REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre universitaire Salhi Ahmed -Naàma
Institut des Sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention le diplôme de Master En Mathématiques

Spécialité :Analyse fonctionnelle et EDPs

Présenté par : Benmokhtar Amin

Sur le thème

Sur l'existence de solutions pour quelques problèmes d'évolution

---

Soutenu devant le jury composé de :

Président :	Mr. Latti Fethi	MAA	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma
Examinateur :	Mr. Mekki Slimane	MAA	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma
Encadreur :	Mr. Khaldi Brahim	MCB	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma mère , à ma soeur , à mes frères , pour le soutient et l'aide qu'ils m'ont apportés durant mes ètudes et sans qui ce travail n'aurait pas pu avoir lieu.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai passé ces cinq années agréable , plaine de joie et de bonheur.

A tous mes enseignants.

Remerciement

Au nom de dieu le tout puissant, clément et miséricordieux.

je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de manière directe ou indirecte à l'aboutissement de ce travail.

En premier lieu, je remercie vivement monsieur **Khaldi Brahim** qui ma a fait l'honneur d'effectuer ce mémoire sous sa direction. j'ai apprécié son enthousiasme, sa disponibilité, son sens critique et ces pertinents conseils.

je tiens à remercier monsieur **Latti Fethi**, qui nous a fait l'honneur de présider le jury.

je tiens aussi à remercier les membres de jury monsieur **Mekki Slimane** qui nous on fait l'honneur de juger notre travail.

je remercie tous nos enseignants, sans qui ce travail n'aurait pas pu avoir lieu.

Résumé

Dans ce mémoire, nous focalisons notre attention essentiellement sur l'étude d'équations d'évolution du premier ordre en temps de la forme suivante :

$$(P_1)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, &]0,T[\times\Omega \\ u = 0 &]0,T[\times\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \end{cases}$$

Ainsi que l'étude d'équations d'évolution du deuxième ordre en temps de la forme suivante :

$$(P_2)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, &]0,T[\times\Omega \\ u = 0 &]0,T[\times\Gamma \\ u(0,.) = u_0 & u'(0,.) = u_1 \end{cases}$$

En premier lieu nous avons établi l'existence et d'unicité de solution faible pour ces deux classes d'équations d'évolution (P_1) et (P_2).

plus précisément on cherche une suite de solutions approchées dans des espaces de dimension finie ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie , et on majore la norme des solutions approchées pour montrer qu'une sous-suite converge.

Enfin, on passe à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ.

Mots Clés : Problèmes d'évolution, Méthode de Galerkin, Solutions approchées, l'existence de solution faible , Problème de la chaleur, problème des ondes, l'approche variationnelle.

Notations

Symbole	**Signification**
	.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$\partial\Omega$	Le bord de Ω .
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$dx = dx_1 dx_2 ... dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω .
Δu	Laplacien de la fonction u.
∇u	Gradient de u.
u^+	Partie positive de la fonction u.
u^-	Partie negative de la fonction u.
$u_n \to u$	Convergence forte de u_n vers u.
$u_n \rightharpoonup u$	Convergence faible de u_n vers u.
$\|u\|_p$	La norme de l'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
$\|u\|_H$	La norme de l'espace $H_0^1(\Omega)$.
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	Exposent critique de Sobolev.
q Exposant conjugué de p	.i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $(1 \leq p < \infty)$.
$E^{'}$	Espace dual de E.
$p.p$	Presque partout.
$\langle ., . \rangle$	Crochet de dualité entre E et son dual .
$(., .)$	Le produit scalaire

Introduction

Les équations d'évolution sont des équations différentielles portant sur des quantités dépendant de plusieurs variables, et en particulier du temps. Ces équations modélisent donc des lois censés décrire l'évolution d'une quantité au cours du temps, par exemple

- L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x)$$

qui décrit l'évolution de la température d'un corps.

- L'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x)$$

censée rendre compte de la propagation d'une onde.

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats concernant l'existence et l'unicité de solution de deux classes d'équations d'évolution faisant intervenir l'opérateur Laplacien sur un domaine borné régulier. Les démonstrations sont basées sur une méthode d'approximation, dite de Galerkin et le lemme Gronwall.

Ce Mémoire est organisée de la façon suivante : nous commençons par rappeler quelques outils de base de l'analyse fonctionnelle et nous citons quelques définitions et techniques utilisées dans ce travail. Ceci fait l'objet du premier chapitre.

Ensuite, dans le second chapitre, nous abordons la question de l'existence et l'unicité de solutions pour un problème d'évolution du premier ordre en temps. On s'intéresse tout particulièrement au problème de la chaleur suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, &]0,T[\times\Omega \\ u = 0 &]0,T[\times\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \end{cases}$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, de bord $\partial\Omega$, $]0,T[\subset\mathbb{R}$, $f\in L^2(0T\times\Omega))$ et $u_0\in L^2(\Omega)$. Nous utilisons les techniques de la méthode de Galerkin pour montrer que le problème (P_1) admet une solution unique $u\in L^2(0T,H_0^1(\Omega))$.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présentons un résultats d'existence pour un problème d'évolution du deuxième ordre en temps. Précisement nous etudions le problème suivant :

$$(P_2)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f, &]0,T[\times\Omega\\ u=0 &]0,T[\times\Gamma\\ u(0,.)=u_0 & u'(0,.)=u_1\end{cases}$$

où Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, $T\in\mathbb{R}^{+*}$, $f\in L^2(0T,L^2(\Omega))$, $u_0\in H_0^1(\Omega)$, et $u_1\in L^2(\Omega)$. Adoptant la même technique que dans le chapitre 2, nous montrons qu'il existe un unique élément $u\in C([0T],L^2(\Omega))\bigcap L^2(0T,H_0^1(\Omega))$, tel que u' appartienne à $L^2(0T,L^2(\Omega))$ et $u''\in L^2(0T,H^{-1}(\Omega))$ solution de problème (P_2).

Table des matières

Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 La Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les Espaces L^p

Définition 1.1 *[3]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $L^p(\Omega)$ est défini par

$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f$ *est mesurable et* $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty \}$
et
$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f$ *est mesurable et* $\exists\, c \geq 0$ *tel que* $|f(x)| \leq c$ *p.p* $\}$

Théorème 1.1 *[3]*
$L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_p$ est un espace de Banach , avec

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\|f\|_\infty = inf\{c \geq 0 : \ |f(x)| \leq c \ p.p\} \quad \forall f \in L^\infty(\Omega)$$

Définition 1.2 *[3]*
On définit $C_c(\Omega)$ comme l'espace des fonctions réelles continues à support compact, i.e :

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \ est\ continue\ et\ Supp(f)\ est\ compact\},$$

où $Supp(f)$ est le support de f défini par

$$Supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Théorème 1.2 *[3]*
L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tous $p \in [1, +\infty[$, c'est a dire que pour toute fonction de $L^p(\Omega)$ on peut l'approximer par une fonction continue à support compact.

