

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

**Détection et Extraction de la tendance et de la
saisonnalité dans les séries temporelles**

Présenté par :
Chebbab Abdelkrim

Soutenu : Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.Latti Fethi	MCA	C-Univ Naâma	Président
Dr.Belguerna Abderrahmane	MCB	C-Univ Naâma	Examineur
Dr.Mekki Slimane	MCB	C-Univ Naâma	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Remerciement

Je tiens à remercier en premier lieu et avant tout ALLAH le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir notre travail dans les meilleures conditions.

Je tiens également à remercier du coeur mon encadreur Dr.Mekki Slimane, son aide précieuse et ses conseils judicieux.

Je voudrai également remercier les membres de jury Dr.Lati fethi et Dr.Belguerna Abderrahmane maîtres de conférences au centre universitaire Salhi Ahmed de Naâma, qui m'ont fait l'honneur de juger ce modeste travail.

Table des matières

Introduction	4
1 Séries temporelles	7
1.1 Analyses des séries temporelles	7
1.1.1 Traitement des séries temporelles	7
1.1.1.1 Processus aléatoires stationnaires et processus ARMA .	10
1.1.1.2 Les processus aléatoires non stationnaires	13
1.1.2 Modélisation d'une série temporelle	15
1.1.3 Modèle stationnaire	16
1.2 Introduction à l'analyses de fourier	17
1.2.1 Propriétés de la densité spectrale	18
1.2.2 Moments empiriques	18
1.2.3 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	21
1.3 Représentation des séries temporelles	22
1.3.1 Modèles AR,MA,ARMA	22
1.3.2 Modèle GARCH(p, q)	24
2 Séries chronologiques et valeurs extrêmes	25
2.1 valeurs extrêmes et indépendance	25
2.2 valeurs extrêmes et dépendance	28
2.2.1 Mesure de dépendance	28
2.3 Etude d'index des queues de distribution	29
3 Entretien du modèle GARCH(1,1)	32
3.1 propriétés statistiques d'une série temporelles	32
3.1.1 Classe des distributions de type Pareto	32
3.2 Etude empirique d'une série temporelle financière	33
3.3 Propriétés statistiques de la série	34
3.3.1 Séries des prix et des rendements journaliers	34
3.3.2 Moments empiriques	35
3.3.3 Hétéroscédasticité et Autocorrélation	37

3.4	Comparison Entre les Résultats	39
	Bibliographie	40

Introduction

L'utilisation des séries chronologiques, ou séries temporelles, se trouve à la phase de statistique où les observations sont arrivées régulièrement espacées dans le temps. Leur domaine d'application est très vaste et s'étend de l'économie, finance et la biologie, psychologie, géophysique (la théorie du signal)...etc. Elles ont donc suscité un très vif intérêt, ce qui a eu par conséquent le développement de nombreux modèles : AR, MA, ARMA, ARCH et GARCH....

Dans les XVI^e – $XVII^e$ siècles qui apparaissent les premières séries temporelles (ou chronologiques) dans les écrits scientifiques. Mais le plus ancien graphique connu remonte à l'antiquité (en terme de représentation de l'inclinaison des orbites et planètes en fonction du temps), les Romains savaient déjà que l'année dure 365 et 1/4 jours.

D'autre part, en XIX^e siècle, les premières études empiriques des données économiques sont incluses dans l'analyse des séries de prix, de taux d'intérêt,... En 1919, W. Pearson, propose une approche globale de décomposition d'une série temporelle en quatre composantes (i.e. Tendances, Saisonnière, Cycle et Résidu), connue sous le nom de (Baromètre de Harvard).

Dans les vingtaines de siècle passé, Slytsky (1927 - 1933) montre qu'en calculant une moyenne mobile (MA) à partir d'un (bruit blanc), on obtient une série dont les observations ne sont pas indépendantes et qui présentent des cycles apparents "Effet Slytsky". Et dans le même ordre d'idées, en (1926-27) Yule propose le modèle autorégressif (AR), et montre que celui-ci peut conduire à l'apparition des fluctuations cycliques.

Dans les recherches sur fluctuations économiques, et au développement de la statistique mathématique, les chercheurs développent une approche modèle de plusieurs éléments :

- L'estimation basée sur la théorie économique.
- L'utilisation de la statistique dans l'analyse des données.
- L'utilisation des modèles économétriques pour analyser les politiques.

Le développement de la théorie des processus stationnaires et l'introduction de spectre d'une série stationnaire durant les années (1925-45), l'analyse des séries temporelles se développe rapidement et les applications se multiplient, notamment en : Physique, Génie électrique, Médecine, Biologie, Géophysique et principalement en Economie et Finance...

A la fin des années 60, cette recherche sera dominée par l'étude du modèle de régression. Ce n'est qu'en 1970 qu'apparaissent en effet, l'adéquation au modèle (ARIMA) et la prévision (Approche de Box et Jenkins).

Suite aux travaux pionniers de Engle en 1982, il est devenu courant dans la littérature financière de retenir comme mesure de volatilité (i.e. variance conditionnelle) la variance d'un modèle "Autorégressive Conditionnellement Hétéroscidastique" : ARCH, qui est une généralisation de l'approche du Box et Jenkins. En outre, c'est le passage des modèles linéaires vers les modèles non linéaires. Ce qui permet d'intégrer des propriétés observées empiriquement, telles que la dépendance entre les observations ou la distribution à queue lourde...

Au milieu des années quatre vingt Bollerslev, alors étudiant de Engle, généralise la famille des modèles ARCH en permettant à la variance conditionnelle du modèle de dépendre aussi de son propre passé. Bollerslev définit donc en 1986 le modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique Généralisés, c'est-à-dire GARCH, qui fera l'objet principal de cette thèse.

La disponibilité d'un grand nombre de données temporelles, dans ces dernières années a permis non seulement de rechercher des dynamiques non linéaires, mais aussi de s'intéresser aux queues de distribution, c'est-à-dire aux risques extrêmes. En effet, la théorie des valeurs extrêmes est l'une des avancées majeures dans la modélisation des phénomènes scientifiques dépendant du temps, si on prend en compte les diverses caractéristiques des données observées telles que : l'invariance par passage du temps (Stationnarité), la dépendance et le linéarité ...

Cet mémoire, est alors une synthèse des travaux de recherches sur la théorie des séries temporelles, ainsi que des différentes propriétés probabilistes et statistiques du modèle GARCH(1,1), en utilisant des réponses à des questions nécessaires notamment :

- Quels sont les objectifs et comment se fait la modélisation des séries temporelles ?
- Que deviendra la théorie des risques où celle de l'assurance dans l'étude des valeurs

extrêmes en rejetant les hypothèses classiques d'indépendance, d'iqui-distribueté (i.i.d) et de gaussiennes ?

- Comment choisir un modèle qui explique le mieux les données (i.e. problème d'adéquation) ?

La présentation du thèse est organisée comme suite :

Tout d'abord, Pour le Chapitre 1 (" Séries temporelles "); nous rappelons les principaux définitions, notations et résultats que nous verrons souvent dans la théorie des séries temporelles, et que l'on va utiliser par la suite, notamment : les modèles AR, MA, ARMA et les modèles hétéroscédastiques ARCH et GARCH. Ainsi aurons-nous à étudier la théorie spectrale, les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation, la stationnarité et les moments d'échantillonnage,...

Ainssi, chapitre 2 (" Séries chronologiques et valeurs extrêmes ")

Ainssi, dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude des valeurs extrêmes, dont l'objectif est de mesurer en terme de probabilité l'intervention des événements rares, ou l'apparition des catastrophes : grands sinistres, orages, et crises économiques, . . . etc. Ce qui rend la connaissance des caractéristiques des distributions et propriétés (comportements) des estimateurs de ces événements, en particulier la probabilité de dépasser un certain seuil (i.e.valeurs extrêmes) une préoccupation majeure des assureurs dans les compagnies d'assurance et un excellent outil d'aide à la décision, pour éviter les faillites retentissantes ou les situations des ruines...

Presque tous les résultats sur le comportement asymptotique des quantiles extrêmes disponibles maintenant étant restreint à des observations indépendantes dans l'étude des séries temporelles financières en particulier, ce chapitre a donc pour but d'enquêter sur le comportement asymptotique : la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur des quantiles extrêmes, basées sur les grandes observations.

Finalement, dans le dernier Chapitre (chapiter 3 : Entretien du modèle GARCH(1,1)),on avoir rappelé certains résultats établis dans le cas d'indépendance, nous allons surtout nous intéresser au cas où se pose les problèmes de dépendance, de stationnarité et d'hétéroscédasticité dans l'étude des séries temporelles.

Chapitre 1

Séries temporelles

Pour avoir une étude théorique des séries temporelles, on fait une combinaison de deux concepts, probabiliste et statistique, le probabiliste dont on étudie les caractéristiques des variables aléatoires X_t et le problème statistique soit donner les caractéristiques des distributions de la série temporelle X_t , pour les observations X_1, X_2, \dots, X_n au moment $t = 1, 2, \dots, n$. Le modèle statistique résultant à deux reprises, à la compréhension du système stochastique et à la prédiction du future (i.e. X_{n+1}, X_{n+2}, \dots).

1.1 Analyses des séries temporelles

Définition 1

Une série temporelle est une suite d'observations répétées, correspondant à des dates différentes, ou encore à un ensemble de valeurs représentant l'évolution d'un phénomène au cours du temps.

En générale, les observations d'un phénomène sont équidistantes, les unes des autres (temps discret ; $t \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$).

le temps correspondant à un jour, un mois, une année....

