الجـــمـهـــوريـــة الجـــزائـريـــة الديمــقـراطيـــة الـشـعـبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التـــــــــعـليــــم العـــالي و البـــحث العـلـمـــــي
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naâma
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

C.U.N
المركز الجامعي بالنعامة
CENTRE UNIVERSITAIRE DE NAAMA

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

le titre

---

l'opérateur de covariance des données fonctionnelle

Présenté par :
ALIOUANE CHAHRAZAD

Soutenu : Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.BARRI AMINA	MCB	C-Univ Tindouf	President
M.MOUSAOUI FATMA	MAA	C-Univ Naâma	Examinatrice
M.KHELOUATI HAFIDHA	MAA	C-Univ Naâma	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Remerciement

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, **khelouati hafidha** . Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.
J'adresse mes sincéres remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.
Je remercie mes trés chers parents, **aliouane ben amer** et **hidjaz yamina** , qui ont toujours èté là pour moi. Je remercie ma soeur **fatima zahra**, et mon frére **ahmed abd al manaem**, pour leurs encouragements.
Enfin, je remercie mes amis **mousat fatima zahra**, **gharibe islah**, **bin thamir amal** et **hadjaji huria** qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.
À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Notations générales

$\|.\|$	norme
$< .,. >$	produit scalaire
H	espace de Hilbert
H^*	dual topologique l'espace duale
H^{**}	le biduale d'un espace
$\|.\|$	module
$\mathcal{R}^*$	opérateur adjoint de l'opérateur $\mathcal{R}$
$\Omega \in \mathbb{R}^n$	ouvert
h.s	Hilbert-Schmidt (opérateur ou norme de)
i.i.d.	indépendantes identiquement distribuées
v.a.h.(r.)	variable aléatoire hilbertienne (réelle)
$\|.\|_H, (.,.)_H, < .,. >_{HH^*}$	désignent respectivement la norme, la norme et le produit scalaire et crochet de dualité
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	espace probabilisé
$\mathfrak{f}$	une application mesurable espace de fonctions (espace de Banach séparable)
μ	Espérance
$\sum$	Variance
Γ	matrice de variance-covariance
$\mu = \mathbb{E}[X]$	espérance ou moyenne de la variable
C_μ	La corrélation

C_ξ	L'opérateur de corrélation
$\mathcal{R}_\xi$	l'opérateur de covariance
$\overline{X}$	moyenne des données de l'échantillon
n	nombre d'observations dans l'ensemble de données
X_i	observations dans l'ensemble de données X
cov	covariance
$\prod$	application linéaire continue
$\mathcal{V}$	l'opérateur nucléaire
L^2	l'espace de Hilbert
$\mathcal{C}$	La fonction de covariance
$\mathcal{B}_H$	la tribu des boréliens
U	la fonction aléatoire linéaire associée à X
$\mathcal{R}$	un opérateur linéaire

Table des matières

Introduction

beaucoup a été fait sur la généralisation de la concept de probabilité pour couvrir les probabilités où les divers évènements étudiés ne devaient pas étre représentés par des points ou des points dans un plan ou dans un l'espace, mais par quelque chose de la nature des courbes de chemin dans l'espace.[19]
De nouvelles directions en mathématiques surgissent soit à la suite de l'analyse interne des concepts mathématiques eux-mêmes leur statistiques sont autorisées dans les données pour obtenir des données statistiques plus fonctionnelles.
Ces introductions aux données fonctionnelles, et aux méthodes statistiques permettant de les appréhender, sans bien sûr chercher à être exhaustif. L'essentiel des résultats, exemples, et méthodes pourront être retrouvées, de maniére beaucoup plus détaillée dans les monographies[20][25][21] [22][23].Les graphiques de ce document, et les codes associés sont issus du logiciel (libre) R. Les fonctions spécifiques à l'analyse de données fonctionnelles, ainsi que les principaux jeux de données que nous utilisons peuvent être trouvés en particulier dans le package "fda" , disponible sur le site du CRAN2.
on pourra utiliser également le livre associé [1][24].
Cette en raison des innovations récentes dans les appareils de mesure pour mesurer les enregistrements audio, les images satellites, les séries chronologiques, La pollution et la climatologie ne sont que quelques exemples de la diversité des données De nature fonctionnelle que le statisticien peut rencontrer.

Ces données sont modélisées comme une perception de prendre une variable aléatoire , Èvaluez-le dans un espace abstrait de dimension infinie ,comme pouvez consulter des études les avoir Aperçu complet des statistiques fonctionnelles et opérationnelles.
Interpréter le processus comme un élément aléatoire qui a des valeurs dans l'espace de Hilbert, Pour cela la forme de représentations constructives des l'opérateur de covariance à travers des processus temporels ou dans un espace fonctionnel.

Ce mémoire , nous allons prèsenter de l'opérateur de covariance des données fonctionnelle, On considére des variables aléatoires avec des valeurs dans l'espace de Banach ensuite on etudier dans un Hilbert plus particulier l'analyse des éléments en L^2,nous allons traiter quelques notions et applications et propriétés structurelles des opérateur de covariance des données fonctionnelle d'un espace de Hilbert, le cadre fonctionnel "naturel" qui est souvent utilisé est celui du travail dans L^2, l'espace des variables à valeurs dans H et de carrè intégrable
l'étude des l'opérateur de covariance des données fonctionnelle d'un espace de Hilbert . demande de définir ainsi Généralités sur les opérateurs,
les opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert vers autre constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Les opérateurs linéaires continus

1. Des références bibliographiques supplémentaires sont indiquées à la Section 1.3. Ce document doit aussi beaucoup aux discussions avec A. Roche, ainsi qui à ses travaux : il s'inspire en particulier de l'introduction de sa thése (Roche, 2014).

d'un espace vectoriel de Hilbert vers autre forment une classe assez particuliére des opérateurs linéaires d'un espace vectoriel normé vers autre .
Donc les opérateur de covariance sont des opèrateur lineaire continu d'un espace vectoriel normé vers autre assez particuliére un opérateurs transformant les espaces en leurs dual
Ce travail est composé de 4 chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons une matrice de variance covariance qui est une matrice carrée et symétrique qui décrit la covariance entre deux ou plusieurs variables aléatoires.Une matrice de covariance est une généralisation de la covariance de deux variables.

Dans le deuxiéme chapitre, on présente quelques rappels de espaces de Hilbert réels séparables ,base de Hilbert, et l'opérateur et nous allons traiter quelques notions de l'opérateur qui est une applications qui donne le prenant ses valeurs dans un espace de Hilbert. et propriétés .

Le troisiéme chapitre 'étude l'opérateur de covariance des données fonctionnelle dans des espaces de Banach. ainsi que opérateur de covariance dans l'espace de Hilbert.le processus stochastique nous trouvons quelque notion de processus et definition processus stochastiques : espérance et covariance à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et de fonction de covariance est développée dans le espaace de Hilbert L^2 .

Au quatriéme chapitre, on dèveloppe une application de l'opérateur de covariance des données fonctionnelle . Une conclusion et des perspectives de ce travail sont présentés à la fin de ce chapitre.