1.2.2 Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles

Définition 1.3 *[4]*
Soit V un espace de Banach, p un élément de $[1, +\infty], T$ un élément de $\mathbb{R}_+^*, (0, T)$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans V, et on note $L^p(0T, V)$, l'espace des (classes de) fonctions

$$f :]0, T[\to V, \quad t \to f(t)$$

mesurable et qui vérifient :
1. Si $1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_{L^p(0T,V)} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_V dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$
2. Si $p = \infty, \quad \|f\|_{L^\infty(0T,V)} := \inf\{C > 0 / \|f(t)\|_V \leq C \quad p.p\} < +\infty$

Propriété 1.1 *[4]*

- Pour tout p élément de $[1, +\infty], \|f\|_{L^p(0T,V)}$ est une norme sur $L^p(0T, V)$.

- L'espace $L^p(0T, V)$ est un espace de Banach pour cette norme.

- Si l'espace V est de plus réflexif, pour $1 \leq p < \infty$, si q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors le dual de $L^p(0T, V)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^q(0T, V')$

- Si V et W désignent deux espaces de Banach, V inclus dans W, avec injection continue alors il existe une injection continue de $L^p(0T, V)$ dans $L^p(0T, W)$

- Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour $1 \leq p < \infty$, on a l'équivalence algébrique et topologique entre les espaces $L^p\left(0T, L^p(\Omega)\right)$ et $L^p(0T \times \Omega)$

1.2.3 Les distribution à valeurs vectorielles

Définition 1.4 *[4]*
Soit $]0, T[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et V un espace vectoriel normé. On appelle espace des distributions sur $]0, T\,[$ à valeurs dans V, et on note $\mathcal{D}'(0T, V)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(0T)$ dans V.

Propriété 1.2 *[4]*
- Pour tout f de $\mathcal{D}'(0T, V)$, tout φ de $\mathcal{D}(0T)$, la valeur de f en φ, notée $\langle f, \varphi\rangle$ appartient à V.

*- **Dérivation** : Soit f un élément de $\mathcal{D}'(0T, V)$, on définit la dérivée de f, et on note*

$$f' : \mathcal{D}(0T) \to V, \quad \varphi \to \langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$$

On montre que f' appartient à $\mathcal{D}'(0T, V)$. D'où toute distribution à valeurs vectorielles est indéfiniment dérivable.

*- **Distribution régulière** : Si f appartient à $L^1_{loc}(0T, V)$, on peut lui associer une distribution dite distribution régulière associée à f, encore notée f définie par*

$$f : \mathcal{D}(0T) \to V, \quad \varphi \to \langle f, \varphi\rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt$$

d'où si f appartient à $L^p(0T, V) \subset L^1_{loc}(0T, V), f$ est indfiniment dérivable au sens des distributions à valeurs vectorielles.

*- **Limite** : On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet f pour limite dans $\mathcal{D}'(0T, V)$ si on a*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(0T), \langle f, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi\rangle \qquad \textit{dans } V$$

1.2.4 Espace de sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrable, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles

Définition 1.5 *[1]*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $p \in \mathbb{R}$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$ *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est définie par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega), \ \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \quad \text{tel que} \\ \int\limits_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_\Omega g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

On note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$

Théorème 1.3 *[1]*
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$$

$W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$*. Il est de plus réflexif pour* $1 < p < \infty$ *et séparable pour* $1 \leq p < \infty$ *.*

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$
Il est clair que l'espace $H^1(\Omega)$ *est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2}$$

Théorème 1.4 *[1]*

Il existe une constante C *dépendant seulement de* $|\Omega| \leq \infty$ *telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in \mathbf{W}^{1,p}(\mathbf{\Omega}), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

autrement dit $\mathbf{W}^{1,p}(\mathbf{\Omega}) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbf{\Omega})$ *avec injection continue pour tout* $1 \leq p \leq \infty$*.*

De plus, lorsque Ω *est borné on a*

l'injection $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\overline{\Omega}})$ *est compacte pour* $1 < p \leq \infty$

l'injection $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\mathbf{\Omega})$ *est compacte pour* $1 \leq q < \infty$*.*

Définition 1.6 *[1]*
$W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_c^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$
L'espace $H_0^1(\Omega)$ *peut être définie comme suit :*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ : \ u = 0 \ \ sur \ \partial\Omega\}$$

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

Définition 1.7 *[1]*
Soit B_1, B_2 *deux espaces de Banach, on dit que* B_1 *s'injecte d'une façon continue dans* B_2 *si*

— $B_1 \subset B_2$
— *l'application identité* $i : B_1 \longrightarrow B_2$ *est continue i.e*$\|v\|_{B_2} \leq C\|v\|_{B_1}$.

et on dit que B_1 *s'injecte d'une façon compacte dans* B_2*, si l'image de tout borné de* B_1 *est relativement compact dans* B_2

Définition 1.8 *[1]*
On désigne par $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{-1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$
On note par $H^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^1(\Omega)$
Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut identifier $L^2(\Omega)$ *et son dual. Par conséquent, on a les inclusions*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues.

1.2.5 Espace de sobolev à valeur vectorielle

Soit V *et* W deux espace de Banach. On s'intéresse à l'espace vectoriel des éléments de $L^p(0T, V)$ dont la dérivée, prise dans $\mathcal{D}'(0T, V)$ s'identifie à un élément de $L^p(0T, W)$.

Définition 1.9 *[4]*
Soit $p \in [1, +\infty]$. *On définit l'espace*

$$W^{1,p}(0T, V) \ = \ \{f \in L^p(0T, V)/f' \in L^p(0T, V)\}$$

que l'on muni de la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(0T,V)} \ = \ \|f\|_{L^p(0T,V)} \ + \ \|f'\|_{W^p(0T,V)}$$

Définition 1.10 ***Espaces*** $W_p(0T, V, W)$ *[4]*
Pour $1 \leq p \leq +\infty$*, On pourrait aussi définir l'espace*

$$W_p(0T, V, W) \ = \ \{f \in L^p(0T, V)/f' \in L^p(0T, W)\}$$

$W_p(0T, V, W)$ *est un espace de Banach pour la norme naturelle.*

1.2.6 Résultats de régularité

L'intérêt d'appartenir à un tel sous-espace est d'avoir des propriétés de régularité.

Proposition 1.1 *[5]*
Soit p un réel, $1 \leq p \leq +\infty$, pour tout f de $W_p(0T, V, V)$, f admet un représentant continu sur $[0, T]$, ou encore $f \in C([0, T], V)$.

Proposition 1.2 *[5]*
Soit V et H deus espaces de Hilbert séparable , $V \subset H$ avec injection continue et densité, le dual de V est noté V', alors on a l'injection canonique continue des espaces suivants :

$$W_2(0T, V, V') \subset C([0, T], H)$$

On en déduit que pour tous f de $L^2(0T, V)$ tel que $L^2(0T, V')$, alors f admet un représentant continu sur $[0, T]$ à valeurs dans H.

Proposition 1.3 *[5]*
Soit V un espace de Hilbert séparable de dual V', pour tout f de $W_2(0T, V, V')$ on a :

$$\forall v \in V, \quad < f'(.), v > = \frac{d}{dt} < f(.), v > \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(0T)$$

Pour avoir plus de précisions sur les dernières propositions on peut consulter, entre-autres, l'ouvrage de R.Dautrey-J. L.Lions [7], tome 7 chapitre 16 et tome 8 chapitre 18.

