela permet d'en déduire la convergence*

2 *L'ordre de convergence du schéma est important pour comparer différents schémas. Le pas h étant petit (donc inférieur à 1), la quantité h^p est d'autant plus petite que p est grand. Ainsi l'ordre de convergence d'un schéma détermine sa vitesse de convergence*

3 *La constante de stabilité permet de déterminer l'erreur commise en approchant le second membre*

2.1.3 Différences Finies en 2D

Le principe est exactement le même que celui de la dimension 1, la seule différence réside dans l'écriture.

On cherche à résoudre numériquement le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \text{ dans } \Omega =]0, 1[^2 \\ u = 0 & , \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

où $u = u(x, y)$, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ et $\partial\Omega$ est le bord de Ω .

On commence par définir un maillage de Ω . On pose

$$x_i := ih \text{ et } y_j := jh$$

où $0 \leq i, j \leq N + 1$, $h := 1/(N + 1)$ et $N \in \mathbb{N}$

On va déterminer $u_{i,j}$ qui approche $u(x_i, y_j)$. Par le développement de Taylor, on a

$$\partial_x^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \Theta(h^3),$$

et

$$\partial_y^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h^2} + \Theta(h^3),$$

Un schéma numérique possible est alors de considérer l'approximation suivante de $\Delta u(x_i, y_j)$

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

Avec cette notation, le problème discrétisé est : trouver $u_{i,j}$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{i,j} = f(x_i, y_j) & , \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 & , \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour écrire (2.9) sous forme matricielle, on pose

$$U_h = (u_{11}, \dots, u_{1N}, u_{21}, \dots, u_{2N}, \dots, u_{NN})^T$$

Alors le problème (2.9) s'écrit

$$A_h U_h = b_h,$$

où $A_h \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ et $b_h \in \mathbb{R}^{N^2}$ sont donnés par

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \dots & \dots & C & B \end{pmatrix}$$

et

$$b_h = (f(x_1, y_1), \dots, f(x_1, y_N), f(x_2, y_1), \dots, f(x_N, y_N))^T$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ et } C \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

Tout les résultats de consistance, stabilité et convergence du cas de la dimension 1 est le même

Exemple 2.1.1. Soit à résoudre l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ dans le domaine } (x, y) \in [0, 20] \times [0, 10] \\ u(x, 0) = u(x, 10) = u(0, y) = 0 \text{ et } u(20, y) = 100 \\ h_x = h_y = h \in \{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125\} \end{cases}$$

où $h = 5$. On a : $h_x = \frac{b-a}{n_x} \Rightarrow n_x = \frac{b-a}{h_x} = \frac{20-0}{5} = 4$ et $n_y = \frac{d-c}{h_y} = \frac{10-0}{5} = 2$. La grille maillée contient alors $(n_x + 1)(n_y + 1)$ mailles vu que nous avons à

rajouter les points où $x_i = 0$ et ceux où $y_j = 0$ c'est à dire les points intersection de la courbe avec les axes. Mais comme les conditions aux limites nous donnent les images sur les bords, alors les points inconnus restent seulement ceux de l'intérieur du cadrillage. Ce qui fait donc que le nombre d'inconnues est alors

$$(n_x - 1)(n_y - 1) = 3 \times 1 = 3.$$

Nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} + 0u_{3,1} = 0 \\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{3,1} = 0 \\ 0u_{1,1} + u_{2,1} - 4u_{3,1} = -100 \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système matriciel : $A \times U = B$ Avec :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix}$$

nous obtenons la solution :

$$U = \begin{pmatrix} 1.786 \\ 7.143 \\ 26.786 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Avantages et inconvénients des différences finies

Avantages	Inconvénients
grande simplicité d'écriture	limitation à des géométries simples
faible coût de calcul	Conditions de type Neumann difficiles à gérer
Elle est couramment pratiquée et facile d'accès	

2.2 La méthode des éléments finis

2.2.1 Éléments Finis en 1D

Soit le problème avec condition de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f, & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

où $f \in L^2(0, 1)$ La première étape de discrétisation consiste à choisir un maillage de $[0, 1]$: soit $(x_j)_{j=0, \dots, N+1}$ une subdivision de $[0, 1]$ telle que

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

après multiplication par $v \in H_0^1$, on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (2.11)$$

En intégrant par parties :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1 \quad (2.12)$$

d'où une nouvelle formulation du problème (2.10), dite formulation variationnelle, qui s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver} & u \in H_0^1(0, 1) \quad , \text{ telle que :} \\ (u', v') = (f, v) \end{cases}$$

Une solution de cette forme variationnelle s'appelle solution faible du problème de départ. On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Soit \tilde{V} un sous-espace vectoriel de H_0^1 de dimension N finie. Soient $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de H_0^1 . Ces fonctions constituent une base du sous-espace \tilde{V} .