Chapitre 1

Matrice de covariance

1.1 Vecteur aléatoire

Un **vecteur aléatoire** est aussi appelé **variable aléatoire multidimensionnelle**.

Définition 1.1.1 *Soit* X *un vecteur aléatoire et les applications* $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n$ *sont des variables aléatoires réelles appelées composantes du vecteur aléatoire telle que* ω *est l'élément générique de* Ω *l'espace de toutes les éventualités possibles. .On note alors* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n)$.
Un vecteur aléatoire est une généralisation à n dimensions d'une ***variable aléatoire réelle****. Alors qu'une variable aléatoire réelle est une fonction qui à chaque éventualité fait correspondre un nombre réel, le vecteur aléatoire est une fonction* X *qui à chaque éventualité fait correspondre un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\mathrm{X} : \omega \rightarrow \mathrm{X}(\omega) = (\mathrm{X}_1(\omega), \mathrm{X}_2(\omega), ..., \mathrm{X}_n(\omega))$$

Une application X *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *(définie sur* Ω *), à valeurs dans l'espace* $\mathbb{R}^n$ *muni de la tribu des boréliens de* $\mathbb{R}^n$ *est un vecteur aléatoire si elle est mesurable.*

1.1.1 Variable aléatoire fonctionnelle

Une variable aléatoire est dite **variable aléatoire fonctionnelle** si elle prend ses valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie. typiquement, il s'agit donc d'une application mesurable $X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$. Une **donnée fonctionnelle** est alors une réalisation de la variable X.

1.2 Espérance et matrice de variance

1.2.1 Espérance

une variable aléatoire X , et l'espérance d'une variable aléatoire réelle X est le réel définie par [1] :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Lemme 1.2.1 *:*
Pour toute variable aléatoire réelle X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

Démonstration :

posons X(Ω) = $\{x_1, ..., x_n\}$.
On a : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i\}$ et les événements $\{X = x_i\}$ sont 2 à 2 incompatibles donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega \in \{X = x_i\}} \underbrace{X(\omega)}_{= x_i} \mathbb{P}(\{\omega\}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\underbrace{\sum_{\omega \in \{X = x_i\}} \mathbb{P}(\{\omega\})}_{\mathbb{P}(X = x_i)} \right) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

espérance ou moyenne de la variable :

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$

□

1. Grégory MIERMONT 2017, p. 55

Théorème 1.2.1 *:(Linéarité de l'espérance).*
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad et \quad \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

Autrement-dit l'application espérance est une forme linéaire .

<u>*Démonstration :*</u>

d'aprés le lemme précédent :

1. $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda X) &= \sum_{\omega \in \Omega} \lambda X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

□

Définition 1.2.1 *: Une variables aléatoire réelle d'espérance nulle est dite centrée .*

Propriété 1.2.1 *:*

1. *Si X est une variable aléatoire réelle alors la variable aléatoire (X - $\mathbb{E}$(X)) est une variable aléatoire centrée appelée la variable aléatoire centrée associée à X.*
2. *Soit X une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathbb{P})$. alors :*

$$\mathbb{E}(X) \geq 0$$

Démonstration :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geq 0}$$

donc

$$\mathbb{E}(X) \geq 0,$$

□

3. $\mathbb{E}$ *(X) = 0* *si et seulement si* $\mathbb{P}(X = 0) = 1$ *. on dit alors que* X *est presque sûrement nulle .*

   Démonstration :
   une somme de réells positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul . donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = 0 &\iff \forall x \in X(\Omega). \qquad x\mathbb{P}(X = x) = 0 \\ &\iff \forall x \in X(\Omega) \setminus \{0\}. \quad \mathbb{P}(X = x) = 0 \end{aligned}$$

   Or , $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$ *.*
   Donc :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = 0) = 1.$$

□

1.2.2 Covariance

Définition 1.2.2 *: Soit* X *et* Y *deux variable aléatoires sur* $(\Omega, \mathbb{P})$ *on appelle covariance de* X *et* Y *, ou covariance de (X,Y) le réel Cov(X,Y) défini par :*

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Remarque 1.2.1 *:*
on peut remarquer que l'application Cov(X,X) est une forme bilinéaire symétrique positive !
Elle est positive car :

$$\begin{aligned} Cov(X, X) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] && (1) \\ &= V(X). \end{aligned}$$

pour La variance de X *est :* *Var(X) = Cov(X, X)*

Théorème 1.2.2 *:*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathbb{E}\left[XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right] \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.2 *:*
Cette formule (1.2.1) permet de retrouver la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Théorème 1.2.3 *:*

1. *V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y),*

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= Cov(X+Y, X+Y) \\
&= Cov(X,X) + Cov(Y,X) + Cov(Y,X) + Cov(Y,Y).
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \qquad (1) \\
\mathbb{E}(X+Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \qquad (2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))] \\ Cov(X,X) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] \\ &= V(X) \\ Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

$$V(X) \quad = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 \qquad ....(a)$$

$$V(Y) \quad = \mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(Y)^2 \qquad ...(b)$$

alors :
Pour prouver le thèorème suivant :

V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)   ? ?

on a :

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Cov(X+Y,X+Y) \\ &= \mathbb{E}[(X+Y \;-\; \mathbb{E}(X+Y))^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2+XY-X\mathbb{E}(X+Y)+YX+Y^2-Y\mathbb{E}(X+Y) \\ &\quad -X\mathbb{E}(X+Y)-Y\mathbb{E}(X+Y)+(\mathbb{E}(X+Y))^2] \qquad .....(I) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(\mathbb{E}(X+Y))^2 \quad = (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2$$

pour (I) on a :

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= \mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &\quad +\mathbb{E}(XY)+\mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y) \\ &\quad -\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y) \\ &\quad +\mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(X)^2+\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= \underbrace{\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2}_{Var(X)}+\underbrace{\mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(Y)^2}_{Var(Y)}+\mathbb{E}(XY) \\ &\quad -\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(YX)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

pour (a) et (b) on a $\Leftrightarrow$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

□

2. $\mid Cov(X,Y) \mid \leq \delta(X)\delta(Y)$.

3. *si* $\delta(X) \neq 0$ *alors l'égalité* $\mid Cov(X,Y) \mid \leq \delta(X)\delta(Y)$ *est obtenne si et seulement si il existe deux réels* a *et* b *tels que* $Y = aX + b$ *presque sûrement i.e.* $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$.

• On admet ce Théoréme . mais on remarquera que l'inégalité $\mid Cov(X,Y) \mid \leq \delta(X)\delta(Y)$ ressemble à l'inégalité de Couchy-Schwaez . la seule différence est que Cov n'est pas un produit scalaire , bien que ce soit une forme bilinéaire symétrique positive .

Lemme 1.2.2 *:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) \right). \end{aligned}$$

Démonstration :

Formule de transfert à la variable aléatoire Z= (X,Y) et avec f(x,y) = xy.