1.3 Quelques inégalité d'analyse fonctionnelle

1.3.1 Inégalité de Poincaré

L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.

Proposition 1.4 *[1]*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, alors il existe $C > 0$ (dépendant de Ω) telle que

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Une conséquence très importante de cette inégalité est que

$$\|u\| = \|\nabla u\|_2 \textit{est une norme pour } H_0^1(\Omega)$$

L'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $|\nabla u|_2$ équivalent à la norme $\|u\|$

1.3.2 Inégalité de Young

Proposition 1.5 *[6] Soit $a, b \geq 0$ deux réel positif et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Alors on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

1.3.3 Inégalité de Hölder

Proposition 1.6 *[6] Pour f , g deux fonction mesurable et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. On a :*

$$\int_\Omega |f(x)\ g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

on peut écrire aussi

$$\|f\ g\|_1 \leq \|f\|_p\ \|g\|_q$$

Remarque : l'inégalité de Cauchy - Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hôlder pour (p = q = 2).

1.4 Quelques définitions et théorèmes

1.4.1 Fonction absolument continue

Définition 1.11 *[9]*
Une fonction $F : J \rightarrow C \quad (J \subset \mathbb{R})$, est dite absolument continue sur son intervalle de définition J, s'il existe une fonction intégrable f sur tout intervalle borné de J telle que pour $x, a \in J$:

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t)\ dt.$$

Remarque 1.1 *[9]*
Une fonction derivable n'est pas toujours absolument continue. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ , \sin x^{-2}, & si\ x \neq 0 \\ 0\ , & si\ x = 0 \end{cases}$$

a une dérivée qui n'est pas intégrable.

Remarque 1.2 *[9]*
Une fonction absolument continue F est derivable presque partout, et sa dérivée est presque partout égale à f .
D'une manière lapidaire, une fonction absolument continue est une fonction qui est " égale à l'intégrale de sa dérivée ".

1.4.2 Convergence forte et Convergence faible

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $(u_n)_{n\in N}$ est une suite dans E.

Définition 1.12
On dit que la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge fortement vers u dans E si

$$\|u_n - u\|_E \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Définition 1.13
On dit que la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge faiblement vers u dans E si

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u), \quad \forall \varphi \in E'$$

1.4.3 La topologie faible $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$

Soit E un espace de Banach. On note E' l'espace dual c'est à dire l'espace des formes linéaires et continue sur E.

Définition 1.14 *[1]*
La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la plus faible (la moins fine) sur E rendant continues toutes les applications $\phi \in E'$. On la note $\sigma(E, E')$.

Étant donnée une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ *de* E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.7 *[1]*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de E , on a :

1. *$x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ ssi $f(x_n) \to f(x)$ pout toute $f \in E'$*
2. *Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et*

$$\|x\| \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\|$$

4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ et $f_n \to f$ fortement dans E', alors $f_n(x_n) \to f(x)$*

1.4.4 La topologie faible* $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$

Soient E un espace de Banach et E' son dual Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_x(f) = < f, x >, \quad f \in E'$$

Lorsque x parcourt E, on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x \in E}$

Définition 1.15 *[1]*
La topologie faible sur E' est la topologie la plus faible sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$. On la note $\sigma(E', E)$*

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de E', on designe par $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.

Proposition 1.8 *[1]*
Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de E' , on a :

1. *$f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ ssi $\varphi_x(f_n) \to \varphi_x(f)$ pout toute $x \in E$*
2. *Si $f_n \to f$ fortement alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$*
   Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$ alors $f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$
3. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et*
$$\|f\| \leq \lim_{n \to +\infty} \inf \|f_n\|$$
4. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ et $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\varphi_{x_n}(f_n) \to \varphi_x(f)$*

Théorème 1.5 ***Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki*** *[1]*
L'ensemble
$$\overline{B}_{E'} = \{f \in E' : \|f\|_{E'} \leq 1\}$$
est compact pour la topologie faible $\sigma(E', E)$*

Définition 1.16 ***Espaces réflexifs et la compacité***
Soit E un espace de Banach. On rappelle que E s'injecte dans son bidule E'' via l'injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suit : pour chaque $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E' & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & < f, x > \end{array}$$

constitue une forme linéaire continue sur E' c'est-à-dire un élément de E'' noté J_x : On a donc
$$J_x(f) = < f, x > \quad \forall x \in E, \; \forall f \in E'$$

J est une isometries de E sur E'' i.e $\|J_x\|_{E'} = \|x\|_E$ pour tous $x \in E$, en effet

$$\|J_x\|_{E'} = \sup_{\|J_x\|_{E'} \leq 1} |J_x(f)| = \sup_{\|J_x\|_{E'} \leq 1} | < f, x > | = \|x\|_E$$

Théorème 1.6 ***Kakutani*** *[1]*
Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si

$$\overline{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$

1.5 Méthode variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des EDPs est de remplacer l'équation par une formulation équivalente dite variationnelle obtenue en intégrant une équation multipliée par une fonction quelconque dite fonction teste.

Nous commençons par donner quelque résultat essentielle.

Théorème 1.7 ***Formules de Green*** *[8]*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un ouvert borné de classe C^1. Alors si $u, \phi \in H_0^1$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \phi(x) dx = -\int_\Omega \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} u(x) dx + \int_{\partial\Omega} u\, \phi\, \eta_i\, ds$$

où η_i est la i-ème composante de la normale extérieure à Ω
Cette formule est la généralisation de l'intégration par parties dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Corollaire 1.1 *[8]*
Si $u \in H^2(\Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u(u)\, \phi(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \phi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, \phi\, ds$$

avec $\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\nabla u, \eta)$.

1.5.1 Solution classique (solution forte)

Définition 1.17
Une Solution classique (on parle aussi de solution forte) de (P) est une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ce qui implique que le second membre de f doit appartenir à $C(\Omega)$

Remarque 1.3
Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontré l'existante d'une solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation ***classique*** *par une formulation, dite* ***variationnelle****.*

1.5.2 Formulation variationnelle

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un ouvert borné de classe C^1. On considère le problème suivant :

$$P : \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $\phi \in H^2(\Omega)$ et intégrant sur Ω on aurra :

$$\int_\Omega \Delta u(x)\ \phi(x)\ dx \ = \ -\int_\Omega f(x,u)\ \phi(x)\ dx \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla \phi(x)\ dx \ = \ \int_\Omega f(x,u)\ \phi(x)\ dx \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

Cette écriture s'appelle la formulation variationnelle du problème (P).
La solution u de ce problème est un point critique de la fonctionnelle

$$J(u) \ = \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\ dx \ - \ \int_\Omega F(x,u)\ dx,$$

avec

$$F(x,u) \ = \ \int_0^u f(x,s)\ ds$$

J est dite la fonctionnelle d'énergie.

Chapitre 2

Problème d'évolution du premier ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous abordons la question de l'existence de solutions pour un problème d'évolution du premier ordre en temps. plus précisément on cherche une suite de solutions approchées dans des espaces de dimension finie pour un problème de la chaleur, et on majore la norme des solutions approchées pour montrer qu'une sous-suite converge.