Ainsi, toute fonction \tilde{u} de \tilde{V} peut se décomposer selon :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{u} \in \tilde{V}$ telle que :

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x) \tilde{v}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

C'est-à-dire chercher N réels u_1, u_2, \dots, u_N vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x) \tilde{v}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \quad \forall \phi_i' \in \tilde{V}$$

Soient A la matrice $N * N$ d'éléments courants a_{ij} et B le vecteur à N composantes b_i définies par :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx \quad \text{et} \quad b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \quad (2.13)$$

Notons U le vecteur des N inconnues u_1, u_2, \dots, u_N .

Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire :

$$AU=B$$

Il reste maintenant à choisir les N fonctions ϕ_i de façon à ce que le système soit simple à résoudre numériquement.

Choix des fonctions ϕ_i : les éléments finis

L'intervalle $]0,1[$ est discrétisé en N points de coordonnées x_i . Les fonctions $\phi_i(x)$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice A est tridiagonale. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré 2 ou plus.

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A , tridiagonale et symétrique. Les trois termes des diagonales sont :

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \\ a_{i,i+1} &= \int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} \\ a_{i-1,i} &= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i-1}(x) dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned}$$

Et calculons les composantes du vecteur B par une méthode des trapèzes (chaque intégrale sur un segment élémentaire sera évaluée comme l'aire du trapèze correspondant), soit :

la méthode des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

d'où

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \simeq f_i \int_0^1 \phi_i(x)dx \\ &= f_i \left[\frac{1}{2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} dx \right) \right] \\ &= f_i \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc, sous forme indicielle :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i.$$

Remarque 2.2.1. *constatons que cette méthode et la méthode des différences finis sont rigoureusement identiques. Ceci n'est plus vérifié quand les composantes du vecteur B ne sont plus évaluées avec une méthode des trapèzes*

Dans le cas où les N points de l'intervalle $]0, 1[$ sont régulièrement espacés avec un pas h .

La discrétisation en Eléments Finis devient :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i \quad i \text{ variant de } 1 \text{ à } N$$

Soit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Bilan : La méthode des Éléments Finis 1D consiste donc à :

- 1 Choisir N points entre 0 et 1 et choisir les fonctions ϕ_i .
- 2 Construire la matrice A
- 3 Déterminer le vecteur B (avec une méthode d'intégration)
- 4 Résoudre le système linéaire $A.U = B$ où U désigne le vecteur des inconnues

2.2.2 Éléments Finis en 2D

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

Remarque 2.2.2. C'est la même démarche que dans le cas des éléments finis 1D

On rappelle la formule de Green

Corollaire.1 soit Ω un ouvert régulier de classe C^1

soient $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$, les deux fonctions à support borné dans $\bar{\Omega}$; alors :

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$$

L'approche de la méthode

soit $u \in H_0^1$ est une solution de problème (2.14).

Alors en multipliant les deux membres de l'équation par une "fonction test" $v \in H_0^1$ et en intégrant sur Ω , on a :

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En utilisant la formule de Green et en tenant compte du fait que $v|_{\partial\Omega} = 0$ on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1 \quad (2.15)$$

La méthode des éléments finis permet alors de résoudre, de manière approchée, le problème (2.15)

On se donne une famille de sous espace $V_h \subset H_0^1$ de dimension finie N_h .

Le paramètre h est destiné à tendre vers 0.

Par le théorème de Lax-Milgram ,le problème :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_h \quad (2.16)$$

admet une unique solution.

comme V_h est de dimension finie, on peut noter $\varphi_1 \dots \varphi_{N_h}$ sa base.

comme $u_h \in V_h$ on peut en déduire qu'il existe $a_1 \dots a_{N_h}$ dans \mathbb{R} tels que :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} a_i \varphi_i$$

Dans la formulation (2.16) il est nécessaire et suffisant de prendre $v_h = \varphi_j$ puisque les $(\varphi_j)_j$ forment une base de V_h .Par linéarité, les éléments $(a_j)_j$ se détermine par résolution de :

$$A_h U_h = f$$

où

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \quad \text{et } f_j = \int_{\Omega} f \varphi_j$$