Théorème 1.2.4 *: si X et Y sont indépendant , alors :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \\ Cov(X,Y) &= 0 \\ &et \\ V(X+Y) &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

Démonstration :

le lemme 1.2.2 et l'indépendance de X et Y donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y) \right) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(x\mathbb{P}(X=x)\cdot \underbrace{\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y)}_{\mathbb{E}(Y)} \right) \\
&= \mathbb{E}(Y) \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \\
&= \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

les deux autres égalités s'en déduisent directement .

□

Définition 1.2.3 *: lorsque Cov(X,Y) = 0 , on dit que les variables aléatoires X et Y sont non corrélées .*

1.3 La Matrice de Covariance

La matrice de covariance est un type de matrice utilisé pour représenter les valeurs de covariance entre des paires d'éléments donnés dans un vecteur aléatoire. La matrice de covariance peut également être appelée matrice de variance-covariance. En effet, la variance de chaque élément est représentée le long de la diagonale principale de la matrice.

Une matrice de covariance est toujours une matrice carrée. De plus, il est semi-défini positif et symétrique. Cette matrice est trés utile dans la modélisation stochastique et l'analyse en composantes principales. Dans cet mémere, nous découvrirons la matrice de variance-covariance, sa formule, des exemples et diverses propriétés importantes qui lui sont associées

Définition de la matrice de covariance

La matrice de covariance de variance est définie comme une matrice carrée où les éléments diagonaux représentent la variance et les éléments hors diagonale représentent la covariance. La covariance entre deux variables peut être positive, négative et nulle. Une covariance positive indique que les deux variables ont une relation positive alors qu'une covariance négative montre qu'elles ont une relation négative. Si deux éléments ne varient pas ensemble, ils afficheront une covariance nulle[16]

1.3.1 Matrice de covariance

La matrice de covariance d'un vecteur de n variables aléatoires $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ donne chacune posséde une variance, est la matrice carrée donne le terme générique est donné par

$$\sigma_{x_{i,j}} = \text{Cov}\left(X_i, X_j\right)$$

La matrice de covariance, notée parfois $\sum$, est définie par :

$$\text{Var}(\vec{X}) \equiv \text{E}[(\vec{X} - \text{E}(\vec{X}))(\vec{X} - \text{E}(\vec{X}))^T]$$

En développant les termes : (Formule de matrice de covariance)[17]

$$\begin{aligned} \text{Var}(\vec{X}) &= \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriété 1.3.1 *:* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$

Pour déterminer la matrice de covariance, les formules de variance et de covariance sont nécessaires. Selon le type de données disponibles, la variance et la covariance peuvent être trouvées pour les données d'échantillon et les données de population.[17]

1. ***Variance de Population :***

$$\textit{Var(X)} = \frac{\sum_{1}^{n}(X_i - \mu)^2}{n}$$

2. ***Covariance de Population :***

$$\textit{Cov(X,Y)} = \frac{\sum_{1}^{n}(X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)}{n}$$

3. ***Variance Simple :***

$$\textit{var(X)} = \frac{\sum_{1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

4. ***Covariance Simple :***

$$\textit{cov(X,Y)} = \frac{\sum_{1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n-1}$$

1.4 Matrice de variance covariance le cas indépendance de vecteurs aléatoires

Définition 1.4.1 *:*
Deux vecteurs aléatoires sont indépendants si et seulement si la probabilité que ces vecteurs prennent une valeur donnée est égale au produit des probabilités que chaque vecteur prenne une valeur donnée. De plus la covariance des deux vecteurs est nulle

Corollaire 1.4.1 *: Si X et Y sont indépendantes alors* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

1.5 Matrice de variance covariance du vecteur gaussien

Définition 1.5.1 *: Un vecteur aléatoire de dimension n est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une **variable gaussienne**.*

Définition 1.5.2 *: Soit* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n)$ *un vecteur aléatoire.* X *est gaussien si et seulement si, pour toute suite* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_n$ *de nombres réels, la variable aléatoire*

$$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

*est une **variable gaussienne**.*

Propriété 1.5.1 *:*

- *Soit* X *un vecteur gaussien à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *. On note* μ *son **espérance** et* Σ *sa **matrice de covariance**. Soit* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *et* $b \in \mathbb{R}^n$*. Alors le vecteur aléatoire* $AX + b$ *est gaussien, son espérance est* $A\mu + b$ *et sa matrice de covariance* $A\Sigma A^T$*.*
- *Étant donné un vecteur gaussien* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *. chacune de ses composantes suit une loi gaussienne, puisque pour tout* $i \in [1, n]$*, on peut écrire :* $X_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j$ *, où* δ_{ij} *est le **symbole de Kronecker**.*
- *Soit* $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille de variables aléatoires réelles gaussiennes et **indépendantes**. Alors le vecteur aléatoire* $(X_1, ..., X_n)$ *est gaussien.*

1.6 Construction d'un vecteur gaussien à partir de sa matrice de covariance

Il est notable que toute **matrice définie positive** est la **matrice de covariance** d'un vecteur gaussien. De plus on peut déterminer un unique vecteur gaussien à partir de cette matrice et d'un vecteur réel (correspondant au vecteur des moyennes du vecteur gaussien) [13].

Propriété 1.6.1 *: Soit* Γ *une matrice réelle définie positive de taille* $n \times n$ *, et* μ *un vecteur de taille* n*.*
Il existe un unique vecteur gaussien $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n)$ *dont* Γ *est la matrice de covariance et* μ *est le vecteur de moyenne.*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & ... & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & ... & ... & \\ ... & & & \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_n) & ... & ... & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix} \quad et \quad \mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ ... \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$ *le vecteur gaussien associé à* μ *et* Γ *.*

Chapitre 2

Espaces de Hilbert réels séparables : quelques rappels

2.1 Integration sur un espace de Hilbert

soit H un espace de Hilbert réel sèparable , muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_H$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesure oû μ est une mesure bornée .
soit $\mathfrak{f}$ une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(H, \mathcal{B}_H)$.
sous l'hypothése que $\| \mathfrak{f} \|_H$ est μ-intégrable , c'est-à-dire appartient à $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ encore noté $\mathrm{L}^1(\mu)$, on peut poser la :

Définition 2.1.1 *: on appelle intégrale de* $\mathfrak{f}$ *sur* Ω *l'unique élément* $\imath_{\mathfrak{f}}$ *de* H *vérifiant .*
pour tout y *de* H *:*

$$<\imath_{\mathfrak{f}}, y >_H = \int_{\Omega} < \mathfrak{f}(\omega), y >_H \, d\mu(\omega)$$

l'existence et l'unicilé de $\mathrm{i}_{\mathfrak{f}}$ *sont assurées pas le théoréme de Riesz appliqué à la forme linéaire continue* $\Phi_{\mathfrak{f}}$ *sur* H *, définie par :*

$$H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \rightarrow \Phi_{\mathfrak{f}}(y) = \int_{\Omega} < \mathfrak{f}(\omega), y >_H \, d\mu(\omega)$$

soit alors l'ensemble $\{ \mathfrak{f}^* ;$ $\mathfrak{f}$ *mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dane* $(H, \mathcal{B}_H)$ *et* $\|\mathfrak{f}\|_H \in L^1(\mu) \}$*. cet ensemble est noté* $L^1_H(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ou encore* $L^1_H(\mu)$ *; un élément* $\mathfrak{f}$ *de* $L^1_H(\mu)$ *est dit* μ*-intégrable , et l'unique élément* $\mathrm{i}_{\mathfrak{f}}$ *de* H *donné par la définition ci-dessus , dit intégrale de* $\mathfrak{f}$ *par rapport à* μ *, est encore noté :*