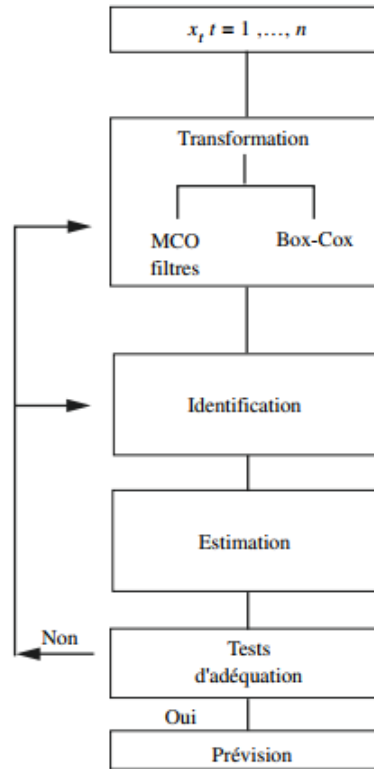
En supposant que, nous travaillons dans des domaines tels que les finances, on peut citer entre autre : la valeur journalière du Dollar (\$) en Euro (€), à l'ouverture du marché boursière, les données mensuelles du chômage, les prix d'action, relevé annuel de la production d'acier sur 30 ans,etc. Mais il existe d'autres domaines (comme en physique), où les observations sont élevées de façon continue, l'indice t prend des valeurs dans un intervalle de \mathbb{R}

1.1.1 Traitement des séries temporelles

Dans le premier temps, les méthodes de prévision des séries temporelles se révèlent dans la plupart des cas insuffisantes pour prévoir les phénomènes économiques. En dehors des méthodes de lissage, elles sont construites à partir de l'extrapolation de composantes

déterministes qui mutilent la réalité économique. Les statisticiens ont pu observer que ces instruments forgeaient le plus souvent mieux qu'ils n'informaient plus sur les réalités intrinsèques des séries. C'est ce qui explique l'engouement des chercheurs à investir ce domaine dans les années 1970 suite aux travaux de Box et Jenkins qui proposent une nouvelle « philosophie » du traitement des séries temporelles.

La théorie des processus aléatoires a commencé avec les travaux de Yule en 1927, quand il a introduit la notion de choc aléatoire ou encore d'impulsion dans les séries temporelles. La généralisation de l'analyse harmonique en 1930 par Wiener, introduite par le mathématicien français J. B. Fourier en 1850 au cas stochastique. En particulier est définie la stationnarité d'ordre 2 qui impose à l'espérance mathématique, d'être indépendante du temps et à la covariance de n'être fonction que du retard entre deux instants. En 1938, Wold décompose dans le domaine du temps les processus aléatoires selon deux processus orthogonaux dont l'un est dit déterminable et l'autre indéterminable. Le premier est appelé ainsi car il peut être exactement prévu. Le second est le résultat d'une combinaison linéaire infinie de chocs aléatoires : c'est le processus de Yule. Il s'agit d'un processus qui - à cause de ses caractéristiques - ne peut être exactement prévu. En 1954, Wold bâtit, à partir de la classe des processus indéterminables, les modèles linéaires ARMA stationnaires. La partie autorégressive de ces processus notée AR (Auto Regressive Process) est constituée par une combinaison linéaire finie des valeurs passées du processus. La partie moyenne mobile notée MA (Moving Average Process) est constituée d'une combinaison linéaire finie en t des valeurs passées d'un bruit blanc, c'est-à-dire d'un processus aléatoire formé d'une succession de variables aléatoires indépendantes et d'espérance mathématique nulle. Wold montre que la classe ARMA est suffisante pour représenter la plupart des cas concrets. En 1960, le théorème de Wold-Cramer résout le problème de la prédiction linéaire au sens des Moindres Carrés des processus ARMA (théorème de la décomposition canonique des processus ARMA). En 1970, dans la première édition de leur ouvrage puis en 1976 dans la deuxième édition, Box et Jenkins rassemblent tous ces travaux épars dans une méthodologie itérative ayant pour but la prévision d'une chronique. Dans le cas univarié, l'algorithme utilisé est celui de Box et Jenkins. La figure 1 le présente sous sa forme la plus traditionnelle.



Il s'agit d'un algorithme itératif en cinq étapes. La première a pour objet de transformer la chronique échantillon afin d'éliminer d'éventuelles non stationnarité (tendance, saisonnalité...). Les caractéristiques de la chronique sont alors rapprochées de celles théoriques des processus ARMA afin d'identifier le processus générateur. L'estimation des paramètres - réalisée à partir du critère des moindres carrés - permet de valider ou d'invalider le modèle retenu.

Les itérations entre ces quatre étapes permettent de sélectionner un processus qui après prise en compte des différentes transformations de départ (recoloration) peut être utilisé pour prévoir, dans une 5^e étape, la chronique.

Dans cet algorithme, les modèles sélectionnés (les modèles ARMA) sont des modèles linéaires. Plus récemment, certains auteurs (Tong, 1990, par exemple) ont associé à cette démarche des processus non linéaires. Cette non linéarité peut concerner le moment d'ordre 1 du processus (la moyenne pour l'échantillon), on les appelle modèles TAR (Threshold - AR), modèles Bilinear, modèles EXAR (AR EXponentiels), etc.

Cette non linéarité peut aussi concerner la variance de la chronique échantillon (moment d'ordre 2 du processus); ces modèles de type ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) ont été introduits par Engle en 1982. Ils ont donné lieu à la construction de nombreux autres modèles (Guegan, 1994) combinant ce principe avec ceux des modèles ARMA (CHARMA, GARCH...).

1.1.1.1 Processus aléatoires stationnaires et processus ARMA

A. Définition d'un processus stationnaire au sens strict : la stationnarité forte

Soit un processus aléatoire réel $x_t, t \in T$. Le processus x_t est dit strictement ou fortement stationnaire si \forall le n -uplet du temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tel que $t_i \in T$ et pour tout temps $h \in T$ avec $t_i + h \in T, \forall i, i = 1, \dots, n$, la suite $(x_{t_1+h}, \dots, x_{t_n+h})$ a la même loi de probabilité que la suite $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$. La loi de probabilité qui correspond à la suite $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ est caractérisée par sa fonction de répartition, d'où la définition équivalente de la stationnarité forte :

$$\forall (x_1, \dots, x_n), \forall (t_1, \dots, t_n), \text{ et } \forall h :$$

$$P[x_{t_1} < x_1, \dots, x_{t_n} < x_n] = P[x_{t_1+h} < x_1, \dots, x_{t_n+h} < x_n].$$

Ainsi un processus aléatoire est strictement stationnaire si toutes ses caractéristiques, c'est-à-dire tous ses moments, sont invariants pour tout changement de l'origine du temps.

Dans le cas où un processus $x_t, t \in T$ est tel que $T = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} alors on peut vérifier que si x_t est un processus strictement stationnaire :

$$E[x_t] = m \quad \forall t \in T$$

$$V[x_t] = \sigma^2 \quad \forall t \in T$$

$$\text{cov}[x_t, x_s] = \gamma[|t - s|] \quad \forall t \in T, \forall s \in T, t \neq s$$

Ou bien : $\text{cov}(x_1, x_{1+k}) = \text{cov}(x_2, x_{2+k}) = \dots = \text{cov}(x_t, x_{t+k})$

La covariance dépend de la différence de temps seule et non du temps.

$\text{cov}[x_t, x_s]$ existe si $E[x_t^2] < \infty$ et $E[x_s^2] < \infty$ (d'après l'inégalité de Schwarz).

Il s'agit donc d'une famille de variables aléatoires réelles homoscédastiques et corrélées.

B. La stationnarité faible

Le processus $x_t, t \in T$ est dit faiblement stationnaire si seulement les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 sont stationnaires. Par exemple, si $E[x_t^k]$ dépend du temps t où $k \leq 3$ alors le processus est faiblement stationnaire.

Les processus stationnaires d'ordre 2 sont des processus générateurs de chronique sans tendance en moyenne et sans tendance en variance mais cela ne signifie pas que les séries temporelles ont une représentation graphique stable.

C. Le processus Bruit Blanc (White Noise)

Soit $x_t, t \in T$ un processus. Si pour tout n-uple du temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires réelles suivantes $x_{t_2} - x_{t_1}, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$ sont indépendantes, il s'agit d'un processus à accroissements indépendants. Le processus $x_t, t \in T$ est dit à accroissements indépendants stationnaires si la loi de probabilité de $(x_{t+h} - x_t), \forall h \in T$ ne dépend pas de t .

Un *Bruit Blanc*¹ est un processus stochastique à accroissements non corrélés. Il est dit Bruit Blanc « fort » si les accroissements sont indépendants. Il s'agit donc d'une suite de variables aléatoires réelles homoscédastiques et indépendantes. On l'appelle aussi processus i.i.d. (processus discret formé de variables mutuellement indépendantes et identiquement distribuées). Si la loi de probabilité de x_t est normale alors le Bruit Blanc est nécessairement i.i.d. Il est parfois dit Bruit Blanc gaussien et noté alors n.i.d. (normalement et identiquement distribuée).

Un Bruit Blanc est donc tel que :

$$E[x_t] = m \quad \forall t \in T$$

$$V[x_t] = \sigma^2 \quad \forall t \in T$$

$$\text{cov}[x_t, x_{t+\theta}] = \gamma_x(\theta) = 0 \quad \forall t \in T, \forall \theta \in T$$

Si $E[x_t] = 0$, le Bruit Blanc est centré, ce que l'on suppose par la suite. Un processus i.i.d. ou n.i.d. est nécessairement stationnaire mais tous les processus stationnaires ne sont pas i.i.d. ou n.i.d., dans ce dernier cas le processus stationnaire est dit à mémoire, c'est-à-dire qu'il existe une loi de reproduction interne au processus qui est donc modélisable.

Le tableau 3.1 illustre les différents types de processus

Processus non stationnaire	Processus stationnaire
	Processus bruit blanc
	Processus bruit blanc gaussien

Remarque 1

Il y a aussi des processus non stationnaires qui ne sont pas des bruits blancs, bien que l'espérance soit indépendante du temps et les covariances nulles mais dont la variance dépend du temps (hétéroscédasticité).

D. L'ergodicité

Les processus aléatoires recourent à l'hypothèse d'ergodicité pour les échantillons qui les constituent. Pour bien comprendre cette hypothèse que l'on utilise souvent de façon

naturelle, il convient de définir ce que l'on entend par « moment dans le processus » et « moment le long du processus ».

Pour cela, nous schématisons des processus aléatoires stationnaires et non stationnaires en supposant qu'à un instant t la loi de probabilité de la variable aléatoire est gaussienne.