Exemple 2.2.1. Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$P_i(x) = \sin(i\pi x) \quad i = 1, \dots, n$$

1- *Solution exacte :*

$$u = \frac{-x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

2- *Calcul par les méthodes d'approximation :*

Méthode de Galerkin à un paramètre

On a :

$$Lu + f \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 = 0$$

D'où :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad f = 1$$

$$P_1(x) = \sin(\pi x)$$

$$P_2(x) = \sin(2\pi x)$$

$$LP_1 = -\pi^2 \sin(\pi x)$$

$$LP_2 = -4\pi^2 \sin(2\pi x)$$

Approximation à un paramètre : $\tilde{u} = \alpha_1 P_1$

$$\text{Sachant que } \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$$

$$K_{11} = \int_0^1 P_1 L P_1 dx = -\pi^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$F_1 = - \int_0^1 P_1 f dx = - \int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{2}{\pi}$$

D'où la solution

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{K_{11}} = \frac{4}{\pi^3}$$

$$\tilde{u} = \frac{4}{\pi^3} \sin(\pi x)$$

2.2.3 Avantages et inconvénients des éléments finis

Avantages	Inconvénients
Existence d'une solution fiable	grand coût en temps de calcul et mémoire
Maillage robuste et souple	
traitement possible de géométries complexes	
nombreux résultats théoriques sur la convergence	

2.3 La méthode des Volumes Finis

[6] la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toute fois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation (on parle aussi de formulation faible).

La méthode des volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

★ Maillage du domaine

Soit Ω l'ensemble d'espace associé à l'équation aux dérivées partielles qui nous intéresse. On appelle volumes de contrôle les éléments de la suite $(K_i)_{1 \leq i \leq I}$, cette suite définissant un maillage du domaine Ω , soit vérifiant :

- K_i un ouvert de Ω ;
- $K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$;
- $\cup_{i=1}^I \overline{K_i} = \overline{\Omega}$.

2.3.1 Volumes Finis en 1D

en considérant le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Remarque 2.3.1. *En dimension 1, les volumes de contrôle sont des réunions d'intervalles ouverts.*

MAILLAGE :

On discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en introduisant un maillage τ de l'intervalle $[0, 1]$ défini de la façon suivante :

- ◇ Soient N volumes de contrôle appelés aussi cellules, notés K_i
pour $i = 1, \dots, N$

$$K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$$

tels que

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$$

◇ A chaque cellule K_i on associe un point (centre) $x_i \in K_i$ tel que

$$0 = x_0 = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_{i+1} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1.$$

On introduit alors les pas de discrétisation

$$\begin{aligned} h_i &= |K_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \\ h_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i \\ h &= \max_{1 \leq i \leq N} h_i \end{aligned}$$

Formulation en Volumes Finis :

On considère les approximations u_i de la solution u de (2.17) dans chaque cellule K_i . On a donc N inconnues. Plus précisément, u_i est une approximation de la valeur moyenne de u dans K_i :

$$u_i \simeq \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u(x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x) dx \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N$$

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer sur chaque volume de contrôle l'équation du problème (2.17) :

$$-\int_{K_i} u''(x)dx = \int_{K_i} f(x)dx$$

Ce qui donne

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

où f_i désigne la valeur moyenne de f dans K_i , i.e :

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x)dx$$

La quantité $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ (resp. $-u'(x_{i-\frac{1}{2}})$) représente le flux rentrant qu'on note $F_{i+\frac{1}{2}}$ (resp. flux sortant qu'on note $F_{i-\frac{1}{2}}$) associé à la cellule K_i au point $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ (resp. en $x = x_{i-\frac{1}{2}}$).

Donc on peut écrire (2.18) comme suit :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i$$

On exprimer $F_{i+\frac{1}{2}}$ en fonctions des inconnues u_i (resp. $F_{i-\frac{1}{2}}$). L'approximation la plus naturelle est de prendre la valeur moyenne de $u'(x)$ sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ (resp. $[x_{i-1}, x_i]$, soit :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \simeq -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad -u'(x_{i-\frac{1}{2}}) \simeq -\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

D'où

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad F_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

Ces expressions ne sont pas valables pour $i = 1$ en $x_{\frac{1}{2}}=0$ et $i = N$ en $x_{N+\frac{1}{2}}=1$. Il se pose alors le problème du traitement des bords qui exige une formulation particulière. Une possibilité est de définir une maille fictive à gauche et une autre à droite de l'intervalle $[0,1]$, et d'affecter une valeur moyenne de la fonction u dans ces deux mailles. Une autre possibilité est :

- Considérer la valeur moyenne de $F_{\frac{1}{2}}$ non plus sur le segment $[x_0, x_1]$ qui n'est pas défini mais sur le segment $[x_{\frac{1}{2}}, x_1]$.