$$i_{\mathfrak{f}} = \int_{\Omega} \mathfrak{f}(\omega)\, d\mu(\omega)$$
$$= \int \mathfrak{f} d\mu.$$

si μ *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *, alors* $\int \mathfrak{f}$ *du est appelée l'espérance mathématique de* $\mathfrak{f}$ *et noté* $\mathbb{E}(\mathfrak{f})$ *.*

la notion d'intégration de fonction à valeurs dans un espace de Hilbert est ainsi ramenée , gràce au produit scalaire de H , à celle de fonctions réelles .
la plupart des propriétés de l'intégrale de fonctions réelles se transposent ,en particulier :

a) $\int (\lambda\mathfrak{f} + \mathfrak{f}^*)d\mu = \lambda \int \mathfrak{f} d\mu + \int \mathfrak{f}^* d\mu$ *pour tout* λ *de* $\mathbb{R}$ *et tout* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}^*)$ *de* $[L^1_H(\mu)]^2$

b)

$$\begin{aligned} \| \int \mathfrak{f} d\mu \|_H &= \|i_{\mathfrak{f}}\| \\ &= \|\Phi_{\mathfrak{f}}\| \\ &\leq \int_{\Omega} \|\mathfrak{f}(\omega)\|_H d\mu(\omega) \end{aligned}$$

c) *si* $\mathcal{R}$ *est un opérateur linéaire continu sur* H *, alors pour tout* $\mathfrak{f}$ *de* $L^1_H(\mu)$

$$\mathcal{R}(\int \mathfrak{f} d\mu) = \int (\ \mathcal{R}\mathfrak{f}\ )du$$

oû $\mathcal{R}\mathfrak{f}$ *est l'application de* Ω *dans* H *qui à* ω *associe* $\mathcal{R}[\mathfrak{f}(\omega)]$*. avec le mémes hypothéses que précédemment , on note* $L^2_H(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, ou ancore* $L^2_H(\mu)$*, l'ensemble* $\{\ \mathfrak{f}\ ;\mathfrak{f}$ *mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(H, \mathcal{B}_H)$*;* $\|\mathfrak{f}\|_H \in L^2(\mu)\ \}$*.*
de l'inclusion $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$ *, on déduit l'inclusion* $L^2_H(\mu) \subset L^1_H(\mu)$*.*
de plus , pour tout couple $(\mathfrak{f},\mathfrak{g})$ *de* $[L^2_H(\mu)]^2$ *, la formule*

$$< \mathfrak{f}, \mathfrak{g} >= \int_{\Omega} < \mathfrak{f}(\omega), \mathfrak{g}(\omega) >_H d\mu(\omega)$$

définit un produit scalaire sur $L^2_H(\mu)$ *qui en fait un espace de Hilbert réel séparable.*

Exemple : 2.1 $L^2([0,T]) = \{\mathfrak{f} : [0, T] \to \mathbb{R}, (\int_0^T \mathfrak{f}^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$
le produit scalaire est :

$$< \mathfrak{f}, \mathfrak{g} > = \int_0^T \mathfrak{f}(x)\mathfrak{g}(x)dx$$

dans L^2([0,T]) et la norme associe est :

$$\|\mathfrak{f}\| = \left(\int_0^T \mathfrak{f}^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(L^2([0,T]), <>)$ *est un espace de Hilbert .*

Théorème 2.1.1 *:*

soit (H,<.,.>) un espace de Hilbert séparable .

$(\imath)$ *H admet une (des) base(s) hilbertienne(s) dénombrable(s) , c'est-à-dire une famille $\{ h_\imath , \imath \in \mathbb{N} \}$ d'élément orthonormés de H totale , au sens où l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par cette famille est égale à l'espace H tout entier . Cela signifie que , tout élément de H se décompose de façon unique sous la forme*

$$\forall \quad x \in H, \qquad x = \sum_{\imath \in \mathbb{N}} <x,h_\imath> h_\imath$$

$(\imath\imath)$ *(Riesz) Toute forme linéaire sur H , $\mathfrak{f} : H \to \mathbb{R}$, peut se mettre sous la forme $\mathfrak{f} = <.,x>$ pour un élément x de H . On dit que H est isomorphe à son dual H^* .*

2.2 Base de Hilbert

Dans un espace préhilbertien de dimension infinie, une famille finie de vecteurs orthogonaux deux à deux ne peut pas engendrer tout l'espace. Soit H un espace préhilbertien sur un corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(h_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de H où l'ensemble I des indices est fini ou infini.

Définition 2.2.1 *: Soit H un espace préhilbertien sur le corps K des nombres réels ou des complexes et $(h_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de H.*
On dit que $(h_i)_{i\in I}$ est une base de Hilbert (ou base hilbertienne) de H si :

— $(h_i)_{i\in I}$ *est une famille orthonormale de H , c'est-à-dire :*

$$\forall (i,j) \in I^2 \qquad i \neq j \qquad \Rightarrow \qquad \langle h_i \mid h_j \rangle = 0$$

$$\forall i \in I \qquad \langle h_i \mid h_i \rangle = \|h_i\|^2 = 1$$

— *la famille est de plus maximale ou "compléte [1] " ou "totale [2]" au sens suivant :*

1. W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson et Cie, 1975, 81-82 p. (ISBN 2-225-38214-X)
2. Laurent Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, 1970, 405 p.

$$\forall X \in H \ , \ \exists (x_i)_{i \in I} \qquad \textit{tel que} \qquad X = \sum_{i \in I} x_i h_i$$

La sommabilité de la famille de vecteurs $x_i h_i$ est celle associée à la norme sur H. La premiére condition (orthonormalité) garantit l'unicité de la famille de scalaires X_i , pour tout vecteur X[3] .

Proposition 2.2.1 *: Une famille orthonormale de H est une base de Hilbert si et seulement si elle est totale, c'est-à-dire si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans H.*

Théorème 2.2.1 *:(Théoréme et définition :) Si h_i est une base hilbertienne de H, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$X = \sum_{i \in I} (x, h_i) h_i.$$

Les coefficients $\langle x, h_i \rangle$ sont appelés coefficients de Fourier de x, et constituent l'unique famille de coefficients permettant d'exprimer x dans la base de Hilbert.

Théorème 2.2.2 *:*
Tout espace préhilbertien séparable posséde une base hilbertienne.

2.3 Opérateur linéaire

Un opérateur $\mathcal{R} \ : \quad H \ \rightarrow \ H^*$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2,$$

$$\forall (X_1, X_2) \in H^2,$$

$$\mathcal{R}(\lambda X_1 + \mu X_2) \ = \ \lambda \mathcal{R}(X_1) + \mu \mathcal{R}(X_2)$$

où K est le corps des scalaires de H et H*.