Les figures 3.1 et 3.2 montrent que les moments du processus se calculent dans le processus pour l'instant donné et que la réalisation simultanée d'un nombre d'épreuves doit être suffisant pour que ce calcul ait lieu. Théoriquement, un processus peut être assimilé à une expérience, nous pouvons donc obtenir plusieurs échantillons résultant de ces expériences. La théorie de l'inférence statistique garantit la stabilité des estimations de ces moments.

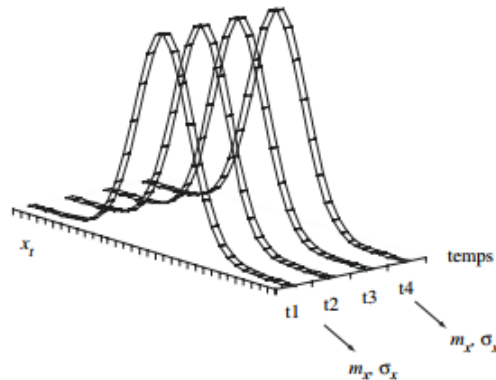


Figure 3.1 – Processus aléatoires stationnaires

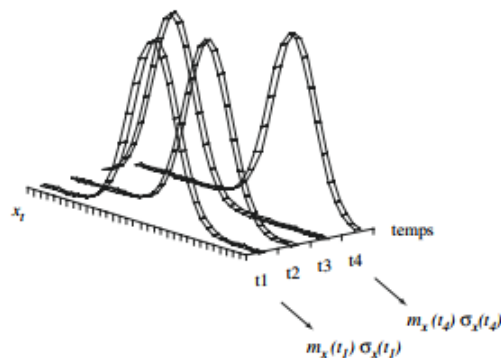


Figure 3.2 – Processus aléatoires non stationnaires

Mais on peut aussi calculer les moments de l'échantillon, par exemple la moyenne temporelle \bar{x} , dans le cas discret :

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n}^{+n} x_t \quad t \in Z.$$

Lorsque ces moyennes existent, elles sont indépendantes du temps tout en pouvant être différentes d'un échantillon à l'autre.

On dit qu'un processus aléatoire est ergodique si on peut obtenir des estimateurs absolument corrects (i.e. sans biais et convergents) de ses caractéristiques, les moments à partir d'un seul échantillon donne (la série temporelle).

1.1.1.2 Les processus aléatoires non stationnaires

Les chroniques économiques sont rarement des réalisations de processus aléatoires stationnaires. La non-stationnarité des processus peut concerner aussi bien le moment du premier ordre (espérance mathématique) que celui du second ordre (variance et covariance du processus). Dans la procédure de Box et Jenkins, la non-stationnarité est repérée graphiquement (tendance, cycle long, saisonnalité explosive, modification de structure...) ou encore au moyen de la fonction d'autocorrélation et du spectre de la série brute (fonction d'autocorrélation lentement décroissante, spectre rouge...). Il n'existait pas avant les années 1980 d'analyse rigoureuse, de tests permettant de déceler cette non-stationnarité. En conséquence, les transformations utilisées étaient les filtres aux différences et la formule de Box Cox qui contient comme cas particulier le logarithmique des données. Dans ces conditions, il arrivait fréquemment que la transformation soit mal adaptée aux caractéristiques de la non-stationnarité ce qui avait pour effet d'introduire au sein de la chronique des mouvements parasites (par exemple l'artefact d'Adelman observé sur le spectre d'une série filtrée par les différences premières). Depuis les travaux de Nelson et Plosser (1982), les cas de nonstationnarité les plus fréquents sont analysés à partir de deux types de processus :

- les processus TS (Trend Stationnary) qui représentent une non-stationnarité de type déterministe ;
- les processus DS (Differency Stationnary) pour les processus non stationnaires aléatoires. Ils constituent, pour des chroniques saisonnières ou non, les modèles de référence pour la construction à l'origine des tests de racine unitaire en l'absence d'hétéroscédasticité.

--

Description des processus TS et DS

Nous n'envisageons dans cette section que le cas de processus non saisonniers.

A. Les processus TS

Un processus TS s'écrit : $x_t = f_t + \xi_t$ où f_t est une fonction polynomiale du temps, linéaire ou non linéaire et ξ_t un processus stationnaire de type ARMA.

Le processus TS le plus simple est représenté par une fonction polynomiale de degré 1. Ce processus s'écrit : $x_t = a_0 + a_1 t + \xi_t$.

B. Les processus DS

Les processus DS sont des processus que l'on peut rendre stationnaire par l'utilisation d'un filtre aux différences :

$$(1 - B)^d x_t = \beta + \xi_t$$

où ξ_t est un processus stationnaire de type ARMA ou encore un bruit blanc, $\beta \in \mathbb{R}$ et d l'ordre du filtre aux différences.

Ces processus sont souvent représentés, en utilisant le filtre aux différences premières ($d = 1$). Le processus est dit alors processus du premier ordre. Il s'écrit :

$$(1 - B)x_t = \beta + \xi_t$$

$$x_t = x_{t-1} + \beta + \xi_t$$

où ξ_t est un processus stationnaire de type bruit blanc (gaussien ou non).

L'introduction de la constante β dans le processus DS permet de définir deux processus différents :

$\beta = 0$: le processus DS est dit sans dérive.

Il s'écrit : $x_t = x_{t-1} + \xi_t$ Il s'agit d'un processus autorégressif d'ordre 1 avec paramètre $\Phi_1 = 1$ ou encore d'une équation de récurrence du premier ordre. Puisque ξ_t est un bruit blanc, ce processus DS porte le nom de modèle de marche au hasard ou de marche aléatoire (Random Walk Model).

Remarque 2

Pour étudier les caractéristiques de ce modèle, écrivons-le sous sa forme moyenne mobile infinie :

$$x_t = x_{t-1} + \xi_t$$

$$x_{t-1} = x_{t-2} + \xi_{t-1} \implies x_t = x_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t$$

$$x_{t-2} = x_{t-3} + \xi_{t-2} \implies x_t = x_{t-3} + \xi_{t-2} + \xi_{t-1} + \xi_t$$

etc.

Si le premier terme de la chronique est x_0 , le modèle s'écrit alors :

$$x_t = x_0 + \sum_{i=1}^t \xi_i$$

Les caractéristiques de ce processus sont (en supposant x_0 certain) :

$$E[x_t] = x_0$$

$$V[x_t] = t\sigma_\xi^2$$

$$\text{cov}[x_t, x_{t'}] = \sigma_\xi^2 \times \text{Min}(t, t') \quad \text{si } t \neq t'$$

Alors, on resumait par suite :

- un processus TS est prévisible par extrapolation de la variable temps.
- un processus DS est une marche au hasard (la meilleure prévision c'est la dernière valeur connue) si le corrélogramme des différences premières indique que ses termes sont non significativement différents de 0.

- un processus DS a une représentation ARMA en différences premières (un processus générateur existe donc) si le corrélogramme des différences premières indique que quelques termes sont significativement différents de 0.

1.1.2 Modélisation d'une série temporelle

On obtient une modélisation d'une série temporelle à partir de la décomposition classique, "décomposition de Persons" en fonction des quatre éléments suivants :

1. Tendence, noté (T_t) : mouvement à long terme (longue période).
2. Saisonnière, noté (S_t) : fonction périodique du temps (période courte).
3. Cycle, noté (C_t) : cycle d'affaires, fluctuation périodique (moyenne terme).
4. Résidu, noté (R_t) : partie irrégulière, correspondante à la notion d'écart au modèle ou encore bruit.

D'une manière générale, on peut proposer un modèle qui représente la série temporelle étudiée en combinaison des quatre éléments précédents. Pour cela, on a trois types de modèles : le premier est le modèle d'ajustement de forme additive ou multiplicative comme suit :

$$X_t := T_t + S_t + C_t + R_t \quad \text{ou} \quad X_t := T_t S_t C_t + R_t$$

Le deuxième type est le modèle autoprojectif, dont on suppose que X_t est une fonction de ces valeurs passées et d'une perturbation aléatoire

$$R_t : X_t := f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, R_t)$$

dans cette classe, on peut citer les modèles ARIMA, ARMA,...

Le troisième type est le plus important, c'est le modèle explicatif. Dans cette catégorie de modèle, la variable aléatoire X_t est exprimée en fonction d'un vecteur aléatoire Y_t et d'une perturbation aléatoire R_t :

$$X_t := f(Y_t, R_t),$$

où Y_t est soit déterministe ou aléatoire, dans ce dernier cas les processus $(Y_t)_t$ et $(R_t)_t$ ont certaines propriétés d'indépendance ou du non-corrélation.

Ces modèles sont les modèles de base de l'économétrie et nous les considérons essentiellement pour faire le lien entre eux et les modèles autoprojectifs. On a ainsi deux cas particuliers de modèle explicatif, modèle explicatif statique où les variables Y_t ne contiennent pas de valeurs passées de X_t et les R_t sont indépendantes entre eux. Le deuxième cas est le modèle explicatif dynamique, où les R_t sont autocorrélés et les Y_t contiennent des valeurs passées de X_t .

1.1.3 Modèle stationnaire

Les expériences aléatoires dépendants du temps sont représentés de la manière suivante :

Pour (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité, \mathbb{T} un ensemble non vide d'indice (par exemple : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \dots$ etc.), $X_t : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \varepsilon$ une fonction, qui associé à tout couple (t, ω) le processus $X_t(\omega)$, avec ε désignant l'espace d'états du processus. D'où :

- i- pour $t \in \mathbb{T}$, fixé : $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
- ii- pour $\omega \in \Omega$, fixé : $X_t(\omega)$ est une trajectoire.

Processus stochastique

Définition 1.1.3 :

Un processus stochastique défini sur \mathbb{T} noté $(X_t(\omega))_{t \in \mathbb{T}}$ ou simplement $(X_t)_t$, est une collection de variables aléatoires X_t de Ω à valeurs dans \mathbb{R} et il y a deux cas :

- • un processus en temps discrète si \mathbb{T} est discrète ; ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$).
- •• un processus en temps continue si \mathbb{T} est continue ; ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$).

Nous s'intéresserons aux modèles stochastiques, dont les éléments X_t de la série temporelle $(X_t)_t$ sont considérés comme des variables aléatoires. Par la suite on désigne par un modèle, le processus stochastique qui modélise la série temporelle.