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{h_1} \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_1} u'(x) dx = \frac{2u_1}{h_1}$$

- Considérer la valeur moyenne de $F_{N+\frac{1}{2}}$ non plus sur le segment $[x_N, x_{N+\frac{1}{2}}]$ qui n'est pas défini mais sur le segment $[x_1, x_{N+\frac{1}{2}}]$

$$F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{h_N} \int_{x_N}^{x_{N+\frac{1}{2}}} u'(x) dx = \frac{2u_N}{h_N}$$

La discrétisation en volumes finis est donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} &= h_i f_i \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{2u_1}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{\frac{3}{2}}} &= h_1 f_1 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-\frac{1}{2}}} + \frac{2u_N}{h_N} &= h_N f_N \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un maillage régulier de pas h . La discrétisation en volumes Finis devient :

$$\begin{aligned}
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} &= f_i \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \\
\frac{3u_1 - u_2}{h^2} &= h_1 f_1 \\
\frac{3u_N - u_{N-1}}{h^2} &= h_N f_N
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle, ceci s'exprime :

$$A_h U_h = b_h$$

avec

$$U_h = (u_i)_{1 \leq i \leq N}, \quad (b_h)_i = f_i$$

et

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Volumes Finis en 2D

On va résoudre l'équation de Poisson, On cherche une fonction $u = u(x)$ définie pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

avec des fonctions $f, g \in L^2(\Omega)$ données

On va d'abord définir un maillage admissible au sens des Volumes Finis, puis on donnera la formulation en Volumes Finis du problème (2.19).

◆ MAILLAGE :

On définit un maillage τ de Ω par des volumes de contrôle (ou cellules) K de la façon suivante :

1 Les volumes de contrôle K sont des polygônes convexes :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in K} \bar{K}$$

2 Pour chaque cellule K , il existe un point $x_K \in K$ appelé centre, tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- Pour chaque cellule L adjacente à K , on a $x_K \neq x_L$ et le segment de droite (x_K, x_L) est perpendiculaire à l'arête e commune aux deux cellules K et L (cf. Figure 2.1). On notera $e = (K|L)$.
- Pour chaque arête e appartenant au bord $\partial\Omega$, la droite passant par x_K et perpendiculaire à l'arête e , intersecte e (cf. Figure 2.2).

Un tel maillage sera dit admissible au sens des Volumes Finis.

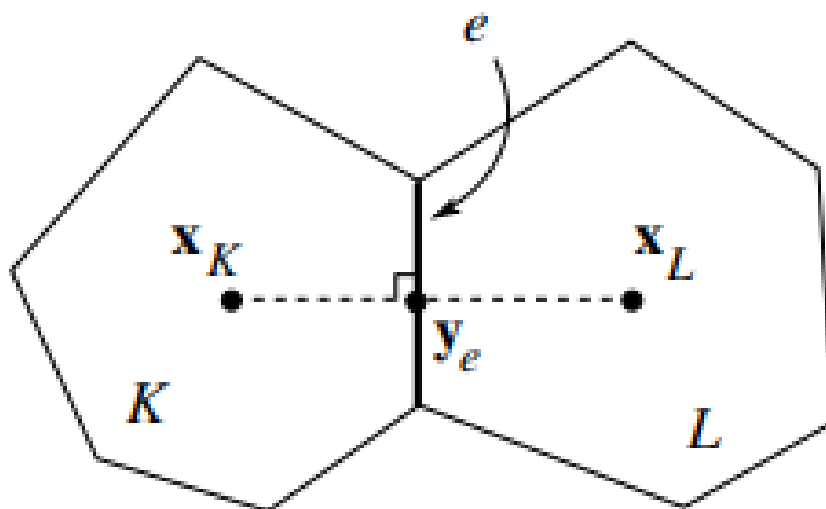


FIGURE 2.1 – Cellules admissibles d'un maillage "Volumes Finis"