3. Toute base de Hilbert dénombrable est donc une base de Schauder

Remarque 2.3.1 *: Lorsque H est un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel, et que* $H^* = \mathbb{K}$ *(c'est un corps), un opérateur est une forme linéaire sur H.*

Définition 2.3.1 *:*
Un opérateur $\mathcal{R}$ *est linéaire si son domanine de définition est une variété linéaire et si, quels que soient les élément* $\mathrm{X_1, X_2,..., X_k,}$ *de ce domanine , et quels que soient les nombres* $\mathrm{a_1,a_2,...,a_k,}$ *on* a

$$\mathcal{R}[\mathrm{a_1X_1} + \mathrm{a_2X_2} + ... + \mathrm{a_kX_k}] = \mathrm{a_1}\mathcal{R}\mathrm{X_1} + \mathrm{a_2}\mathcal{R}\mathrm{X_2} + ... + \mathrm{a_k}\mathcal{R}\mathrm{X_k}$$

Nous ne considérerons dans la suite que les opérateurs linéaires dont les domanines de définition sont partout denses dans l'espace de Hilbert[14] .

Définition 2.3.2 *:*
En présupposant son existence , on appelle opérateur associé à un opérateur linéaire donné $\mathcal{R}$ *, et on désigne par* $\mathcal{R}^*$ *, un opérateur linéaire ayant même domaine de définition que* $\mathcal{R}$ *, et tel, de plus , que l'on ait , quels que soient les éléments* X *et* Y *de ce domaine de définition*

$$(\mathrm{X}, \mathcal{R}\mathrm{Y}) = (\mathcal{R}^*\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \qquad\qquad (\mathrm{X}, \mathcal{R}^*\mathrm{Y}) = (\mathcal{R}\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

On remarquera que la seconde condition équivant à la première , comme on le voit en échangeant X *et* Y *, et en prenant les imaginaires conjugués des deux membres . il en résulte que l'opérateur associé à* $\mathcal{R}^*$ *est* $\mathcal{R}$ *lui-même . On voit aisément , toujours en supposant leur existence , que les opérateur associés à* $\mathcal{R}+\mathcal{K}$ *,* $\mathcal{R}-\mathcal{K}$*,* $a\mathcal{R}$ *,* $\mathcal{R}\mathcal{K}$ *sont*

$$(\mathcal{R}+\mathcal{K})^* = \mathcal{R}^*+\mathcal{K}^* \qquad (\mathcal{R}-\mathcal{K})^* = \mathcal{R}^*-\mathcal{K}^* \qquad (a\mathcal{R})^* = \bar{a}\mathcal{R}^* \qquad (\mathcal{R}\mathcal{K})^* = \mathcal{R}^*\mathcal{K}^*$$

De la même manière , si $\mathcal{R}$ *a un inverse* $\mathcal{R}^{-1}$ *et un associé* $\mathcal{R}^*$ *, si ce dernier opérateur a aussi un inverse* ${\mathcal{R}^*}^{-1}$ *,* $\mathcal{R}^{-1}$ *, et* ${\mathcal{R}^*}^{-1}$ *sont associés ; on a en effet*

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}^{-1}\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= (\mathcal{R}^{-1}\mathrm{X}, \mathcal{R}^*{\mathcal{R}^*}^{-1}\mathrm{Y})\\ &= (\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\mathrm{X}, {\mathcal{R}^*}^{-1}\mathrm{Y})\\ &= (\mathrm{X}, {\mathcal{R}^*}^{-1}\mathrm{Y})\end{aligned}$$

Remarque 2.3.2 *: En réalité , dans un espace vectoriel normé général (espace de S.Banach) l'opérateur linéaire associé à un l'opérateur linéaire donné est défini dans l'espace dual ; ce n'est que parce que l'espace de Hilbert est identique à son espace dual , que la définition précédent a un sens . Cette remarque a son prix , car il en résulte que le concept d'opérateur hermitien n'a de signification que dans l'espace de Hilbert [18] .*

2.4 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Hilbert de $\mathcal{H}$. On appelle opérateur de Hilbert-Schmidt, un opérateur linéaire $\psi : \mathcal{H} \to H$ tel que la somme[7]

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\psi(e_n)\|^2$$

converge. Cette somme est alors indépendante du choix de la base orthonormée, et on note $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, H)$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt, muni de la norme

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\psi(e_n)\|^2}$$

Si $(f(t;.))_{0\leq t\leq T}$ est un processus mesurable à valeurs dans $\mathcal{L}^2$, on définit la seminorme

$$\|f\|_t = \sqrt{\mathbb{E}\int_0^t \|f(s,.)\|^2_{\mathcal{L}^2} ds}$$

Chapitre 3

Operateur de Covariance

3.1 Introduction

Dans le cadre multivarié, la covariance a une forme matricielle : l'extension naturelle à la dimension infinie est donc un opérateur.

Définition 3.1.1 *:(Définition d'un opérateur)*
Soient B et B deux espaces vectoriels topologiques. Un opérateur $\mathcal{R}$ est une application de B dans B* :*

$$\mathcal{R} : \quad B \rightarrow B^*$$

3.1.1 Opérateurs Transformant les Espaces en leurs dual

Les opérateurs de covariance des mesures de probabilité qui seront étudiés dans les sections suivantes transposent les espaces de Banach en leurs duaux. Nous nous concentrons ici sur les propriétés générales de tels opérateurs.

Propriété 3.1.1 *:(Propriétés générales)*
De nombreuses propriétés des opérateurs agissant dans les espaces de hilbert ont des analogues pour les opérateurs mappant les espaces de Banach dans leurs duels. Un opérateur $\mathcal{R} : B \rightarrow B^*$ est dit symétrique si $< X, \mathcal{R}Y >=< Y, \mathcal{R}X >$ pour tout $X, Y \in B$. $\mathcal{R}$ est dit positif si $< X, \mathcal{R}X >\geq 0$ pour tout $X \in B$. La symétrie et la positivité ont une signification similaire pour les opérateurs B^* dans B . Il est facile de voir que chaque opérateur symétrique est linéaire .

Proposition 3.1.1 (1) *: Tout opérateur symétrique $\mathcal{R} : B \rightarrow B^*$ est continue*

Preuve 3.1.1 *:*
Puisque $| < y, \mathcal{R}x > | = | < x, \mathcal{R}y > | \leq \|\mathcal{R}y\|$ pour tout $x \in \mathbf{B}_B$ et $y \in B$, nous avons que

$$\sup\{| < y, \mathcal{R}x > | : x \in \mathbf{B}_B\} < \infty$$

pour chaque $y \in B$ *. Ainsi,, l'ensemble* $\mathbf{B}_B$ *est borné dans* B^* *[1]*