Généralement, les variables d'une série $(X_t)_t$ ne sont ni indépendantes, ni identiquement distribuées. Les moyennes, variances et covariances de ces variables dépendent de leurs positions dans la série.

En particulier, si on suppose que $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty, \forall t \in \mathbb{T}$ ($(X_t)_t$), la serie est de carré intégrable alors :

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu_t, \quad \text{var}(X_t) = \sigma_t^2,$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_{t+k} - \mu_{t+k})], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.2 Introduction à l'analyses de fourier

Soit $(X_t)_t$ une série temporelle stationnaire, de fonction d'autocovariance γ . On utilise les principes généraux de la transformation de Fourier dont nous verrons tout à l'heure l'intérêt. On démontrera qu'à la suite des autocovariances $(\gamma_t)_t$ on peut toujours associer une fonction réelle $F_X(\lambda)$ sur $]-\pi, \pi]$, de la variable numérique λ telle que :

$$\gamma_t = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-it\lambda) dF_X(\lambda), \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

i désignant le nombre imaginire $i^2 = -1$.

Cette fonction est appelée "distribution spectrale" de la série $(X_t)_t$, elle est croissante, impaire et si elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e.

$$F_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_X(x) dx,$$

on substituera alors $f_X(\lambda)d\lambda$ dans la formule précédente, ce qui donne :

$$\gamma_h = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ih\lambda) f_X(\lambda) d\lambda, \quad h \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

Si la série de terme général $|\gamma(t)|$ est absolument convergente, dans ce càs on définie la densité spectrale par :

Définition 1.2.1 : "Densité spectrale"

La densité spectrale notée f , d'une série temporelle $(X_t)_t$ est une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \gamma(t) \exp(it\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

1.2.1 Propriétés de la densité spectrale**Propriété 1.2.1 :**

La densité spectrale est une fonction paire, continue et périodique de période 2π donnée par :

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \gamma(t) \cos(t\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Propriété 1.2.2 :

Comme on a la fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ ou la densité spectrale $f(\cdot)$, i.e.

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \exp(-it\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda. \quad (1.5)$$

Remarque 3

Pour un bruit blanc, on obtient les propriétés suivantes :

1. La densité spectrale d'un bruit blanc est constante en λ .
2. Tout processus stationnaire de densité spectrale constante est un bruit blanc.

1.2.2 Moments empiriques

En pratique, la moyenne, la fonction d'autocovariance, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale,... d'un modèle stationnaire sont inconnus et doivent être estimés à partir des observations.

Cependant, il est important d'étudier les principales propriétés asymptotiques des moments empiriques...

Supposons X_1, X_2, \dots, X_N l'ensemble d'observations disponibles (i.e. échantillon aléatoire), issu d'une série stationnaire $(X_t)_t$ de moyenne μ , l'estimateur naturel de μ est la moyenne empirique \bar{X} :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t,$$

avec

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{E}[X_t] = \mu \quad \text{et} \quad \text{var}(\bar{X}) = \mathbb{E}[(\bar{X} - \mu)^2] = \mathbb{E}[\bar{X}^2] - \mu^2.$$

Or

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] + \mu^2,$$

donc

$$\begin{aligned} \dots \text{var}(\bar{X}) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \mu)^2] + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] \\ &= \frac{\gamma(0)}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \gamma(i - j) \\ &= \frac{\gamma(0)}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \gamma(i - j) \\ &= \frac{\gamma(0)}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-i} \gamma(k) \\ &= \frac{\gamma(0)}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-k} \gamma(k) \\ &= \frac{\gamma(0)}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (N - k) \gamma(k) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \gamma(k), \end{aligned}$$

d'ou

$$\text{var}(\bar{X}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(\frac{N - |k|}{N^2}\right) \gamma(k).$$

Il est clair que si $\gamma(k) = 0$, $\text{var}(\bar{X}) = \frac{\gamma(0)}{N}$.

D'autre part, l'estimateur de la fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$, est donné par :

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu), \quad (1.6)$$

ce qui permet de définir la fonction d'autocorrélation empirique comme suit :

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\gamma}(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} \mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] \\ &= \left(\frac{N-k}{N}\right)\gamma(k) = \gamma(k) - \frac{k}{N}\gamma(k). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\hat{\gamma}(\cdot)$ donnée par (1.1) est un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais de la fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$.

Définition 1.2.2.1 : "Priodogramme "

Le périodogramme des observations est défini comme le module au carré de la transformation de Fourier discrète de ces observations, on le note $I_N(\cdot)$

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X_t \exp(-it\lambda) \right|^2.$$

Le plus souvent, on estime le périodogramme selon les fréquences de Fourier; i.e. $\lambda_k = 2k\pi/N$ pour $k = 1, \dots, N$, il constitue donc un estimateur de la densité spectrale $f(\lambda)$. En effet,

$$\begin{aligned} I_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \left(\sum_{t=1}^N X_t \exp(it\lambda) \right) \left(\sum_{t=1}^N X_t \exp(-it\lambda) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} X_t X_{t-k} \right) \exp(ik\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}(k) \exp(ik\lambda) \end{aligned}$$

Propriété 1.2.2.1 :

Le périodogramme $I_N(\lambda)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale $f(\lambda)$, mais il est non-convergent.

La non convergence du périodogramme n'interdit pas son utilisation. Même si l'esti-

mateur est sans biais, on peut avoir une bonne idée de sa forme générale ;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var} I_N(\lambda) = \begin{cases} 2f^2(\lambda), & \text{si } \lambda = 0, \pm\pi, \\ f^2(\lambda), & \text{si } \lambda \neq 0, \pm\pi. \end{cases}$$

De plus, les valeurs associées à des fréquences différentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) du périodogramme sont non corrélées i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov} I_N(\lambda_1), I_N(\lambda_2) = 0, \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Maintenant, on effectue la transformation de Fourier inverse de la relation :

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}(k) \exp(ik\lambda), \quad (1.7)$$

ce qui donne un estimateur de la fonction d'autocovariance (i.e. Autocovariance empirique) ;

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda_k) I_N(\lambda) d\lambda, \quad \text{avec} \\ \gamma(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda_k) f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

1.2.3 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

La fonction d'autocovariance d'une série temporelle $(X_t)_t$ est une suite $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$, avec

$$\gamma(h) := \text{Cov}(X_t, X_{t+h}),$$

c'est une fonction paire, semi-définie positive, i.e.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \geq 0,$$

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) = \text{var}(X_t), h \in \mathbb{Z}.$$

De même, on définit une suite $(\rho(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ qu'on l'appelle fonction d'autocorrélation de la série $(X_t)_t$:

$$\rho_k := \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{\text{var}(X_t) \text{var}(X_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

c'est une fonction paire, semi-définie positive, i.e.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \rho(t_i - t_j) \geq 0,$$

$$|\rho(k)| \leq \rho(0) = 1, k \in \mathbb{Z}.$$

1.3 Représentation des séries temporeiies

Les séries temporelles sont représentées par le modèles linéaire (modèles : AR, MA,...) et le modèle nonlinéaire (modèles : ARCH, GARCH,...). Dans notre memoire, on s'interêsse par le dernier type .

Définition 1.3.1 : " Opérateurs retard "

C'est l'opérateur linéaire noté L , qui associe à un processus $(X_t)_t$ le processus $(Y_t)_t$ tel que :

$$Y_t = LX_t := X_{t-1}.$$

On a la relation de récurrence suivante :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i L^i \right) X_t = \sum_{i=0}^n a_i X_{t-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De même, on définit les polynômes ϕ et ψ en L , de degré p (resp. q) par :

$$\Phi(L) := 1 + \alpha_1 L + \dots + \alpha_p L^p,$$

$$\Psi(L) := 1 + \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q,$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et β_1, \dots, β_q sont des constantes réels.

1.3.1 Modèles AR,MA,ARMA

Définition 1.3.2 : "Modèle Auto-Regressif d'ordre p "

Un modèle autoregressif d'ordre p noté $AR(p)$, est un processus stationnaire $(X_t)_t$ qui vérifie la relation suivante :

$$X_t := \xi_t + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j}, t \in \mathbb{Z},$$

où les $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des réelles et $(\xi_t)_t$ un bruit blanc (suite de variables aléatoires (i.i.d), centrée et de variance finie).

En fonction d'opérateur L , la relation précédente prend la forme :

$$X_t := \xi_t + \Phi(L)X_t.$$

Définition 1.3.3 : "Modèle Moyenne Mobile d'ordre q "

Un modèle moyenne mobile (Moving Average) d'ordre q noté $MA(q)$, est un processus stationnaire $(X_t)_t$ qui vérifie la relation suivante :

$$X_t := \xi_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \xi_{t-j}, t \in \mathbb{Z}.$$

Par la fonction d'opérateur retard L , on obtient :

$$X_t := \xi_t - \Psi(L)\xi_t.$$

Définition 1.3.4 : "Modèle Auto-Regressif Moyenne Mobile"

Une série temporelle stationnaire $(X_t)_t$, admet une représentation d'un modèle autoregressif moyenne mobile noté ARMA(p, q), si elle satisfait :

$$X_t := \xi_t + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j} - \sum_{k=0}^q \beta_k \xi_{t-k},$$

ou ce qui est équivalent à :

$$(1 - \Phi(L))X_t := (1 - \Psi(L))\xi_t,$$

avec ; i - $\alpha_p \neq 0, \beta_q \neq 0$.

ii - Les polynômes $\Phi(L)$ et $\Psi(L)$ ont leurs racines de modules strictement supérieurs à 1.

iii - $\Phi(L)$ et $\Psi(L)$ n'ont pas de racines communes.

iv - $(\xi_t)_t$ un bruit blanc : suite de variables aléatoires (i.i.d), centrée et de variance finie.

Remarque 1.3.1 :

Remarquons que les modèles AR(p) et MA(q) sont des cas particuliers de la représentation ARMA(p, q). Ainsi, un modèle AR(p) (resp. MA(q)) est un modèle ARMA(p, 0)

(resp. ARMA(0, q)).

De plus, dans le cas où $p = \infty$ (resp. $q = \infty$), on dit qu'une série temporelle $(X_t)_t$ admet la représentation d'un modèle autoregressif infini (resp. moyenne mobile infini) noté $AR(\infty)$ (resp. $MA(\infty)$).