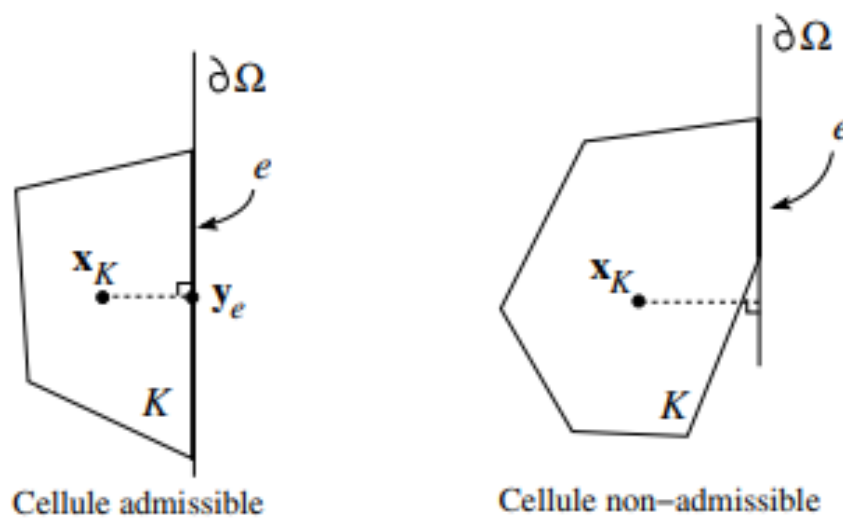


FIGURE 2.2 – Condition d'admissibilité du maillage pour les cellules du bord

◆ **Formulation en Volumes Finis :**

On a besoin de la formule de la divergence

Définition 2.3.1. Soit u un champs de vecteur défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soit n le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$. d'où la formule de la divergence est :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u dx = \int_{\partial\omega} u \cdot n dx$$

On intègre l'équation de Poisson sur une cellule K .

$$\int_K -\Delta u dx = \int_K f dx$$

Par la formule de la divergence, on obtient

$$\int_{\partial K} \nabla u \cdot n d\Gamma = |K| f_k \quad (2.20)$$

avec ($\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$)

où n désigne la normale unitaire dirigée à l'extérieur de K et où on a noté f_K la valeur moyenne de f dans la cellule K i.e.

$$f_k = \frac{1}{|K|} \int_K f dx$$

On note ε_k l'ensemble des arêtes de la cellule K et on décompose le bord de la cellule K :

$$\partial K = \bigcup_{e \in \varepsilon_k} e$$

La relation (2.20) s'écrit alors

$$\sum_{e \in \varepsilon_k} - \int_e \nabla u \cdot n_{k,e} d\Gamma = |K| f_k \quad (2.21)$$

où on a noté $n_{K,e}$ la normale unitaire à e dirigée vers l'extérieur de K
 On approche le flux à travers l'arête e :

$$-\int_e \nabla u \cdot n_{k,e} d\Gamma = F_{k,e}$$

où $F_{k,e}$ est le flux numérique à travers l'arête e , associé à la cellule K . Le schéma "Volumes Finis" s'écrit :

$$\sum_{e \in \varepsilon_k} F_{k,e} = |K| f_k \quad \forall k \in \tau$$

Construction des flux numériques : On considère les inconnues $(u_K)_{K \in \tau}$ associées à chaque volume de contrôle, avec les approximations $u_k \simeq \frac{1}{|K|} \int_K u(x) dx$. On désigne également par $(u_e)_{e \in \varepsilon_k}$ des valeurs associées aux arêtes de la cellule K . Ces valeurs seront utilisées de façon intermédiaire et finalement éliminées.

- Pour un centre $x_K \notin e$, le flux numérique $F_{K,e}$ est choisi égal à :

$$F_{K,e} = -\frac{u_e - u_k}{d_{k,e}} |e|$$

où $d_{K,e}$ est la distance de x_K à l'arête $e \in \partial K$. Le choix de $F_{K,e}$ est donné pour $x_K \notin e$ de sorte que $d_{K,e} \neq 0$.

- Soit une arête e d'une cellule K telle que $e \subset \partial\Omega$ c'est-à-dire qui appartient au bord de Ω . Dans ce cas, on utilise la relation

$$d_{k,e} F_{k,e} = (u_k - u_e) |e|$$

avec

$$u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma$$

Autrement dit, dans ce cas, la valeur u_K est connue dans ces cellules .