2.2 Position du problème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de bord $\partial\Omega$, $]0, T[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Étant donné f un élément de $L^2(0T \times \Omega))$, u_0 un élément de $L^2(\Omega)$, on appelle **problème de la chaleur**, la recherche d'une solution u :

$$]0, T[\times\Omega \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto u(t, x)$$

vérifiant :

$$P : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, &]0, T[\times\Omega \\ u = 0 &]0, T[\times\Omega \\ u(0, .) = u_0 & \end{cases}$$

Ces équations modélisent, au cours du temps, la température u d'un milieu , homogène, isotrope, soumis à une source de chaleur f , la température étant supposée nulle sur le bord $\partial\Omega$ et de valeur initiale u_0.
On dit que l'on a un problème de Cauchy, car on impose la valeur initiale de la

fonction u en $t = 0$. Dans l'exemple proposé le problème est de **Cauchy-Dirichlet** car la fonction doit être nulle sur le bord $\partial\Omega$ du domaine, ceci pour t dans $]0, T[$.

2.3 Résultat d'existance

Théorème 2.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout f de $L^2(0T, L^2(\Omega))$, pour tout u_0 de $L^2(\Omega)$, il existe un unique élément u de $L^2(0T, H_0^1(\Omega))$, tel que $u' \in L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$ vérifiant :

$$P : \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} < u(t), v > + a(u(t), v) =< f(t), v >, & \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ } dans \text{ } \mathcal{D}'(0T) \\ u(0, .) = u_0, \end{cases}$$

où $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx.$

Remarque 2.1
Comme on a la double inclusion : $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$
l'injection de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ étant continue et dense, on a alors :

$$u \in W_2(0T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \Rightarrow u \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$$

d'ou l'expression $u(0) = u_0$ a un sens.

De la proposition 1.3 , on déduit

$$\frac{d}{dt} < u(t), v > = < \frac{d}{dt} u(t), v >$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad dans \ \mathcal{D}'(\Omega)$$

d'où le corollaire :

Corollaire 2.1
Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, alors pour tout f de $L^2(0T, L^2(\Omega))$, pour tout u_0 de $L^2(\Omega)$ il existe un unique u de $L^2(0T, H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0T, L^2(\Omega))$, solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \partial\Omega \\ u(0, .) = u_0 \end{cases}$$

2.4 Démonstration du théorème 2.1

2.4.1 Unicité

Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème alors $w = u_1 - u_2$ vérifie :

$$\begin{cases} \left(\frac{dw}{dt}, v\right) + a(w,v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ w(0) = 0 \, . \end{cases}$$

Soit $v = w$, alors on a :

$$\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 + a(w,w) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\|w\|_2^2 \leq 0 \quad \Rightarrow w(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

2.4.2 Existence

La méthode utilisée s'appelle la méthode Galerkin, elle se décompose en quatre étapes :

2.4.2.1 Recherche de solutions approchées

a_1) *Rappel : Construction de solutions approchées dans des espaces de dimension finie*

* Comme V est séparable, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de V , vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \textit{toute famille finie de vecteurs est libre} \,, \\ \textit{si } V_m \textit{ dsigne l'espace vectoriel engendr par } (u_K)_{1\leq K\leq m}, \textit{alors } V = \overline{\cup_{m\in\mathbb{N}^*} V_m} \end{cases}$$

* Résolution dans les espaces vectoriels V_m : On cherche à appliquer le théorème suivant :

Théorème 2.2 ***Cauchy-Lipschitz-Picard*** *[12]*
Soient $\mathbb{R}^m$ muni de sa norme $\|.\|, I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, supposée globalement lipschitzienne en y au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K, y, z \in \mathbb{R}^m$,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y\,(t_0) = x \end{cases}$$

admet une unique solution $t \mapsto y(t)$ qui est globale (définie sur I tout entier).

a_1) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs de $H_0^1(\Omega)$ telle que toute famille finie soit libre, et que, si on note V_m l'espace vectoriel engendré par $(v_1, v_2, ..., v_m)$, on ait :

$$H_0^1(\Omega) \;=\; \overline{\cup_{m\in\mathbb{N}^*} V_m}, \qquad L^2(\Omega) \;=\; \overline{\cup_{m\in\mathbb{N}^*} V_m}$$

pour les topologies considérées. En particulier

$$\forall u_0 \in L^2(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists u_{0m} \in V_m \text{ tels que}$$
$$u_0 \;=\; \lim u_{0m} \;\text{ dans } L^2(\Omega) \quad et \quad u_{0m} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} v_i$$

Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$ on note P_m le problème suivant :
trouver $u_m \;=\; \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) v_i$ dans V_m vérifiant

$$P_m \begin{cases} < \frac{d}{dt} u_m, v_j > + a(u_m, v_j) \; = < f, v_j >, \quad \forall j, 1 \le j \le m & (1, j) \\ \qquad u_m(0) = u_{0m} \end{cases}$$

Le problème P_m équivaut à un système différentiel linéaire d'ordre un sur $\mathbb{R}^m$. On définit les vecteurs

$$g_m \;=\; (g_{1m}, ..., g_{mm}), \qquad f_m \;=\; (< f, v_1 >, ..., < f, v_m >)$$

et les matrices

$$B = [(v_i, v_j)]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} \quad , \qquad A = [a(v_i, v_j)]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$$

Les vecteurs v_i étant linéairement indépendants, la matrice B_m est inversible, alors g_m est solution de :

$$P'_m \begin{cases} g'_m \;+\; B_m^{-1} A_m(g_m) \;=\; B_m^{-1}(f_m) \\ g_m(0) \;=\; (\alpha_{im})_{1 \le i \le m} \;=\; g_{0m}. \end{cases}$$

L'application F_m définie par :

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ g_m \mapsto F(g_m) \;=\; B_m^{-1} A_m(g_m) \;+\; B_m^{-1}(f_m)$$

est lipschitzienne, on déduit du théorème de **Cauchy-Lipschitz-Picard** l'existence de

$$g_m \;\in\; \mathcal{C}([0,T]) : \begin{cases} g'_m \;=\; F_m(g_m) \\ g_m(0) \;=\; g_{0m}. \end{cases}$$

On a plus précisément le résultat suivant :

$$u_m \;\in\; \mathcal{C}([0,T], V_m), \quad u'_m \;\in\; L^2(0T, V_m)$$

2.4.2.2 Majorations dite "à priori" des solutions $\mathbf{u_m}$

On multiplie chaque équation (1 ,j) par g_{im} on les ajoute membre à membre pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 \;+\; a(u_m(t), u_m(t)) \;= < f(t), u_m(t) >$$

Pour tout t de $]0, T[$ on intègre cette équation sur $(0, t)$ et on déduit :

$$\frac{1}{2}\|u_m(t)\|_2^2 \;+\; \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 \, dx \, dt \;=\; \int_0^t \int_\Omega f(t) u_m(t) \, dx \, dt \;+\; \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2$$

puis, on utilise Hölder, on obtient :

$$\frac{1}{2}\|u_m(t)\|_2^2 \;+\; \int_0^t | \; u_m(t)\|_H^2 \; dt \;\leq\; \int_0^t \|f(t)\|_2 \; \|u_m(t)\|_2 \; dt \;+\; \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2$$