1.3.2 Modèle GARCH(p, q)

Le modèle GARCH(p, q) est une suite de différence de martingale X_t , relativement à la filtration F_t :

$$X_t := \sigma_t \xi_t, \quad (1.8)$$

sa variance conditionnelle $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[X_t^2 | F_{t-1}]$ satisfaite pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ des constantes positifs données :

$$\sigma_t^2 := \alpha_0 \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2. \quad (1.9)$$

Pour $\sigma_t > 0$, $X_t := \sigma_t \xi_t$, on a

$$\mathbb{E}[\xi_t | F_{t-1}] = 0, \mathbb{E}[\xi_t^2 | F_{t-1}] = 1,$$

et les variables ξ_t sont indépendantes et identiquement distribuées, de plus ξ_t est indépendant de F_{t-1} , ce qui est équivalent à supposer que la loi conditionnelle de la variable $\xi_t = X_t/\sigma_t$ par rapport à F_{t-1} , est approximativement d'une distribution normale.

En utilisant les polynômes Φ et Ψ en L de degré p (resp. q), (1.9) prend la forme :

$$\sigma_t^2 := \alpha_0 + \Phi(L)X_t^2 + \Psi(L)\sigma_t^2. \quad (1.10)$$

Pour les conditions de stationnarité, on peut citer à titre d'exemple : Bougerol et Picard [5] pour un modèle GARCH(p, q), Nelson [48], pour le modèle GARCH(1, 1).

En effet, la série donnée par les équations (1.9) et (1.8) est strictement stationnaire si $\alpha_0 > 0$ et :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{k=1}^q \beta_k < 1.$$

Chapitre 2

Séries chronologiques et valeurs extrêmes

L'objectif de la théorie des valeurs extrêmes est de mesurer en terme de probabilité l'apparition des événements rares et autres catastrophes : grands sinistres, orages, et crises économiques, . . . etc.

2.1 valeurs extrêmes et indépendance

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité. Dans tout ce qui suit, on suppose que l'on dispose d'un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n où l'ensemble de n observations d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ extraite d'une série temporelle $(X_t)_t$, pour le moment indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), de même fonction de distribution (répartition) F :

$$F(x) := P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}.$$

On définit d'abord ce que nous appelons la statistique d'ordre.

Définition 2.2.1 : " Statistique d'ordre "

On appelle statistique d'ordre, l'application mesurable S de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$ à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$ classant les observations de la suite $(X_n)_n$ par ordre croissant ;

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{S} (X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}), \text{ avec } X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n},$$

de sorte que :

$$X_{1,n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } X_{n,n} := \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Le vecteur $(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$ est appelé l'échantillon ordonné, et $X_{k,n}$ étant la $k^{i\text{em}}$ statistique d'ordre. On notera dans la suite respectivement par : La fonction de distribution empirique basée sur les n premières variables aléatoires, est donnée par :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}, x \in \mathbb{R} \\ &= \frac{i}{n} \quad \text{pour } x \in]X_{i,n}, X_{i+1,n}]. \end{aligned}$$

La fonction des quantiles ou l'inverse généralisé de la fonction de distribution F noté par Q : Pour chaque entier $n \geq 1$

$$Q(s) := F^{-1}(s) = \inf\{x : F(x) \geq s\}, \text{ pour } 0 < s < 1.$$

De même, la fonction des quantiles empiriques Q_n est définie pour $n \geq 1$ par :

$$Q_n(s) = \inf\{x : F_n(x) \geq s\} = \begin{cases} X_{1,n} & \text{pour } s < 0, \\ X_{i,n} & \text{pour } \frac{i-1}{n} < s \leq \frac{i}{n}, 1 \leq i \leq n-1, \\ X_{n,n} & \text{pour } s > 1. \end{cases}$$

Les lois de maxima $X_{n,n}$ (resp. de minima $X_{1,n}$) de la statistique d'ordre associées à la suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires (i.i.d), sont données par :

.1 **Loi de maxima** $X_{n,n}$:

$$\begin{aligned} F_{n,n}(x) &= P\{X_{n,n} \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x\} \\ &= \prod_{k=1}^n P\{X_k \leq x\} = [F(x)]^n. \end{aligned}$$

.2 **Loi de minima** $X_{1,n}$:

$$\begin{aligned} F_{1,n}(x) &= P\{X_{1,n} \leq x\} = 1 - P\{X_{1,n} > x\} \\ &= P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x\} \\ &= \prod_{k=1}^n P\{X_k > x\} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P\{X_k \leq x\}) \\ &= [1 - F(x)]^n. \end{aligned}$$

Définition 2.2.2 : "Point extrême"

On note par x^+ (resp. x^-) le point extrême supérieur (resp. inférieur) de la distribution F (i.e. la plus grande valeur possible pour X_k peut prendre la valeur $+\infty$ (resp. $-\infty$)) au sens où

$$x^+ := \sup x : F(x) < 1, \text{ respectivement } x^- := \inf x : F(x) > 0.$$

Définition 2.2.3 : "Loi Asymptotique des valeurs extrêmes"

La loi asymptotique des valeurs extrêmes est la loi de la variable aléatoire Y , telle que :

$$X_{n,n} \xrightarrow{D} Y, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Concernant le comportement du maxima d'une suite de v.a (i.i.d), le résultat importante est fourni par le théorème de Fisher et Tippett (1928).

Théorème 2.2.1 :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires (i.i.d), s'il existe des constantes de normalisation (a_n) et (b_n) , $n \in \mathbb{N}$, avec $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\left(\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \right) \xrightarrow{D} G_h, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Alors G_h a la forme suivante :

$$G_h(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + hx)^{-\frac{1}{h}}) & \text{pour } h \neq 0, 1 + hx > 0, \\ \exp(-e^{-x}) & \text{pour } h = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On déduit les trois familles de distribution (dite loi standard ou traditionnelle) des valeurs extrêmes suivantes :

Gumbel (typeI) : $\wedge(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$.

Fréchet (typeII) :

$$\Phi_h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-h}), & x > 0, \text{ avec } h > 0. \end{cases}$$

Weibull(typeIII) :

$$\Psi_h(x) = \begin{cases} \exp(-(x)^{-h}), & x < 0, \text{ avec } h < 0. \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

2.2 valeurs extrêmes et dépendance

Il est clair que la théorie classique sur les variables aléatoires indépendantes mène à des intervalles de confiance qui sont plus courtes que celles qui prennent en considération la dépendance de la série étudiée. Dans ce qui suit, nous rappelons les principales mesures de dépendance, en particulier la dépendance finie, le α -mélangeance et le β -mélangeance. Pour cela, on peut se référer au livre de Doukhan [20] qui fournit une étude détaillée des différentes sortes de mélangeance.

2.2.1 Mesure de dépendance

On peut mesurer la dépendance entre le passé des variables aléatoires (X_k ; avant $k = m$) et le futur (X_k ; après $k = m$), suivant la vitesse avec laquelle leur séparation en $n = m$ augmente.

Définition 2.3.1 : "m-dépendance "

La série temporelle $(X_t)_t$ est dite m-dépendante (dépendance finie), si les vecteurs aléatoires (\dots, X_{t-1}, X_t) et $(X_{t+m+1}, X_{t+m+2}, \dots)$ sont indépendants, $\forall t \in \mathbb{Z}$. En outre, le "passé" et le "futur" sont indépendants si l'on fait abstraction des m "présent" variables, i.e.

- Les variables X_t et X_s sont dépendantes quand $|t - s| \leq m$.
- Les variables X_t et X_s sont indépendantes quand $|t - s| > m$.

Précisément, pour t_1, t_2, \dots, t_n on note :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

La m-dépendance correspond donc à :

Si : $s_1 < s_2 < \dots < s_p < t_1 < t_2 < \dots < t_q$, avec $t_1 - s_p > m$, alors :

$$F(x_1, \dots, x_p; s_1, \dots, s_p, y_1, \dots, y_q; t_1, \dots, t_q) = F(x_1, \dots, x_p; s_1, \dots, s_p)F(y_1, \dots, y_q; t_1, \dots, t_q).$$

L'une des mesure de dépendance importante que l'on va l'utiliser par la suite, est le β -mixing :

Définition 2.3.2 : " β -mélangeance"

Une série temporelle $(X_t)_t$ est dite β -mélangeante (β -mixing) ou absolument régulière, s'il existe une suite $\beta(\ell)$ qui tend vers 0 quand ℓ tend vers ∞ telle que :

$$\beta(\ell) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\sup_{A \in \beta_{m+\ell+1}^\infty} |P(A/\beta_1^m) - P(A)| \right] \rightarrow 0, \quad \forall m, \forall \ell, \quad (2.2)$$

avec :

$\beta_{m+\ell+1}^\infty$ est le σ -Algèbre engendré par $(X_{m+\ell+1}, X_{m+\ell+2}, \dots)$,

β_1^m est le σ -Algèbre engendré par (X_1, X_2, \dots, X_m) .

La suite $\beta(\ell)$ est appelé le coefficient de mélangeance.

Définition 2.3.3 : " α -mélangeance"

De même, une série temporelle $(X_t)_t$ est dite α -mélangeante (strong mixing), s'il existe une suite $\alpha(\ell)$ coefficient de mélangeance, qui tend vers 0 quand ℓ tend vers ∞ , telle que :

$$\alpha(\ell) := \sup_{A \in \beta_{m+\ell+1}^\infty, B \in \beta_1^m} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \quad \forall m, \forall \ell. \quad (2.3)$$

2.3 Etude d'index des queues de distribution

Cette section est consacrée à l'étude de quelques estimateurs de l'index des valeurs extrêmes, intervenant dans l'estimation des quantiles extrêmes. Dans le cas où l'index des valeurs extrême γ est positif, l'un des meilleurs estimateurs est celui de Hill (Hill (1975)) qui a été généralisé en 1989, par Dekkers, Einmahl et de Haan [12] sur tous les domaines d'attraction.

Aussi, Csörgrö, Deheuvels et Mason (1985) l'on régularisé par un noyau. Mais malheureusement, cet estimateur de type noyau n'est valable que pour $\gamma > 0$. Et c'est ainsi que Groeneboom, Lopuha et de Wolf (2003) ont introduit une nouvelle classe d'estimateurs à noyau dont la consistance forte de cette classe d'estimateurs a été établie par Necir, A.(2004) [44].