Donc le schéma "Volumes Finis" s'écrit :

$$\sum_{e \in \bar{\varepsilon}_k} F_{k,e} = |K| f_k \quad \forall k \in \tau$$

avec

$$F_{K,e} = -\frac{u_e - u_k}{d_{k,e}} |e|$$

$$d_{k,e} F_{k,e} = (u_k - u_e) |e|$$

où

$$u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma \quad \text{si } e \subset \partial\Omega$$

Il s'agit donc d'un système linéaire de N équations à N inconnus (N = nb de volumes de contrôle dans τ)

$$A_h U_h = b_h$$

2.3.3 Analyse mathématiques du schéma des volumes finis

Proposition 2.3.1. *(Existence de la solution du schéma volumes finis). Soit $f \in C([0, 1])$ et $u \in C^2([0, 1])$ solution de (2.17). Soit $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ le maillage , alors il existe une unique solution u_h . [7]*

Démonstration 2.3.1. *Le schéma s'écrit*

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

(où on a posé $u_0 = u_{N+1} = 0$ En multipliant par u_i et en sommant de $i=1$ à N , on obtient donc :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} u_i + \sum_{i=1}^N \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} u_i = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

En effectuant un changement d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} u_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} u_i = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

En regroupant les sommes, on a donc :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_1^2}{h_{\frac{1}{2}}} + \frac{u_N^2}{h_{N+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

Si $f_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$, on a bien alors $u_i = 0$. Ceci démontre l'unicité de (u_i) et donc l'existence puisque le système est carré d'ordre N . On rappelle qu'une matrice A est inversible ssi son noyau est réduit au vecteur nul.

Lemme 2. (Consistance des flux). Soit $u \in C^2([0, 1])$ solution de (2.17) On se donne une subdivision de $[0, 1]$. On appelle $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ le flux exact en $x_{i+\frac{1}{2}}$ et $F_{i+\frac{1}{2}}^* = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}$ le quotient différentiel qui approche la dérivée première $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$. On dit que le flux numérique $f_{i+\frac{1}{2}}$ est consistant s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ ne dépend que de u telle que l'erreur de consistance sur le flux, définie par :

$$R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^*$$

vérifie

$$R_{i+\frac{1}{2}} \leq Ch$$

Remarque 2.3.2. Si $x_{i+\frac{1}{2}}$ est au centre de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ l'erreur de consistance sur les flux est d'ordre 2, i.e. il existe $C \in \mathbb{R}^+$ ne dépend que de u telle que $R_{i+\frac{1}{2}} \leq Ch^2$.

Notons que cette propriété de consistance est vraie sur les flux, et non pas sur l'opérateur $-u''$.

Définition 2.3.2. (Conservativité). On dit que le schéma volumes finis est conservatif, au sens où, lorsqu'on considère une interface $x_{i+\frac{1}{2}}$ entre K_i et K_{i+1} , le flux numérique entrant dans une maille est égal à celui sortant de l'autre.

C'est grâce à la conservativité et à la consistance des flux qu'on va montrer la convergence du schéma volumes finis.

Théorème 3. (*Convergence du schéma volumes finis*). *On suppose que la solution u de (2.17) vérifie $u \in C^2([0, 1])$. On pose pour $e_i = u(x_i) - u_i$ pour $i = 1, \dots, N$ et $e_0 = e_{N+1} = 0$. Il existe $C \geq 0$ ne dépendant que de u tel que*

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch^2 \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=0}^N h e_i^2 \leq Ch^2 \quad (2.23)$$

$$\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq Ch \quad (2.24)$$

(On rappelle que $h = \sup_{i=1, \dots, N} h_i$) [8]

Démonstration 2.3.2. *Ecrivons le schéma volumes finis :*

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i$$

L'équation exacte intégrée sur la maille K_i :

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i$$

Où $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}$ est défini dans le lemme , et soustrayons :

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}} = 0$$

En introduisant $R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^*$, on obtient :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^* + F_{i-\frac{1}{2}} = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}}$$

Ce qui s'écrit encore, au vu de la définition de e_i ,

$$-\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i) + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_i - e_{i-1}) = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}}$$

On multiplie cette dernière égalité par e_i et on somme de 1 à N :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_i - e_{i-1})e_i = \sum_{i=1}^N -R_{i+\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=1}^N R_{i-\frac{1}{2}}e_i$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i)e_{i+1} = \sum_{i=1}^N -R_{i+\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=0}^{N-1} R_{i-\frac{1}{2}}e_{i+1}$$

En réordonnant les termes, on obtient ($e_0 = e_{N+1} = 0$) :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=0}^N R_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1} - e_i)$$

Or $R_{i+\frac{1}{2}} \leq Ch$. On a donc

$$\sum_{i=1}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}} \sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{i=0}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \left(\sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}} \right)^{\frac{1}{2}} * \left(\sum_{i=0}^N h_{i+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En remarquant que $\left(\sum_{i=0}^N h_{i+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ on déduit que :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \left(\sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et donc