Comme $u_0 \;=\; \lim\limits_{m\to\infty} u_{0m}$ dans $L^2(\Omega)$, il existe une constante $C \;>\; 0$ telle que l'on ait pour tout m de $\mathbb{N}^*$ $|u_{0m}| < c$, en utilisant le fait que $\|u_m(t)\|_2 \;\leq\; \|u_m(t)\|_H$ et l'inégalité $|ab| \;\leq\; \frac{a^2}{2} \;+\; \frac{b^2}{2}$, on déduit :

$$\|u_m(t)\|_2^2 \;+\; \int_0^t | \; u_m(t)\|_H^2 \; dt \;\leq\; \int_0^t \|f(t)\|_2 \; dt \;+\; c$$

Comme $f \;\in\; L^2(0T, L^2(\Omega))$, on déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\|u_m(t)\|_2^2 \;+\; \int_0^t | \; u_m(t)\|_H^2 \; dt \;\leq\; C$$

2.4.2.3 Passage à la limite

Du théorème 2.1, on déduit les résultats suivant :

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est borné dans $L^\infty(0T, L^2(\Omega))$

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est borné dans $L^2(0T, H_0^1(\Omega))$

et comme $-\Delta$ est un opérateur borné, linéaire et continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^{-1}(\Omega)$

la suite $(-\Delta u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est borné dans $L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$

Les espaces $L^2(0T, H^2(\Omega))$, $L^2(0T, H_0^1(\Omega))$ et $L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$ sont réflexifs séparables, de plus

$$L^\infty(0T, L^2(\Omega)) \;=\; (L^1(0T, L^2(\Omega)))'$$

avec $L^1(0T, L^2(\Omega))$ est un espace de Banach séparable. Donc, on déduit qu'il existe une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ extraite de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$, u un élément de

$$L^2(0T, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0T, L^2(\Omega))$$

tels que

$$\begin{cases} u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u & dans & L^\infty(0T, L^2(\Omega)) \\ u_p \rightharpoonup u & dans & L^2(0T, H_0^1(\Omega)) \\ -\Delta u_p \rightharpoonup -\Delta u & dans & L^2(0T, H^{-1}(\Omega)) \end{cases}$$

On admet que la convergence faible dans $L^p(0T, V)$ entraîne la convergence dans $\mathcal{D}'(0T, V)$ on déduit

$$\begin{array}{rcl} u_p \rightarrow u & dans & \mathcal{D}'(0T, H_0^1(\Omega)) \\ -\Delta u_p \rightarrow -\Delta u & dans & \mathcal{D}'(0T, H^{-1}(\Omega)) \end{array}$$

Reste à montrer que u est solution du problème (P) : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :
$\forall j, \quad j \leq p \qquad \frac{d}{dt} < u_p(t), v_j > \; + a(u_p(t), v_j) \; = < f(t), v_j > \quad dans\ \mathcal{D}'(0T)$

ce qui implique, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0T)$

$$-\int_0^T < u_p(t), v_j > \varphi'(t)\, dt \; + \int_0^T a(u_p(t), v_j)\, \varphi(t)\, dt \; = \int_0^T < f(t), v_j > \varphi(t)\, dt$$

On utilise la convergence faible de la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ pour obtenir

$$-\int_0^T < u(t), v_j > \varphi'(t)\, dt \; + \int_0^T a(u(t), v_j)\, \varphi(t)\, dt \; = \int_0^T < f(t), v_j > \varphi(t)\, dt$$

Puis comme $H_0^1(\Omega) = \overline{\cup_{m\in\mathbb{N}^*} V_m}$ on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(0T)$

$$-\int_0^T < u(t), v > \varphi'(t)\, dt \; + \int_0^T a(u(t), v)\, \varphi(t)\, dt \; = \int_0^T < f(t), v > \varphi(t)\, dt$$

Donc

$$\frac{d}{dt} < u(t), v > \; + a(u(t), v) \; = < f(t), v > \qquad dans\ \ \mathcal{D}'(0T) \quad pour\ tout\ \ v \in H_0^1(\Omega)$$

d'où , u est une solution du problème (P). De plus $u' \in L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$.

2.4.2.4 Conditions initiale, on montre que $\mathbf{u(0) = u_0}$

De la proposition 1.2 on déduit que $u \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\Omega))$. On choisit une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\psi(0) \neq 0 \quad et \quad \psi(t) = 0\ , \quad \forall t\ \in\ V_T \quad \text{avec} \quad V_T \text{ un voisinage de } T\ .$$

Alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $\quad \psi v\ \in\ L^2(0T, H_0^1(\Omega))$, ce qui permet d'écrire

$$\int_0^T < u'(t), v > \ \psi(t)\ dt\ =\ -\int_0^T < u(t), v > \ \psi'(t)\ dt - \ < u(0), v > \ \psi(0) \quad (2.1)$$

$$= \int_0^T < f(t), v > \psi(t)\ dt\ -\ \int_0^T a(u(t), v)\, \psi(t)\ dt$$

Comme on a :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists w_{\in} V_p\ :\ v\ =\ \lim w_p \quad dans\ H_0^1(\Omega)$$

on a les mêmes égalités pour les solutions approchées et on obtient

$$\int_0^T < u_p'(t), w_p > \ \psi(t)\ dt\ =\ -\int_0^T < u_p(t), w_p > \ \psi'(t)\ dt - \ < u_{0p}, w_p > \ \psi(0)$$

et donc

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^T < u_p'(t), w_p > \ \psi(t)\ dt\ =\ -\int_0^T < u(t), v > \ \psi'(t)\ dt - \ < u_0, v > \ \psi(0) \quad (2.2)$$

$$= \int_0^T < f(t), v > \ \psi(t)\ dt\ -\ \int_0^T a(u(t), v)\, \psi(t)\ dt$$

De 2.1 et 2.2 pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $\quad < u(0), v > = < u_0, v > \Rightarrow\ u(0)\ =\ u_0\,.$

Chapitre 3

Problème d'évolution du deuxième ordre

3.1 Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ, T dans $\mathbb{R}^{+*}$. Étant donné f un élément de $L^2(0T, L^2(\Omega))$, u_0 élément de $H_0^1(\Omega)$, u_1 élément de $L^2(\Omega)$, on appelle **problème des ondes**, la recherche d'une solution u :

$$]0, T[\times\Omega \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto u(t, x)$$

vérifiant :

$$P : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, &]0, T[\times\Omega \\ u = 0 &]0, T[\times\Gamma \\ u(0, .) = u_0 & u'(0, .) = u_1 \end{cases}$$

Lorsque $f = 0$, les équations décrivent la propagation, au cours du temps de petites perturbations u de la pression, dans un milieu Ω , celles-ci étant nulles sur Γ, de perturbation initiale u_0, de vitesse de perturbation u_1, souvent appelé problème des ondes.
On dit que l'on a un problème de Cauchy, car on impose u et u' au temps initial $t = 0$. On note $a(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$.