Dans cette section, on va étudier les comportements asymptotiques des estimateurs de l'index des queues de distribution de type Pareto ou l'index d'une série temporelle à variations régulières, sous des hypothèses sur la stationnarité et la dépendance... On se base seulement sur le cas d'un index positif (i.e. $\gamma > 0$).

Considérons la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ extraite d'une série temporelle stationnaire $(X_t)_t$ et soit $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ la statistique d'ordre associée à X_1, X_2, \dots, X_n et dont la fonction de distribution est à queue lourde, i.e. $\exists \alpha > 0, \exists c > 0$ tel que quand x tend vers ∞ :

$$\bar{F}(x) := P\{X_t > x\} \sim x^{-\alpha} L(x),$$

où $L(\cdot)$ est une fonction à variations lentes et α l'index extrême à estimer.

Ce qui permet de déterminer les quantiles extrêmes de la distribution F , typiquement $x_{pn} = F_{-1}(1 - p_n) = Q(1 - p_n)$ est la quantile extrême à estimer, et nous intéressons souvent au cas où pn soit très petit, parfois inférieur à $1/n$ (i.e. $p_n = O(1/n)$), à celle des queues de distribution.

Dans le cas d'indépendance, on dit que la de distribution F appartient au domaine d'attraction d'une fonction G_γ , s'il existe deux suites réelles b_n et $a_n > 0$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \geq x \right\} = G_\gamma(x).$$

Un des cas importante en applications financières, est celui où l'index γ de la distribution limite des valeurs extrêmes est positif ($\gamma > 0$). Dans ce cas, l'estimateur de Hill, est sans doute le plus utilisé dans la théorie des valeurs extrêmes, et la condition qu'une fonction de distribution F appartenant au domain d'attraction des lois des extrêmes G_γ , pour $\gamma > 0$ est équivalente à :

$$\Psi(\lambda, t) := \frac{Q(1 - \lambda t)}{Q(1 - \lambda)} - t^{-\gamma} \rightarrow 0, t > 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

une convergence que l'on peut lire comme une approximation pour λ assez petite (i.e. $\lambda = \frac{k_n}{n}$, pour $t = \frac{np_n}{k_n}$) :

$$x_{pn} := Q(1 - p_n) \approx Q\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \left(\frac{np_n}{k_n}\right)^{-\gamma} \approx X_{n-k_n, n} \left(\frac{np_n}{k_n}\right)^{-\hat{\gamma}} =: \hat{x}_{pn} \quad (2.5)$$

où $\hat{\lambda}$ est l'estimateur souhaitable pour λ , dépend de la $(k_n + 1)^{iem}$ statistique d'ordre

$X_{k_n+1,n}$ et la suite k_n vérifiée :

$$k_n \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{k_n}{n} \rightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

En utilisant la méthode de maximum de vraisemblance, B. M. Hill (1975) a proposé un estimateur de l'index des valeurs extrêmes ($\lambda > 0$) comme suit :

$$\hat{\gamma}^H = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log\left(\frac{X_{n-i+1,n}}{X_{n-k_n,n}}\right), \quad (2.7)$$

cet estimateur est largement étudié dans le cas i.i.d. A titre d'exemple, on peut citer en substance les travaux de : Hall (1982), Mason (1982, 88), de Haan et Resnick (1996), Davis et Resnick (1984)...

Chapitre 3

Entretien du modèle GARCH(1,1)

On a vu dans le chapitre 1 les définitions et les propriétés de modèle GARCH(p,q), en particulier pour p=q=1 et on voit le problème lorsque on veut appliquer divers résultats à des séries temporelles. Dans ce chapitre, on résout un problème au moins pour ce modèle GARCH(1,1). Les résultats restent les mêmes dans GARCH(p,q), juste pour un ARCH(p) ou ARCH(q) les résultats sont des cas particuliers.

3.1 propriétés statistiques d'une série temporelle

3.1.1 Classe des distributions de type Pareto

Étant donné une suite de variables aléatoires (i.i.d) $(X_n)_n$, de même fonction de distribution F , et soit $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$, avec $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ la statistique d'ordre associée. Le comportement des valeurs extrêmes est gouverné par le paramètre h (i.e. indice des valeurs extrêmes) qui est celui de la forme de la distribution généralisée des valeurs extrêmes G_h :

$$G_h(x) = \begin{cases} \exp(-(1+hx)^{-\frac{1}{h}}), & \text{pour } h \neq 0, 1+hx > 0, \\ \exp(e^{-x}), & \text{pour } h = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

S'il existe des constantes de normalisation $(a_n > 0)_n$ et $(b_n)_n \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = G_h, \quad (3.1)$$

pour tout point de continuité de G_h , alors G_h est de type (3.1) (Fisher et Tippett, 1982, Gnedenko, 1943). De plus, si (3.2) est satisfait pour la fonction de distribution cumulative F , alors elle appartient au domaine d'attraction de G_h ($F \in D(G_h)$). La distribution de

Pareto généralisé, notée F_{GPD} est donnée par

$$F_{GPD}(x) = 1 - \left(1 + \frac{xh}{\rho}\right)^{-\frac{1}{h}}, \quad \rho > 0, \quad 1 + \frac{xh}{\rho} > 0$$

La fonction des quantiles associées à F_{GPD} notée Q_{GPD} est définie par :

$$Q_{GPD}(t) = \begin{cases} \rho(1-t)^h - 1 & \text{si } h \neq 0, \rho > 0, \\ -\rho \log(1-t) & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

Dans le cas $h > 0$, $D(G_h)$ coïncide avec la classe des distributions de type Pareto avec l'indice $\frac{1}{h}$. C'est une classe de distribution à queue lourde, qui possèdent un point limite supérieur $x_F^+ = +\infty$, i.e.

$$1 - F(x) = x^{-\frac{1}{h}} L_F(x) \quad x > 0,$$

avec $L_F(\cdot)$ désigne une fonction à variation lente à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_F(tx)}{L_F(x)} = 1, \quad \forall t > 0,$$

le paramètre h mesure dans ce cas l'alourdissement de la queue de la distribution F , et comme exemple de modèle de type Pareto on a notamment : la distribution de Pareto généralisée, la distribution de Burr, et entre autres particulièrement la distribution marginale du modèle stationnaire GARCH,...

3.2 Etude empirique d'une série temporelle financière

Du point de vue de l'investisseur, le rendement de l'investissement est beaucoup plus intéressant que le prix de celui-ci, car il insiste plus sur le gain relatif réalisable, et puisque c'est le rendement qui détermine les profits que peut tirer l'actionnaire de son projet. De plus, les séries temporelles des rendements représentent le mieux les changements des prix, ce qui permet de faire des comparaisons entre compagnies et titres boursiers et d'avoir une prévision améliorée... Ces séries qui ont beaucoup de propriétés ne possèdent pas, en revanche, celles des prix, telles que la stationnarité, la volatilité,...

Ce chapitre sera donc consacré à l'étude des diverses propriétés statistiques, aux caractéristiques et comportements d'une série temporelle des rendements de l'indice boursier *S&P500* (*Standard and Poor's 500*).

Cet indice conçu par Standard and Poor's, s'appuie sur 500 (blue chips) américaines. Les actions étant choisies pour leur taille et leur liquidité et l'indice est pondéré par les capitalisations boirsières.

3.3 Propriétés statistiques de la série

3.3.1 Séries des prix et des rendements journaliers

Les premières études sur la loi de probabilité des prix boursiers ont été basées sur la loi normale, ou loi de Gauss. L'hypothèse normale sous-entend donc que la loi gaussienne modélise le mieux les variations relatives des rendements d'indice boursier, prix des actions ou des taux de change... En vue de tester cette hypothèse de normalité, le skewness et la kurtosis ont été mis à contribution. Les résultats obtenus doivent en principe se rapprocher des hypothèses couramment émises dans la théorie financière. Les données de notre étude sont issues du cite internet :

"www.chart2.finance.dcn.yahoo.com".

La figure 3.1 représente les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier *S&P500*, de la période allant du 03/01/1994 au 13/05/2004 (i.e. 10 ans), soit 2610 observations. Du fait que les marchés boursiers sont fermés pendant les fins de la semaine (i.e. Dimanche et Lindi) et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont pas donc pris en compte. Ainsi une année commerciale contient presque 250 jours ouvrables en moyenne.

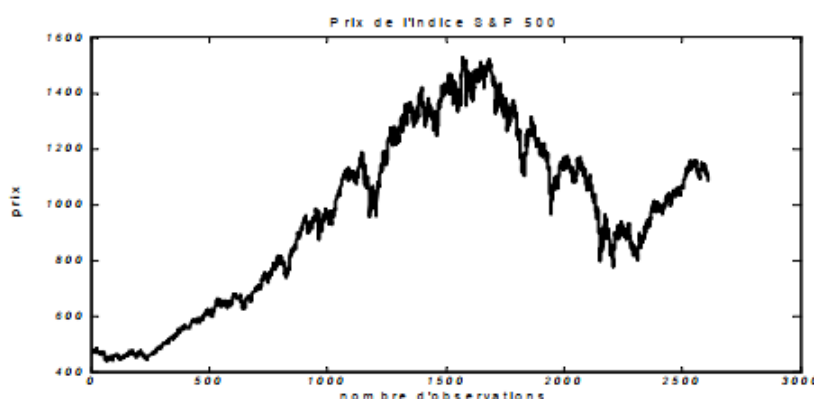


Fig. 3.1 - Série des prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier *S&P500*, de la période allant du 03/01/1994 au 13/05/2004.

Ces données (i.e. les prix de fermeture journalier) ont été transformées, ce qui nous permet d'étudier la série des rendements réalisables. Il existe beaucoup de mesures de rendement d'un indice boursier, celle fréquemment utilisée est le rendement géométrique ou le log-rendement, qui consiste à calculer le logarithme du différentiel des valeurs en t et $t - 1$:

Définition 3.3.1 : " Log-rendement "

Soit P_t le prix d'un titre au temps t , on définit donc le rendement de ce titre à l'instant t par :

$$R_t := \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \quad t = 1, 2, \dots$$

La figure 3.2 représente l'évolution de la série des rendements de l'indice $S\&P500$, de la période allant du 03/01/1994 au 13/05/2004, l'axe des abscisses présente le nombre d'observations (i.e. jours ouvrables) et l'axe des ordonnées présente le rendement de l'indice journalier. La première constatation que l'on peut faire est que la série est stationnaire, mais que l'on observe quand même des périodes de forte variation. La seconde est l'existence de quelques valeurs extrêmes.