Il est facile de voir qu'un opérateur continu $\mathcal{R} : B \to B^*$ *est symétrique s'il en est seulement s'il est auto-adjoint c'est-à-dire si* $\mathcal{R}$ *coïncide avec la restriction de l'opérateur adjoint* $\mathcal{R}^* : B^{**} \to B^*$ *sur* B *.*
Si $\mathcal{R} : B \to B^*$ *est un opérateur symétrique, la forme bilinéaire définie par celui-ci via la formule*

$$(1) \qquad r(x,y) =< x,\mathcal{R}y >, \quad x,y \in B.$$

est symétrique (i.e. $r(x,y) = r(y,x)$ *pour tout x,y* $\in B$*) et continue. Inversement, toute forme bilinéaire symétrique et continue* $r : B \times B \to \mathbb{R}^1$ *admet la représentation (1) (il suffit de poser* $\mathcal{R}_B = r(.,x)$ *,* $x \in B$ *. Une forme bilinéaire symétrique* $r : B \times B \to \mathbb{R}^1$ *est uniquement déterminée par la forme quadratique* $x \to r(x,x)$*, En effet, pour tout* $x, y \in B$ *on a que*

$$(2) \qquad r(x,y) = \tfrac{1}{4}[r(x+y,x+y) - r(x-y,x-y)].$$

<u>Démonstration :</u>

$$r(x,y) = \tfrac{1}{4}[r(x+y,x+y) - r(x-y,x-y)] \qquad ??$$

pour :

r(x,y) = <x,$\mathcal{R}$y>

on a :

$$< x,\mathcal{R}y >= \tfrac{1}{4}[\underbrace{< x+y,\mathcal{R}(x+y) >}_{(*)} - \underbrace{< x-y,\mathcal{R}(x-y) >}_{(\star)}]$$

$$< x,\mathcal{R}y >= \tfrac{1}{4}[\underbrace{< x+y,\mathcal{R}x+\mathcal{R}y >}_{(*)} - \underbrace{< x-y,\mathcal{R}x-\mathcal{R}y >}_{(\star)}]$$

$(*) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} < x+y,\mathcal{R}(x+y) > \; &=< x+y,\mathcal{R}x+\mathcal{R}y > \\ &=< x,\mathcal{R}x > + < x,\mathcal{R}y > + < y,\mathcal{R}x > + < y,\mathcal{R}y > \end{aligned}$$

$(\star) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} < x-y, \mathcal{R}(x-y) > &=< x-y, \mathcal{R}x - \mathcal{R}y > \\ &=< x, \mathcal{R}x > - < x, \mathcal{R}y > - < y, \mathcal{R}x > + < y, \mathcal{R}y > \end{aligned}$$

(-1)$\times$ $(\star)$=$(-\star) \Longrightarrow$

$$- < x-y, \mathcal{R}(x-y) >= - < x, \mathcal{R}x > + < x, \mathcal{R}y > + < y, \mathcal{R}x > - < y, \mathcal{R}y >$$

$(\star)$ + $(-\star) \Longrightarrow$

$$< x+y, \mathcal{R}(x+y) > - < x-y, \mathcal{R}(x-y) > \; = (I)$$

$$\begin{aligned} (I) \; &= - < x-y, \mathcal{R}(x-y) >< x, \mathcal{R}x > + < x, \mathcal{R}y > + < y, \mathcal{R}x > + < y, \mathcal{R}y > \\ &\quad - < x, \mathcal{R}x > + < x, \mathcal{R}y > + < y, \mathcal{R}x > - < y, \mathcal{R}y > \\ &= +2 < x, \mathcal{R}y > +2 < y, \mathcal{R}x > \end{aligned}$$

donc :

$$< x+y, \mathcal{R}(x+y) > - < x-y, \mathcal{R}(x-y) > \; = +2 < x, \mathcal{R}y > +2 < y, \mathcal{R}x >$$

pour La symétrie on a :

$$< x, \mathcal{R}y > \; =< y, \mathcal{R}x >$$

$\Longleftrightarrow$

$$< x+y, \mathcal{R}(x+y) > - < x-y, \mathcal{R}(x-y) > \; = 4 < x, \mathcal{R}y >$$

$\Longrightarrow \qquad \frac{(I)}{4}$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}[< x+y, \mathcal{R}(x+y) > - < x-y, \mathcal{R}(x-y) >] \; &= \tfrac{1}{4}[4 < x, \mathcal{R}y >] \\ &=< x, \mathcal{R}y > \\ &= r(x,y) \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{4}[r(x+y, x+y) - r(x-y, x-y)] \; = r(x,y)$$

alors :

$$r(x,y) = \frac{1}{4}[r(x+y,x+y) - r(x-y,x-y)]$$

□

En particulier, un opérateur symétrique $\mathcal{R} : B \to B^*$ *est uniquement déterminé par sa forme quadratique* $x \to < x, \mathcal{R}x >$. *Si* $\mathcal{R} : B \to B^*$ *est un opérateur positif alors la forme bilinéaire* r *, définie par (1), est positive, c'est-à-dire* $r(x,x) \geq 0$ *pour chaque* $x \in B$. *Inversement, toute forme bilinéaire continue positive est généré par un opérateur linéaire continu positif.*
Une forme bilinéaire positive symétrique $r : B \times B \to \mathbb{R}^1$ *satisfait l'inégalité de Cauchy :*

$$r^2(x,y) \leq r(x,x)r(y,y), \quad x,y \in B$$

qui peut être prouvé de la maniére habituelle. En particulier, si $\mathcal{R} : B \to B^*$ *est un opérateur positif symétrique alors [12]*

$$< x, \mathcal{R}y >^2 \ \leq \ < x, \mathcal{R}x >< y, \mathcal{R}y >, \quad x,y \in B.$$

Proposition 3.1.2 (2) *: Soit* $\mathcal{R} : B \to B^*$ *un opérateur symétrique.*
Alors

(a)

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbf{B}_B} | < x, \mathcal{R}x > | \quad &\leq \|\mathcal{R}\| \\ &\leq 2 \sup_{x \in \mathbf{B}_B} | < x, \mathcal{R}x > | \end{aligned}$$

(b) *Si* $\mathcal{R}$ *est positif alors*

$$\|\mathcal{R}\| \quad = \sup_{x \in \mathbf{B}_B} | < x, \mathcal{R}x > |.$$

Remarque 3.1.1 *: dans le cas d'un espace de Hilbert, la partie (b) de la proposition ci-dessus est vraie même sans l'hypothése de positivité sur $\mathbb{R}$. Cela peut être montré en utilisant, dans la preuve de la partie (a), l'égalité du parallélogramme. Dans le cas général, l'énoncé (a) ne peut pas être amélioré .*
L'ensemble $\mathcal{L}(B, B^*)$ de tous les opérateurs symétriques $\mathcal{R} : B \rightarrow B^*$ forme un sous-espace linéaire de l'espace de tous les opérateurs linéaires continus $\mathcal{L}(B, B^*)$. Ce sous-espace est fermé dans la topologie des opérateurs forts (et, par conséquent, uniformes) [1]

3.2 Opèrateur de Covariance dans L'espace de Banach

Définition 3.2.1 *: Il existe deux formes bilinéaires sur B^* associées à chaque mesure de probabilité μ d'ordre faible :*

$$\begin{aligned} C_\mu(x^*, y^*) &= \int_X < x, x^* >< x, y^* > d_\mu(x), \\ r_\mu(x^*, y^*) &= C_\mu(x^*, y^*) - \int_X < x, x^* > d_\mu(x) \int_X < x, y^* > d_\mu(x). \end{aligned}$$

C_μ est appelée <u>corrélation</u> et r_μ est appelée <u>covariance</u> de mesure μ. Évidemment, si μ a une moyenne nulle alors $C_\mu = r_\mu$. La corrélation et la covariance d'un élément aléatoire ξ dans B d'ordre faible deux sont simplement la corrélation et la covariance, respectivement, de sa distribution P_ξ.