3.2 Résultat d'existence

Théorème 3.1
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ, variété de dimension $n-1$. pour tout f de $L^2(0T, L^2(\Omega))$, tout u_0 de $H_0^1(\Omega)$, tout u_1 de $L^2(\Omega)$, il existe un unique élément

u de $C([0T], L^2(\Omega)) \bigcap L^2(0T, H_0^1(\Omega))$*, tel que* u' *appartienne à* $L^2(0T, L^2(\Omega))$ *et* u'' *à* $L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$ *solution de :*

$$P.V. \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u,v) + a(u,v) = (f,v), & \mathcal{D}'(0T),\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

Proposition 3.1
Avec les mêmes hypothèses, il existe un unique u solution du problème (P.V), vérifiant :

$$u \in L^2(0T, H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^2(0T, L^2(\Omega)), \quad u'' \in L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$$

Le théorème 3.1 est une conséquence de la proposition 3.1. En effet :

$$\begin{cases} u \in L^2(0T, H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^2(0T, L^2(\Omega)) & \Longrightarrow u \in C([0,T], L^2(\Omega)), \\ u' \in L^2(0T, L^2(\Omega)), \quad u'' \in L^2(0T, H^{-1}(\Omega)) & \Longrightarrow u' \in C([0,T], H^{-1}(\Omega)). \end{cases}$$

ce qui justice l'existence de $u(0)$ *et* $u'(0)$*, dont on verra qu'ils vérifient* $u(0) = u_0$ *et* $u'(0) = u_1$

Corollaire 3.1
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, de bord* Γ*, variété lipsehitzienne de dimension* $n-1$*, alors pour tout* f *de* $L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$*, tout* u_0 *de* H_0^1*, tout* u_1 *de* $L^2(\Omega)$*, il existe un unique u solution du problème P.*

Démonstration du corollaire : Il suffit de remarquer que :

$$u = 0 \ sur \ ]0,T[\times\Gamma \iff u(t,.) \in H_0^1(\Omega),$$

et l'égalité variationnelle (P.V) équivaut à $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$, car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

3.3 Démonstration du théorème 3.1

3.3.1 Unicité

Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème alors $w = u_1 - u_2$ vérifie :

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2 w}{dt^2}, v\right) + a(w,v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1) \\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0. \end{cases}$$

Comme $w'(t)$ n'appartient pas à $H_0^1(\Omega)$, on ne peut pas remplacer v par $w'(t)$ dans (1). II faut introduire une fonction auxiliaire :

$$\forall s \in]0,T[,\ soit\ \psi\ :]0,T[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(\sigma)d\theta, & t \leq s, \\ 0, & t \geq s, \end{cases}$$

$$\psi'(t) = w(t),\ \forall t \leq s \quad \psi(t) = w_1(t) - w_1(s) \quad avec \quad w_1(t) = \int_0^t w(\sigma)d\theta.$$

Alors $(w'', \psi) + a(w, \psi) = 0$, soit :

$$-\int_0^s (w', \psi')dt + \int_0^s a(w, \psi)\ dt \ = \ 0 \implies$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}|w(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}a(w_1(t), w_1(t))dt - \int_0^s \frac{d}{dt}a(w_1(t), w_1(s))dt = 0$$

ce qui donne, comme $w(0) = 0$ et $w_1(0) = 0$:

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}||w_1(s)||^2 = 0 \Rightarrow w(s) = 0 \quad \forall s \in]0, T[\ .$$

3.3.2 Existence

3.3.2.1 Recherche de solutions approchées

On a :

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \implies \exists (u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}\ , \quad u_{0m} \in V_m\ , \quad u_0 = \lim_{m\to\infty}(u_{0m}) \quad dans \quad H_0^1(\Omega)$$

$$u_1 \in L^2(\Omega) \implies \exists (u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}\ , \quad u_{1m} \in V_m\ , \quad u_1 = \lim_{m\to\infty}(u_{1m}) \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} v_i\ , \quad u_{1m} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} v_i$$

On cherche $u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^m g_{im}(t)v_i$ solution du problème P_m :

$$P_m : \begin{cases} \left(\frac{d^2u_m}{dt^2}(t), v_j\right) + a(u_m(t), v_j) = (f(t), v_j), \quad \forall j,\ 1 \leq j \leq m,\ (1, j) \\ u_m(0) = u_{0m}, \quad u'_m(0) = u_{1m}. \end{cases}$$

Comme $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_j$, on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d^2}{dt^2}\left(g_{im}(t)v_i), v_j\right) + a\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)v_i, v_j\right) = (f(t), v_j)$$

$$\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)(v_i), v_j) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)a(v_i, v_j) = (f(t), v_j)$$

$$\begin{array}{lcll} Soit \quad h_m : & [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m} \\ & t & \longrightarrow & h_m(t) = (g_{1m}(t), ..., g_{mm}(t), g'_{1m}(t), ..., g'_{mm}(t)) \end{array}$$

On pose $x(t) = (g_{1m}(t), ..., g_{mm}(t))$, donc $x(t) \in \mathbb{R}^m$ et $h(t) = (x(t), x'(t))$

De plus, on suppose que

$$B = [(v_i, v_j)]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$$

$$A = [a(v_i, v_j)]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$$

et

$$F(t) = (< f(t), v_1 >, ..., < f(t), v_m >)$$

donc

$$\begin{array}{lcll} F : & [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & t & \longrightarrow & F(t) \end{array}$$

et

$$h_m(0) = (g_{1m}(0), ..., g_{mm}(0), g'_{1m}(0), ..., g'_{mm}(0))$$

Comme

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(0)v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}v_i$$

et

$$u'_m(0) = \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(0)v_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}v_i$$

donc

$$h_m(0) = (\alpha_{im}, \beta_{im})_{1\leq i\leq m}$$

On remplace dans (P_m), on obtient :

$$\begin{cases} B\, x''(t) + A\, x(t) \ = \ F(t) \\ h_m(0) \ = \ (\alpha_{im}, \beta_{im}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ x''(t) \ = \ -B^{-1}\, A\, x(t) \ + \ B^{-1}\, F(t)$$

en d'autre part : $h'(t) = (x'(t), x''(t))$, donc :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -B^{-1}Ax(t) + B^{-1}F(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -B^{-1}Ax(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} \\ B^{-1}F(t) \end{pmatrix}$$

On pose $B^{-1}F(t) = f_m$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} & Id_{\mathbb{R}^m} \\ -B^{-1}A & 0_{\mathbb{R}^m} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} \\ B^{-1}F(t) \end{pmatrix}$$

d'ou :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} & -Id_{\mathbb{R}^m} \\ B^{-1}A & 0_{\mathbb{R}^m} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} \\ B^{-1}F(t) \end{pmatrix}$$

$$P_m : \begin{cases} \frac{d}{dt}h_m(t) + A_m(h_m)(t) = f_m(t) \\ \\ h_m(0) = (\alpha_{im}, \beta_{im})_{1\leq i\leq m} \end{cases}$$