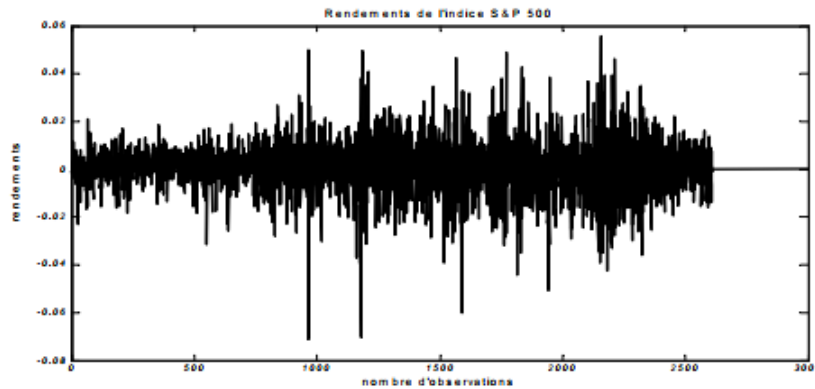


Fig. 3.2 - Série des rendements de l'indice boursier $S\&P500$, de la période allant du 03/01/1994 au 13/05/2004.

3.3.2 Moments empiriques

L'une des propriétés importantes de la distribution d'une série du rendement est qu'elle est à queue lourde. Pour étudier cette propriété, on donne les versions empiriques de la moyenne, variance, coefficient d'aplatissement et coefficient d'asymétrie de cette série, comme suit :

Etant donné N observations d'une série temporelle $(X_t)_t : t = 1, 2, \dots, N$, l'estimateur naturel de la moyenne notée \bar{X} et de la variance de X_t notée S^2 sont données respectivement par :

$$\bar{X} := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t, \quad S^2 := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2.$$

Une série de rendement $(X_t)_t$ possède un coefficient d'aplatissement (kurtosis) plus grand que celui d'un bruit blanc gaussien. Ce coefficient peut être calculé empiriquement. On a

ainsi :

$$k := \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(x))^4]}{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(x))^2]^2} \simeq \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^4}{\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2\right)^2}$$

De même, le coefficient d'asymétrie (skewness), qui vaut :

$$s := \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(x))^3]}{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(x))^2]^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^3}{\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Statistique	Valeur
Minimum	-0.0711
Maximum	0.0557
Moyenne	3.2810^{-4}
Variance	1.2810^{-4}
Kurtosis (k)	$6.2306 > 3$
Skewness (s)	$-0.1102 \neq 0$

Tableau 3.1 : Moments empiriques de la série des rendements.

Dans le tableau 3.1 sont représentés les différentes caractéristiques statistiques de la série des rendements de l'indice *S&P500*, sur la période couvrant les dix dernières années (1994-2004). Le premier constat dans ce tableau, est que la série des rendements de l'indice *S&P500* a une distribution leptokurtique : le coefficient d'aplatissement (kurtosis $k = 6.2306$) est plus grand que 3, celle de la distribution normale et le coefficient d'asymétrie (skewness $s = -0.1102$) est différent de zéro.

L'analyse du skewness et de la kurtosis conduit aux conclusions usuelles dans les études des cours boursiers. Elles sont différentes de 0 et 3, ce qui signifie que la distribution n'est pas normale mais plutôt asymétrique avec des queues épaisses caractérisant une distribution leptokurtique. Ce qui nous conduit au rejet de l'hypothèse de normalité.

De plus, on peut résumer ces propriétés dans la figure 3.3 qui représente l'histogramme de la série des rendements, et cela en partageant les rendements journaliers de l'indice *S&P500* en 60 classes. On remarque bien que la distribution empirique des rendements n'est pas normalement aplatie. Elle a en particulier des queues de distribution trop épaisses (kurtosis supérieure à 3).

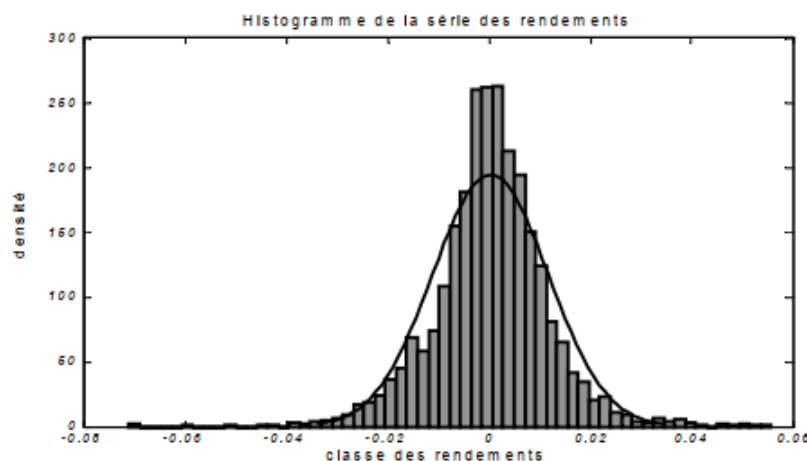


Fig. 3.3 - Héstogramme de la série des rendements de l'indice *S&P500*, du 03/01/1994 au 13/05/2004.

3.3.3 Hétéroscédasticité et Autocorrélation

La variance de la série du rendement change avec le temps, pour démontrer ce caractère important des séries des rendements, il est intéressant de subdiviser la série des données et de comparer ensuite l'écart type (i.e. $S = \sqrt{\text{var}(X)}$) de chacune des sous-séries obtenues...

sous-série	écart type	sous-série	écart type
1-250	2.4324	1506-1756	13.429
251-501	2.9131	1757-2007	6.7115
502-752	3.4637	2008-2258	35.019
753-1003	2.2736	2259-2509	27.512
1004-1254	47.472	2510-2610	0.1173
1255-1505	2.9734	/	/

Tableau 3.2 : Ecarts types $\times 10^{-8}$ des différentes sous-séries du rendement.

Le tableau 3.2 représente les écarts types des différentes sous-séries (i.e. 250 jours \approx 1 année). En analysant ce tableau, il paraît évident que la série des rendements de l'indice *S&P500* de la période allant du : 03/01/1994 au 13/05/2004, ne possède pas une variance (écart type) constante. Cette série démontre donc une certaine hétéroscédasticité.

Afin de vérifier ce résultat, il est nécessaire de s'intéresser aux fonctions d'autocorrélation. Pour étudier la présence d'autocorrélation dans la série du rendement, on utilise le test de *Ljung - Box* ou celui de Portmanteau connu encore sous le nom de Q-test.

Pour tester l'autocorrélation d'une série d'observation $(X_t, t = 1, \dots, N)$, d'une variance

finie ($\sigma^2 < \infty$) et sous-l'hypothèse qu'il n'existe pas d'autocorrélation, la statistique de *Ljung – Box* est donnée par :

$$Q(h) = N(N + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}^2(k)}{N - k},$$

avec $\hat{\rho}$: désigne la fonction d'autocorrélation empirique ;

$$\hat{\rho}_X^2(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^N (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^N (X_t - \bar{X})^2},$$

$$\hat{\rho}_{X^2}^2(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^N (X_t^2 - \hat{\sigma}^2)(X_{t-k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{i=1}^N (X_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^2.$$

Cette statistique suit asymptotiquement une distribution de X^2 à h degré de liberté. L'hypothèse que les coefficients d'autocorrélations sont nuls est rejetés au seuil α , lorsque la statistique Q est supérieure au X^2 au seuil $(1 - \alpha)$ avec h degré de liberté (i.e. $X_{1-\alpha}^2(h)$)

Les rendements ne démontrent qu'une faible autocorrélation (Fig 3.4), tandis que le carré et la valeur absolue des rendements sont autocorrélés à un niveau significatif. Il convient le plus souvent que le corrélogramme estimé à partir d'une série de N observations est nul, au taux 95%, si chacune des valeurs calculées appartient à l'intervalle $[-2/\sqrt{N}, 2/\sqrt{N}]$, et si l'ensemble de ces valeurs est distribué au hasard autour de zéro.

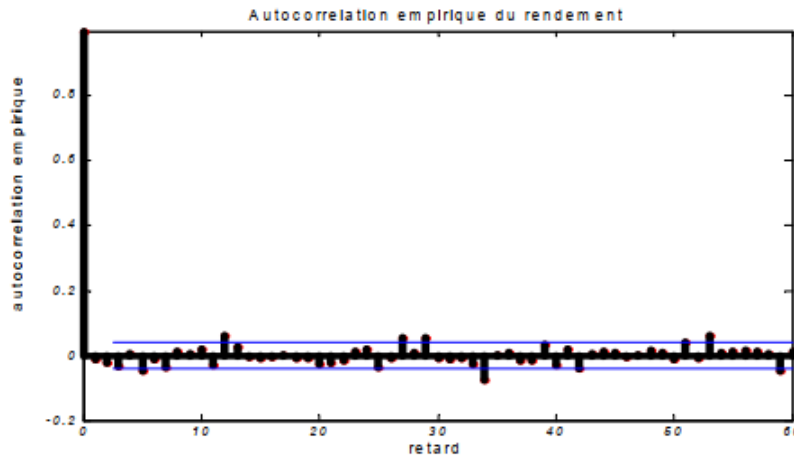


Fig. 3.4? Autocorrélogramme de la série du rendement de l'indice *S&P500*.

Si une série est bruit blanc strict (i.e. il n'existe aucune autocorrélation significative), alors le sont également les séries déduites du carré et de la valeur absolue de celle-ci. Or nous remarquons clairement la présence d'une dépendance de ces variables entre elles, traduites par des autocorrélations significatives durables pour les deux séries (Fig 3.5 et Fig 3.6). Ceci nous conduit au rejet de l'hypothèse d'absence d'autocorrélation des cours

et met en évidence la présence d'une hétéroscédasticité.