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch$$

On a ainsi démontré (2.22). Démontrons donc (2.23) :

$$|e_i| = \left| \sum_{j=0}^i e_j - e_{j-1} \right| \leq \left| \sum_{j=0}^N e_j - e_{j-1} \right|$$

Donc

$$|e_i| \leq \left(\sum_{j=0}^N \frac{(e_j - e_{j-1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=0}^N h_{i+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui entraîne $\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq Ch$. Notons que de cette estimation, on déduit immédiatement l'estimation (2.23).

2.3.4 Avantages et inconvénients des volumes finis

Avantages	Inconvénients
facilement utilisable avec des maillages non structurés	peu de résultats théoriques
détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann	

CHAPITRE

3

APPLICATION NUMÉRIQUE

Soit l'équation de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in [0, 1] * [0, 1] \\ u(0, y) = 10, u(1, y) = 20, u(x, 0) = 30, u(x, 1) = 50 \\ h_x = h_y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Avec ce choix d'approximation :

$$u_i^j = \frac{1}{4}[u_{i-1}^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1}]$$

1 Schéma de laplace :

Noeud (2,2) :

$$u_2^2 = \frac{1}{4}[u_3^2 + u_1^2 + u_2^1 + u_2^3]$$

Noeud (3,2) :

$$u_3^2 = \frac{1}{4}[u_4^2 + u_2^2 + u_3^3 + u_3^1]$$

Noeud (2,3) :

$$u_2^3 = \frac{1}{4}[u_1^3 + u_3^3 + u_2^4 + u_2^2]$$

Noeud (3,3) :

$$u_3^3 = \frac{1}{4}[u_2^3 + u_4^3 + u_3^4 + u_3^2]$$

2 Affectation de CL :

$$u_2^2 = 10 + 0.25u_3^2 + 0.25u_2^3$$

$$u_3^2 = 12.5 + 0.25u_2^2 + 0.25u_3^3$$

$$u_2^3 = 15 + 0.25u_3^3 + 0.25u_2^2$$

$$u_3^3 = 17.5 + 0.25u_2^3 + 0.25u_3^2$$

3 Système matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12.5 \\ 15 \\ 17.5 \end{pmatrix}$$

4 Résoudre le système :

	0	1	2	3	4
u_2^2	20	20	21.875	22.813	23.344
u_3^2	20	22.5	24.375	25.438	25.782
u_2^3	20	25	26.875	27.938	28.282
u_3^3	20	27.5	29.875	30.313	30.844

Le programme sous MatLab pour la méthode de différences finis :

```
nx=3;
```

```

ny=3;
lx=1;
ly=1;
dx=lx/nx;
dy=ly/ny;
r=(dx/dy)^2;
s=1/(2+2*r);
eps=0.001;
x=0:dx:lx;
y=0:dy:ly;
u=zeros(ny+1,nx+1);
uex=zeros(ny+1,nx+1);
for i=1:ny+1
    u(i,1)=10;
    u(i,nx+1)=20;
end
for i=1:nx+1
    u(1,i)=30;
    u(ny+1,i)=50;
end
u0=u;
err=10;
while err>eps
    for i=2:nx
        for j=2:ny
            u(j,i)=s*(u0(j+1,i)+u0(j-1,i)+u0(j,i+1)+u0(j,i-1));
        end
    end
    err=norm(u-u0);
    u0=u;
end
sol=u

for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        uex(j,i)=x(i).^2 - y(j).^2;
    end
end
uex
erreur=u-uex
surf(x,y,u)

```

Le résultat obtenue sur Matlab est la suivante :

z

sol =

30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
10.0000	23.7496	26.2496	20.0000
10.0000	28.7496	31.2496	20.0000
50.0000	50.0000	50.0000	50.0000

uex =

0	0.1111	0.4444	1.0000
-0.1111	0	0.3333	0.8889
-0.4444	-0.3333	0	0.5556
-1.0000	-0.8889	-0.5556	0

erreur =

30.0000	29.8889	29.5556	29.0000
10.1111	23.7496	25.9162	19.1111
10.4444	29.0829	31.2496	19.4444
51.0000	50.8889	50.5556	50.0000

le graphe de la solution de l'équation de laplace d'ordre 2 :