Proposition 3.2.1 *La corrélation C_μ et la covariance r_μ de toute mesure de probabilit μ d'ordre faible deux sont des formes bilinéaires continues symétriques et positives sur B^*.*

Preuve 3.2.1 *: La symétrie et la bilinéarité de C_μ et r_μ sont évidentes. La positivité de C_μ est également claire. Le fait que l'expression $r_\mu(x^*, x^*)$ soit positive découle de l'inégalité de Holder .[15] Il existe un opérateur linéaire $\mathcal{R} : B^* \rightarrow B^{**}$ associé à la covariance r_μ (ainsi qu'à toute forme bilinéaire continue sur B^*) au moyen de la formule : pour chaque $y^* \in B^*$ fixe $\mathcal{R}_\mu y^*$ est définie comme une fonctionnelle linéaire continue sur B^* telle que pour tout $x^* \in B^*$ on ait l'égalité*

$$< x^*, \mathcal{R}_\mu y^* >= r_\mu(x^*, y^*)$$

L'opérateur $\mathcal{R}$ est appelé l'opérateur de covariance de mesure μ.
L'opérateur de corrélation C_ξ et l'opérateur de covariance $\mathcal{R}_\xi$ d'un élément aléatoire ξ dans B, d'ordre faible deux sont définis, respectivement, comme l'opérateur de corrélation et l'opérateur de covariance de sa distribution P_ξ . Autrement dit,$C_\xi et \mathcal{R}_\xi$ sont définis par des égalités

$$< x^*, C_\xi y^* > = \mathbb{E} < \xi, x^* >< \xi, y^* >$$

1. On dit qu'un réseau $(T_\alpha) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ converge dans la topologie des opérateurs forts vers $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ si $\|(T_\alpha - T)_x\| \rightarrow 0$ pour chaque $x \in X$, et qu'il converge dans la topologie des opérateurs uniformes si $\|T_\alpha - T\| \rightarrow 0$

$$< x^*, \mathcal{R}_\xi y^* >= \mathbb{E} < \xi, x^* >< \xi, y^* > -\mathbb{E} < \xi, x^* >< \xi, y^* >, \quad x^*, y^* \in H^*.$$

Nous énumérons les principales propriétés des opérateurs de covariance.

(a) *Chaque opérateur de covariance $\mathcal{R}_\mu$ est un opérateur positif symètrique mappant B^* dans B^{**}.*

(b) *Tout opérateur de covariance $\mathcal{R}_\mu : B^* \to B^{**}$ est continu. Ceci découle de la symétrie de $\mathcal{R}_\mu$ (cf. Proposition 3.1.1) ; c'est aussi une conséquence de la continuité de forme r_μ .*

(c) *Si un opérateur symétrique $\mathcal{R} : B^* \to B^{**}$ satisfait la condition :*

$$< x^*, \mathcal{R}x^* >= r_\mu < x^*, x^* >$$

pour tout $x^* \in B^*$ alors $\mathcal{R}$ coïncide avec l'opérateur de covariance de mesure μ (car $4r_\mu(x^*, y^*) = < x^* + y^*, \mathcal{R}(x^* + y^*) > - < x^* - y^*, \mathcal{R}(x^* - y^*) >$. que l'exigence que l'opérateur $\mathcal{R}$ soit symétrique est ici essentielle

(d) *Si B = H est un espace de Hilbert alors l'opérateur de covariance agit de H dans H.*

(e) *Si $u : X \to Y$ est un opérateur linéaire continu appliquant alors et $\mathcal{V} = \mu \circ u^{-1}$ est l'image de la mesure μ sous*

$$\mathcal{R}_\nu = u^{**}\mathcal{R}_\mu u^*.$$

Si $\mathcal{R}_\mu(X^*) \subset X$ alors $\mathcal{R}_\nu(Y^*) \subset Y$ et $\mathcal{R}_\nu = u\mathcal{R}u^*$.

(f) *Si μ est la convolution des mesures de probabilité μ_1 et μ_2 d'ordre faible deux alors :*

$$\mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_{\mu_1} + \mathcal{R}_{\mu_2}.$$

Selon la définition de l'opérateur de covariance, sa plage se situe dans B^{**}. Il est souvent important de savoir si $\mathcal{R}(B^*) \subset B$. Èvidemment, c'est le cas lorsque B est **réflexif**. Nous montrerons ci-dessous que, dans le cas général, une telle inclusion a lieu pour chaque mesure de probabilité de Radon d'ordre deux faible.

Théorème 3.2.1 *: Soit μ une mesure de probabilité de Radon de second d'ordre . Ensuite, ses opérateurs de corrélation et de covariance mappent x^* dans B et pour chaque $x^* \in B$, les égalités suivantes sont vraies :*

$$\begin{aligned} C_\mu x^* &= \int_X < x, x^* > x d_\mu(x), \\ \mathcal{R}_\mu x^* &= \int_X < x, x^* > x d_\mu(x) - < m_\mu, x^* > m_\mu \end{aligned}$$

où m_μ est la moyenne de la mesure μ.[5]

Preuve 3.2.2 *: Puisque la mesure μ est une mesure de Radon, on peut supposer qu'il s'agit de la distribution d'un élément aléatoire à valeur séparable dans B. Par conséquent, l'assertion du théoréme découle directement du théoréme .*

Remarque 3.2.1 *:*
Le fait que μ soit une mesure de Radon est important pour la validité des inclusions $\mathcal{R}_\mu \subset B$.

Corollaire 3.2.1 *: Soit $\mathcal{R}_\mu : B^* \to B$ l'opérateur de covariance d'une mesure de probabilité de Radon d'ordre faible deux. Alors l'ensemble $\mathcal{R}_\mu(B^*)$ est séparable.*

Corollaire 3.2.2 *L'opérateur de covariance d'une mesure de probabilité arbitraire d'ordre faible deux dans un espace de Banaoh séparable B envoie B^* dans B.*

Considérons maintenant le cas des mesures de probabilité sur l'espace dual. Soit $\mathcal{V}$ une mesure de probabilité d'ordre *-faible deux. La corrélation C_ν et la covariance r_ν sont définies comme les formes bilinéaires suivantes sur B :

$$C_\nu(x,y) \quad = \int_{x^*} < x, x^* >< y, x^* > d\nu(x^*),$$

$$r_\nu(x,y) \quad = C_\nu(x,y) \quad - \int_{x^*} < x, x^* > d\nu(x^*) \int_{x^*} < y, x^* > d\nu(x^*).$$

Il est facile de vérifier que C_ν et r_ν sont des formes bilinéaires positives symétriques. D'aprés la proposition 3.2.1, ils sont continus. Par conséquent, il existe des opérateurs linéaires C_ν et $\mathcal{R}_\nu$ de B dans B^* définis, respectivement, par les équations :

$$< x, C_\nu y >= C_\nu(x,y) \quad , \quad < x, \mathcal{R}_\nu y >= r_\nu(x,y)$$