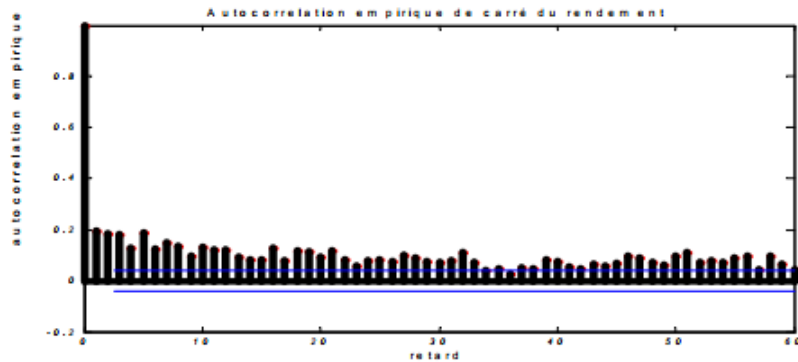


Fig. 3.5 - Autocorrélogramme de la série de carré du rendement de l'indice *S&P500*.

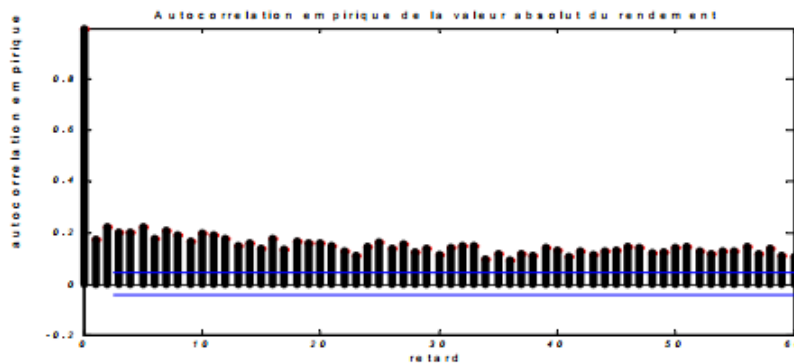


Fig. 3.6 - Autocorrélogramme de la série des valeurs absolues du rendement de l'indice *S&P500*.

A cause de la stationnarité, $\rho_X(k) = \text{corr}(X_t, X_{t-k}), \forall t$. en particulier, $\rho_X(k) = \text{corr}(X_n, X_{n-k})$, et quand n est la dernière valeur observée, associable au temps présent, nous dirons souvent que X_{n-k} est la variable associée au passé d'ordre k . Ainsi $\rho_X(k)$ représente l'expression du lien linéaire entre le présent et le passé d'ordre k .

3.4 Comparison Entre les Résultats

On peut comparer les deux modèles sel.

Conclusion

Les modèles étudiés dans ce mémoire sont très puissants et possèdent de très bons résultats dans la recherche statistique. Il est clair que les modèles auto-régressifs sont appropriés pour les prévisions à court terme bien qu'il existe d'autres groupes de modèles tels que les modèles GARCH et les modèles des algorithmes génétiques.

Bibliographie

- [1] Anderson, T.W. (1993). Goodness of fit tests for spectral distributions. *Ann. Statist.* 21, 830-847.
- [2] Bartlett, M.S. (1954). Problemes de l'analyse spectrale des séries temporelles stationnaires. *Publ. Inst. Statist. Université Paris III*. 3, 119-134.
- [3] Beirlant, J., de Wet, T. et Goegebeur, Y. (2004). A goodness-of-fit statistic for Pareto-type behaviour. Technical report, Universit Centre for Statistics, K.U.Leuven, (submitted : *Canadian Journal of Statistics*).
- [4] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional hetereskedasticity.*J. Econometrics.* 31, 307-327.
- [5] Bougerol, P. et Picard, N. (1992b). Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *J. Econometrics.* 52, 115-127.
- [6] Brockwell, P.J., et Davis, R.A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*, 2nd edition. Springer, New York.
- [7] Brockwell, P.J., et Davis, R.A. (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York.
- [8] Csörgö, M. et Révész, P. (1981). *Strong Approximations in Probability and Statistics*. Academic Press, New York.
- [9] Csörgö, S. et Viharos, L. (1998). Esimating the tail index. In *Asymptotic Methods in Probability and Statistics*, ed. Szyszkowicz, B., North- Hollet, 833-881.
- [10] Davis, R.A. et Resnick, S.L. (1984). Tail estimates motivated by extreme value theory. *Ann. Statist.* 12, 1467-1487.
- [11] Davis, R.A., Mikosch, T. et Basrak, B. (1999). Sample ACF of multivariate stochastic recurrence equations with application to GARCH. Technical Report, University of Groningen. disponible dans : www.math.rug.nl/~mikosch.
- [12] Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J., et de Haan, L. (1989). a moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Annals of Statistics.* 17, 1833-1855.
- [13] Dekkers, A.L.M. et de Haan, L. (1989). On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Annals of Statistics.* 17, 1795-1832.

- [14] de Haan, L. (1976). Sample extrêmes : an elementary introduction. *Statistica Neerlandica*. 30, 161-172.
- [15] de Haan, L., Resnick, S., Rootzén, H. et de Vries, C. (1989). Extremal behavior of solutions of a stochastic difference equation with applications to ARCH processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 32, 213-224.
- [16] de Haan, L. et Resnick, S. (1996). On asymptotic normality of the Hill estimator. Preprint, disponible au TR1155. ps.Z, [http : //www.orie.cornell.edu/trilst/trilst.html](http://www.orie.cornell.edu/trilst/trilst.html).
- [17] de Haan, L. et Stadtmüller, U. (1996). Generalized regular variation of second order. *J. Australian Math. Soc.*, (serie A), 61, 381-395.
- [18] Deheuvels, P. et Martynov, G. (2004). Karhunen-Loève Expansion for weighted Weiner processes and Brownian Bridges via Bessel functions. *Progress in Probability*, 55, 57-93. Birkhäuser Verlag, Basel.
- [19] Del Barrio, E., Custa-Albertos, J.A. et Matrán, C. (2000). Contributions of empirical and quantile to the asymptotic theory of goodness-of-fittestests. *Test*. 9, 1-96.
- [20] Doukhan, P. (1994). *Mixing : Properties and Examples*. Springer Verlag.
- [21] Drees, H. (2000). Weighted approximations of tail processes for β -mixing random variables. *Annals of Applied Probability*. 10, 1274-1301.
- [22] Drees, H. (2002). Extreme quantile estimation for dependent data with applications to finance. Preprint N° 68. University of Saarland. disponible dans : [www. math.uni-sb.de](http://www.math.uni-sb.de).
- [23] Embrechts, P., Klüppelberg, C. et Mikosch, T.(1996). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [24] Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedastic models with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometrica*.50, 987-1007.101
- [25] Engle, R.F et Bollerslev, T. (1986). Modelling the presistence of conditional variances. *Econometric Rev*. 5, 1-87.
- [26] Fisher, R.A. et Tippett, L.H.C. (1928). Limiting forms of the frequencydistribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 24, 180-190.
- [27] Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*. 44, 423-453.
- [28] Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1989). *Statistique et modèles économétriques*, Economica, Paris.
- [29] Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer-Verlag. New York.

- [30] Grenander, U. et Rosenblatt, M. (1984). *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, 2nd edition. Chelsea Publishing Co. New York.
- [31] Groeneboom, P., Lopuhaä, H.P. et de Wolf, P.P. (2003). Kernel-type estimators for the extreme value index. *Annals of statistics* (à paraître).
- [32] Hall, P. (1982). On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* 44, 37-42.
- [33] Hill, B.M (1975). A sample approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* 3, 1163-1174.
- [34] Hsing, T. (1995). On tail estimation using dependent data. *Ann. Statist.* 19, 1547-1569.
- [35] Kallenberg, O. (1983). *Random Measures*. Third edition. Akademie-Verlag, Berlin.
- [36] Kesten, H. (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.* 131. 207-248.
- [37] Mason, D. (1982). Lows of large numbers for sums of extreme values. *Ann. Probability.* 10, 754-764.
- [38] Mason, D. (1988). A strong invariance theorem for the tail empirical process. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* 24, 491-509.
- [39] Mikosch, T. et Stărică, C. (1998). *Limite Theory for the sample autocorrelations and extremes of a GARCH(1,1) process*. Technical Report. University of Groningen et Chalmers University of Gothenburg. disponible dans : www.math.rug.nl/~mikosch.102
- [40] Mikosch, T. et Stărică, C. (2002). *Changes of structure in financial time series and the GARCH model* Preprint. disponible dans : www.math.chalmers.se/~starica.
- [41] Mikosch, T. et Stărică, C. (2003). Non-stationarities in financial time series, the long range dependence and the IGARCH effects. *The Review of Economics et Statistics*. (à paraître). disponible dans : www.math.chalmers.se/~starica.
- [42] Vonmises, R.(1936). *La distribution de la plus grande n valeurs*. *Selected Papers II* (American Mathematical Society). 271-294.
- [43] Necir, A. (2003). On the kernel estimators of the tail index. *Bulltin of International Institut.* Berlin.
- [44] Necir, A. (2004). A functional law of the iterated logarithm for the kernel-type estimators of the tail index. *Jornal of Statidtical Planning and Inference.* (à paraître).
- [45] Necir, A. et Boukhetala, K. (2004). Estimating the risk adjusted premium for the largest reinsurance covers. *Compstat 2004*, Physica-Verlag (à paraître).
- [46] Necir, A. et Boukhetala, K. (2004). A goodness-of-fit test of tail indices via a weighted L2-Wasserstein distance. (à paraître).

- [47] Nelson, D.B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*. 6, 318-334.
- [48] Resnick, S. (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer, New York.
- [49] Resnick, S. et Stărică, C.(1995). Consistency of Hills estimator for dependent data. *J Applied probability*. 32. 139-167.
- [50] Resnick, S. et Stărică, C.(1998). Tail index estimation for dependent data. *Ann. Applied probability*. 29. 271-293.
- [51] Rootzén, H.(1995). The tail empirical process for stationary sequences. Perprint. Chalmers University of Technology.
- [52] Shorack, G. R. et Wellner, J. A. (1986). *Empirical processes with applications to statistics*. Wiley, New York.
- [53] Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. *Applied probability*. 11, 750-783...