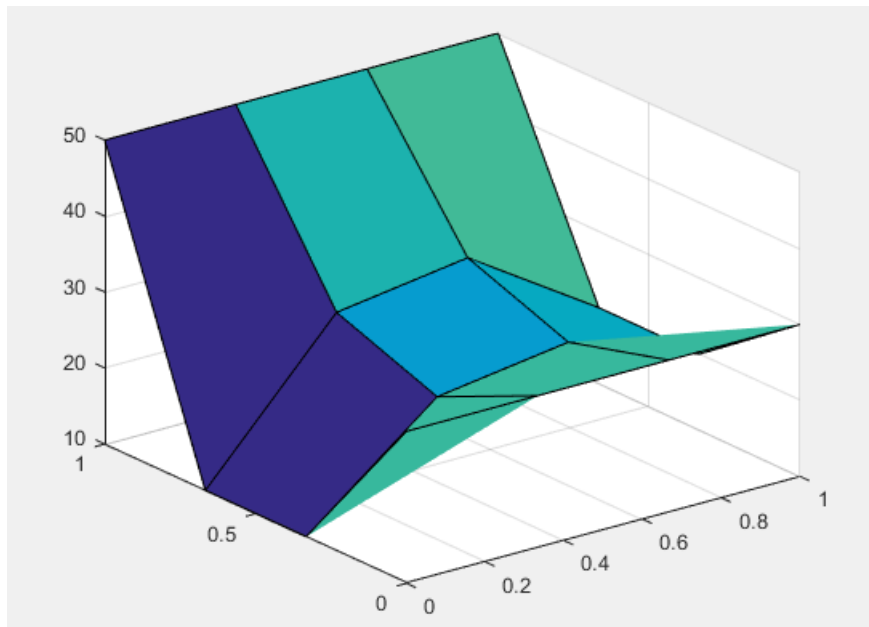


FIGURE 3.1 – solution de l'équation de laplace d'ordre 2

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En conclusion, ce travail a pour but l'étude et la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c-à-d n'évoluant pas au cours du temps), comme prototype de ce type d'équation on a l'équation de Laplace.

Pour résoudre numériquement ces équations on a analysé trois méthodes de résolution (Différences Finies, Éléments Finis et Volumes Finis), , mais avant on a présente la solution analytique.

Les questions essentielles lorsqu'on approche u , la solution exacte de l'EDP, par u_h une solution approchée, sont :

- ▶ la convergence : c'est à dire savoir si u_h tend vers u et en quel sens ?
- ▶ la stabilité : si on perturbe les données, comment est perturbée la solution ?

pour cela on a parlé des propriétés d'un schéma numérique.

Ce travail peut être étendu au premier temps pour d'autres types d'équations aux dérivées partielles a savoir hyperbolique ou encore parabolique. pour arriver finalement à la possibilité de généralisation de cette étude à des processus stochastiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Robert Bédard .MAT 4112, EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. l'Université du Québec à Montréal, juillet 2007.
- [2] A. Lesfari.Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP) (Master Maths) .Université Chouaïb Doukkali.2014-2017.
- [3] URL :
http://iramis.cea.fr/spec/cbarreteau/methodes_mathematiques/documents/polymaths2A_060109Chap3.pdf ,28.01.2019.
- [4] David Manceau ,Résolution pratique des équations aux dérivées partielles
- [5] Eyaya Fekadie Anley,article Numerical Solutions of Elliptic Partial Differential Equations by Using Finite Volume Method. Pure and Applied Mathematics Journal. July 23, 2016.
- [6] J.-F. Scheid, Volumes Finis, Université de Lorraine.
- [7] P. A. Raviart, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1992.
- [8] A. Le Pourhiet, Résolution des équations aux dérivées partielles, Cepadues Editions, 1988.

-
- [9] Marie Hélène Vignal, Approximation des équations aux dérivées partielles
 - [10] Francois Cuvelier, Méthodes numériques II
 - [11] Eric Goncalvès da Silva. Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007
 - [12] J-H SAIAC , Méthodes des éléments finis. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles 8 juin 2006
 - [13] Michel KERN, Introduction à la méthodes des éléments finis
 - [14] Vincent Manet, Méthodes des éléments finis
 - [15] Rapha ele Herbin. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Engineering school. Marseille, 2011.
 - [16] Franck Boyer, Analyse numérique des EDP elliptiques
 - [17] Volker John, Numerical for partial differential, 2013
 - [18] DAVEAU CHRISTIAN, METHODES D'APPROXIMATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES PAR DIFFERENCES FINIES ET VOLUMES FINIS.