Le problème P'_m admet une unique solution h_m dans $C([0,T])$ de plus u_m, u'_m, u''_m appartiennent à $L^2(0t, V_m)$

3.3.2.2 Majorations des solutions $\mathbf{u_m}$

On reprend notre équation P_m :

$$P_m : \begin{cases} \left(\frac{d^2u_m}{dt^2}(t), v_j\right) + a(u_m(t), v_j) = (f(t), v_j), \quad \forall j,\ 1 \leq j \leq m,\ (1,j) \\ u_m(0) = u_{0m}, \quad u'_m(0) = u_{1m}. \end{cases}$$

et On multiplie l'équation $(1, j)$ par (g'_{jm})

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2u_m}{dt^2}(t), v_j\right)(g'_{jm}) + a(u_m(t), v_j)(g'_{jm}) &= (f(t), v_j)(g'_{jm}) \\
\left(\frac{d^2u_m}{dt^2}(t), (g'_{jm})\ v_j\right) + a(u_m(t), (g'_{jm})\ v_j) &= (f(t), (g'_{jm})\ v_j)
\end{aligned}$$

On somme sur j dans $[1, m]$, ce qui donne :

$$\left(\frac{d^2u_m}{dt^2}(t), \sum_{j=1}^{m}(g'_{jm})\ v_j\right) + a(u_m(t), \sum_{j=1}^{m}(g'_{jm})\ v_j) = (f(t), \sum_{j=1}^{m}(g'_{jm})\ v_j)$$

Comme

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} g_{im} v_j \quad et \quad u'_m = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm} v_j$$

On obtient donc :

$$\left(\frac{d^2u_m}{dt^2}(t), u'_m(t)\right) + a(u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t))$$

On a : $\quad a(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ dx$

$$\int_\Omega u''_m(t)\ u'(t)\ dt + \int_\Omega \nabla u_m(t)\ \nabla u'(t)\ dt = \int_\Omega f(t)\ u'_m(t)\ dt$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|u'_m(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2\ dt = \int_\Omega f(t)\ u'_m(t)\ dt$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 = (f(t), u'_m(t))$$

On intègre sur l'intervalle $(0,t)$:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2\,dt \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2\,dt \;=\; \int_0^t (f(t),u'_m(t))\,dt$$

$$\frac{1}{2}\left(\|u'_m(t)\|_2^2 \;-\; \|u'_m(0)\|_2^2\right) \;+\; \frac{1}{2}\left(\|u_m(t)\|_H^2 \;-\; \|u_m(0)\|_H^2\right) \;=\; \int_0^t (f(t),u'_m(t))\,dt$$

On remplace : $u'_m(0)=u_{1m}$ et $u_m(0)=u_{0m}$ et On multiplié par 2 :

$$(\|u'_m(t)\|_2^2+\|u_m(t)\|_H^2) \;-\; (\|u_{1m}\|_2^2 \;+\; \|u_{0m}\|_H^2) = 2\int_0^t (f(t),u'_m(t))\,dt$$

On applique **l'inégalité de H$\ddot{o}$lder** :

$$(\|u'_m(t)\|_2^2+\|u_m(t)\|_H^2) \;-\; (\|u_{1m}\|_2^2 \;+\; \|u_{0m}\|_H^2) \;\le\; 2\int_0^t \|(f(t)\|_2\|u'_m(t)\|_2\,dt$$

et on utilise l'inégalité pour (a,b) dans $\mathbb{R}^{+2}$: $\quad ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, pour obtenir :

$$\|u'_m(t)\|_2^2 \;+\; \|u_m(t)\|_H^2 \;\le\; \int_0^t \|u'_m(t)\|_2^2\,ds \;+\; \int_0^t \|f(s)\|_2^2\,ds \;+\; (\|u_{1m}\|_2^2 \;+\; \|u_{0m}\|_H^2)$$

Par hypothèses on a :

$$f\in L^2(0T,L^2(\Omega)),\quad u_0\in H_0^1(\Omega),\quad u_1\in L^2(\Omega)$$

et comme $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ on a donc $\|u_{0m}\|_H$ est bornée

on déduit l'existence d'une constance C telle que :

$$\|u'_m(t)\|_2^2 \;+\; \|u_m(t)\|_H^2 \;\le\; C \;+\; \int_0^t \|u'_m(t)\|_2^2\,ds \quad \forall t\in[0,T] \qquad (2)$$

3.3.2.3 Passage à la limite

L'inégalité (2) ne donne pas directement des majorations de $\|u_m(t)\|_H$ et de $\|u'_m(t)\|_2$. On a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 ***Lemme de Gronwall***
Soit T un réel positif, C une constante positive, f et g deux fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} f \in L^\infty(0T), & f(t) \geq 0 \quad p.p \\ g \in L^1(0T), & g(t) \geq 0 \quad p.p \end{cases}$$

et

$$f(t) \leq \int_0^t g(s)f(s)\, ds + C \qquad p.p \qquad (3)$$

Alors f vérifie : $f(t) \leq C\, exp\left(\int_0^t g(s)\, ds\right)$

Preuve 3.1
Comme f appartient à $L^\infty(0T)$ et g à $L^1(0T)$, la fonction :
$F(t) = \int_0^t g(s)\, ds + C$ est absolument continue.
d'ou $F'(t) = f(t)g(t) \quad p.p$
Ceci joint à l'inégalité (3) donne :

$$F'(t) \leq g(t)F(t) \quad p.p$$

donc

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq g(t) \quad p.p$$

On integre de chaque coté sur [0,t] :

$$\int_0^t \frac{F'(t)}{F(t)}\, dt \leq \int_0^t g(t)\, dt$$

ce qui donne :

$$\ln F(t) \leq \int_0^t g(t)\, dt$$

alors :

$$F(t) \leq exp\left(\int_0^t g(s)\, ds\right)$$

d'où :

$$F(t) exp\left(-\int_0^t g(s)\, ds\right) \leq C$$

Soit :

$$F(t) exp\left(-\int_0^t g(s)\, ds\right) \leq C \quad \Longrightarrow \quad f(t) \leq F(t) \leq C\, exp\left(\int_0^t g(s)\, ds\right)$$

On applique le lemme de Gronwall aux fonctions :

$$f(t) = \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 , \quad g(t) = 1$$

Vérifiant que :

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 \leq C + \int_0^t \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 \, ds \quad ?$$

On a d'après (2) on a :

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 \leq C + \int_0^t \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 \, ds \quad \forall t \in [0,T]$$

La norme est toujours positif donc :

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 \leq C + \int_0^t \|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_2^2 ds$$

ce qui veut dire que f et g vérifie les conditions.

D'après le Lemme de Gronwall on a :

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 \leq C \, exp\left(\int_0^t 1 \, ds\right)$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 \leq C \, e^t$$

On Obtiens : $\|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_H^2 \leq 2\,C\,e^T$, pour tout t. Ceci entraîne :

$(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite borné dans $L^\infty(0T, H_0^1(\Omega))$ et $L^2(0T, H_0^1(\Omega))$

$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite borné dans $L^\infty(0T, L^2(\Omega))$ et $L^2(0T, L^2(\Omega))$

$(-\Delta u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite borné dans $L^\infty(0T, H^{-1}(\Omega))$ et $L^2(0T, H^{-1}(\Omega))$

Alors il existe u, et une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ extraite de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_p \rightharpoonup u, & L^2(0T, H_0^1(\Omega)) \quad faible \\ u'_p \rightharpoonup u', & L^2(0T, L^2(\Omega)) \quad faible \\ -\Delta u_p \rightharpoonup -\Delta u, & L^2(0T, H^{-1}(\Omega)) \quad faible \end{cases}$$

pour tout φ dans $\mathcal{D}(0T)$ pour tout j de $\mathbb{N}^*$, tel que soit $p \geq j$ on a pour tout w_j de l'espace V_j :

$$-\int_0^T (u_p'(t), w_j)\, \varphi'(t)\ dt\ +\ \int_0^T\ a(u_p(t), \varphi(t)w_j)\ dt\ =\ \int_0^T\ (f(t), \varphi(t)w_j)\ dt$$

de la convergence faible on déduit :

$$-\int_0^T (u_(' t), w_j)\, \varphi'(t)\ dt\ +\ \int_0^T\ a(u_(t), \varphi(t)w_j)\ dt\ =\ \int_0^T\ (f(t), \varphi(t)w_j)\ dt$$

Comme $H_0^1(\Omega)\ =\ \overline{\cup_{m\in\mathbb{N}^*} V_m},\ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ \exists\, w_j \in V_m$ tel que $w_j \to v$

alors on obtient pour tout v de $H_0^1(\Omega)$:

$$-\int_0^T (u'(t), v)\, \varphi'(t)dt + \int_0^T\ a(u(t), \varphi(t)v)dt = \int_0^T\ (f(t), \varphi(t)v)dt\ \forall v \in\ H_0^1(\Omega)$$

$$\int_0^T (u''(t), v)\, \varphi(t)\ dt\ +\ \int_0^T\ a(u(t), v)\, \varphi(t)\ dt\ =\ \int_0^T\ (f(t), v)\, \varphi(t)\ dt \quad \forall\, v \in\ H_0^1(\Omega)$$

Soit $\left(\dfrac{d^2u}{dt^2}, v\right) + a(u, v)\ =\ (f, v)$, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout v *de* $H_0^1(\Omega)$

3.3.2.4 Vérification des conditions aux limites

Soit φ dans $C^1(\mathbb{R}),\ \varphi \equiv 0$ dans un voisinage de $T,\ \varphi(0) = 1$, Alors :

$$\int_0^T (u_p''(t), v_j)\, \varphi(t)\ dt\ +\ \int_0^T\ a(u_p(t), v_j)\, \varphi(t)\ dt\ =\ \int_0^T\ (f(t), v_j)\, \varphi(t)\ dt$$

$$\left[\ (u_p'(t), v_j)\varphi(t)\ \right]_0^T\ -\ \int_0^T\ (u_p'(t), v_j)\, \varphi'(t)\ dt\ +\ \int_0^T\ a(u_p(t), v_j)\, \varphi(t)\ dt\ =$$

$$(u_p'(T), v_j)\ \varphi(T) - (u_p'(0), v_j)\ \varphi(0) - \int_0^T (u_p'(t), v_j)\, \varphi'(t)dt + \int_0^T\ a(u_p(t), v_j)\, \varphi(t)dt$$

Ce qui nous donne :

$$-\int_0^T (u_p'(t), v_j)\,\varphi'(t)dt - (u_p'(0), v_j) + \int_0^T a(u_p(t), v_j)\,\varphi(t)dt = \int_0^T (f(t), v_j)\,\varphi(t)dt$$

On en déduit par passage à la limite sur l'indice p :

$$-\int_0^T (u'(t), v_j)\,\varphi'(t)\;dt \;+\; \int_0^T a(u(t), v_j)\,\varphi(t)\;dt \;=\; (u_1, v_j) \;+\; \int_0^T (f(t), v_j)\,\varphi(t)\;dt$$

La densité de $U_{m\in\mathbb{N}}\,V_m$ dans $H_0^1(\Omega)$ permet d'obtenir pour tout v de $H_0^1(\Omega)$:

$$-\int_0^T (u'(t), v)\,\varphi'(t)dt + \int_0^T a(u(t), v)\,\varphi(t)dt = (u_1, v) + \int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)dt \quad (3.1)$$

Mais on a :

$$-\int_0^T (u'(t), v)\,\varphi'(t)dt + \int_0^T a(u(t), v)\,\varphi(t)dt = (u'(0), v) + \int_0^T (f(t), v)\,\varphi(t)dt \quad (3.2)$$

de 3.1 et 3.2 on obtient $(u_1, v) \;=\; (u'(0), v)$ d'où $u_1 \;=\; u'(0)$.

par ailleurs $\displaystyle\int_0^T (u_p'(t), v_j)\,\varphi(t)\;dt \;=\; -(u_{0p}, v_j) \;-\; \int_0^T (u_p(t), v_j)\,\varphi'(t)\;dt$

ce qui donne après passage à la limite :

$$\int_0^T (u'(t), v)\,\varphi(t)\;dt \;=\; -(u_0, v) \;-\; \int_0^T (u(t), v)\,\varphi'(t)\;dt \quad (3.3)$$

Or

$$\int_0^T (u'(t), v)\,\varphi(t)\;dt \;=\; -(u(0), v) - \int_0^T (u(t), v)\,\varphi'(t)\;dt \quad (3.4)$$

de 3.3 et 3.4 on obtient $(u_0, v) \;=\; (u(0), v)$ d'où $u_0 \;=\; u(0)$

Bibliographie

[1] Hïam. BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris 1987.

[2] Laboratoire Jacques-Louis Lions , 4 place Jussieu 75005 Paris, France, https ://www.ljll.math.upmc.fr/MathModel/enseignement/polycopies/ledret-chapitre3.pdf

[3] Pr. Dalila Azzam-Laouir , Théorie des semi-groupes pour les étudiants de première année master , Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel , juin 2020

[4] Edwards, R. E. , Functional Analysis. Theory and applications. Holt, Rinehardt and Winston, New York, 1965

[5] R.Dautray, J.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, tomes 7 et 8 , Masson, Paris, 1987-1988

[6] I.Chalendar, Cours Analyse réelle, l'Université Lyon I , Lyon-France, 2011, http ://math.univ-lyon1.fr/ chalenda/chap3-ar.pdf

[7] DAUTRAY, Robert, LIONS, Jacques-Louis,Analyse mathématique et calcul numérique,(pour les sciences et les techniques), 9 tomes, Masson, Paris,1987-1988.

[8] E. Líndgren, P. Líndqvíst, Fractíonal eige11va.1ues. N0-7491 Trondheim, Norway , 2012.

[9] C. GASQUET, P. WITOMSKI, Analyse de Fourier et applications, Masson , Paris , 1990

[10] Lions, Jacques-Louis, MAGENES, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume l. Dunod, Paris, 1968.

[11] RAVIART, P.A., THOMAS, J .M., Introduction à l 'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1983.

[12] F. Rouvière. Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. Cassini, 3me edition, 2009