Les opérateurs C_ν et $\mathcal{R}_\nu$ sont appelés, respectivement, ***opérateurs de corrélation et de covariance de mesure*** $\mathcal{V}$. If découle directement de leur définition que C_ν et $\mathcal{R}_\nu$ sont des opérateurs positifs symétriques (et donc continus). Si la mesure se prolonge en une mesure $\mathcal{V}$, s'étend à une mesure $\tilde{\mathcal{V}}$, d'ordre faible deux, évidemment, les restrictions $C_{\tilde{\nu}}$ et $\mathcal{R}_{\tilde{\nu}}$ sur $B \subset B^{**}$ coïncident avec C_ν et $\mathcal{R}_\nu$, respectivement. Dans le cas où μ est une mesure de Radon sur B^*, d'ordre faible deux, alors d'aprés le Théoréme 3.2.1, les opérateurs C_μ et $\mathcal{R}_\mu$ mappent B^{**} dans B^*, et sont uniquement déterminés par leurs restrictions sur B.

Remarque 3.2.2 *: Les opérateurs de corrélation et de covariance des mesures finies générales d'ordre deux faibles (ou *-faibles) peuvent être définis de la même maniére. Dans le cas de mesures infinies, l'opérateur de corrélation est défini de maniére analogue ; la notion d'opérateur de covariance peut aussi être faite raisonnable sous l'hypothése supplémentaire que la mesure est d'ordre faible un.[17]*

3.3 Opérateurs de covariance dans espace de Hilbert

3.3.1 Isomorphismes

Soit Φ un espace hilbertien muni du produit scalaire $(.,.)_\Phi$; on note Φ^* l'ensemble des formes linéaires continues sur Φ (Φ^* est le dual topologique de Φ) et $< .,. >_{\Phi,\Phi^*}$, la dualité (les indices Φ et Φ^* sont suprimés lorsque il n'y a pas ambiguité) :

$$\forall X \in \Phi \qquad ,\forall u \in \Phi^*, \qquad u(X) =< u, X >$$

u étant continue sur Φ, par le théorème de riesz on a :

$$\forall u \in \Phi^*, \qquad \exists Y_u \in \Phi, \qquad \forall X \in \Phi, \qquad u(X) =< u, X >= (Y_u, Y)_\Phi$$

On note alors $\mathcal{R}$ l'opérateur linéaire de Φ^* dans Φ qui à tout u, associe l'élément Y_u. $\mathcal{R}$ vérifie :

$$\forall u \in \Phi^*, \qquad \forall X \in \Phi, \qquad < u, X >= (\mathcal{R}u, X)_\Phi$$

On pose $\forall (u, v) \in {\Phi^*}^2$

$$(u, v)_{\Phi^*} =< u, \mathcal{R}v >=< \mathcal{R}u, v >= (\mathcal{R}u, \mathcal{R}v)_\Phi.$$

$\mathcal{R}$ est donc l'isométrie canonique entre Φ^* et Φ. C'est un opéateur auto-adjoint positif. Soit H un autre espace de Hilbert et $\mathcal{F}$ une isométrie de Φ dans H ; $\mathcal{F}$ est une application qui vérifie :

$$\forall (X, Y) \in \Phi^2, (X, Y)_\Phi = (\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y)_H.$$

Son adjoint $\mathcal{F}^*$ est alors l'isométrie entre H* et Φ^* définie par :

$$\forall X \in \Phi, \qquad \forall u \in H^*, \qquad < u, \mathcal{F}X >=< \mathcal{F}^*u, X >$$

M désignant l'isorphisme canonique entre H* et H , on écrit alors le schéma de dualité commutatif :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & H & \xleftarrow{\mathcal{F}} & \Phi & \\
M & \uparrow & & A \downarrow & \uparrow \mathcal{R} \\
 & H^* & \xrightarrow{\mathcal{F}^*} & \Phi^* &
\end{array}
$$

$A = \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{F}^* \circ M^{-1} \circ \mathcal{F}$

3.4 Opérateur de Covariance Variable aléatoire Hilbertienne

Notations :

H est un espace hilbertien réel (le même travail pourrait être réalisé sur le corps des complexes), H^* son dual topologique et $\mathcal{B}_H$ la tribu des boréliens.
Soit Y une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et à valeurs dans (H,$\mathcal{B}_H$). On note $\mathrm{L}^2(\mu)$ l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des variable aléatoire réelle de carré intégrable muni du produit scalaire usuel. Cet espace est supposé séparable , ce qui est équivalent à dire que μ admet une base dénombrable [2] .
L'isométrie canonique entre H et son dual H^* (resp. $\mathrm{L}^2(\mu)$ et $\mathrm{L}^2(\mu)^*$) est notée $\mathcal{R}$ (resp. D).
Y est supposée être du second ordre, ceci s'écrit :
$\mathbb{E}\|\mathrm{Y}\|_H^2 < \infty$ c'est-à-dire $\mathrm{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu; H, \mathcal{B}_H)$ noté $\mathrm{L}_H^2(\mu)$.
Dans ce cas, le théoréme de Riesz assure l'existence d'un élément $\mathbb{E}\mathrm{Y}$ de H (l'espérance) et d'un opérateur $\mathcal{R}$ de $\mathcal{L}(H^*, H)$ définis demaniére unique par les relations :

$$\begin{cases} \forall \mu \in H^*, \mathbb{E} < \mathrm{Y}, \mu >_{HH^*} = < \mathbb{E}\mathrm{Y}, \mu >_{HH^*}, \\ \forall \mu_1, \mu_2 \in H^*, \\ \mathbb{E}[< \mathrm{Y} - \mathbb{E}\mathrm{Y}, \mu_1 >_{HH^*} < \mathrm{Y} - \mathbb{E}\mathrm{Y}, \mu_2 >_{HH^*}] = < \mathcal{R}\mu_1, \mu_2 >_{HH^*} \quad . \end{cases} \tag{1.1}$$

On note par la suite $\mathrm{X} = \mathrm{Y} - \mathbb{E}\mathrm{Y}$ la variable aléatoire hilbertienne. centrée associée à Y.
L'opérateur de covariance est borné, positif et admet pour trace $\mathbb{E}\|\mathrm{X}\|_H^2$ qui est finie sous $\mathbb{E}\|\mathrm{Y}\|_H^2 < \infty$ c'est-à-dire $\mathrm{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu; H, \mathcal{B}_H)$ noté $\mathrm{L}_H^2(\mu)$ [4] ; c'est un opérateur nucléaire.
De plus, si $\mathcal{H}$ désigne un autre espace hilbertien, pour toute application linéaire continue Π de H dans $\mathcal{H}(\Pi \in \mathcal{L}(H, \mathcal{H}))$, $\Pi\mathcal{H}$ est une variable aléatoire hilbertienne élément de $L^2_{\mathcal{H}}(\mu)$. alous $\Pi\mathcal{H}$ admet pour espérance $\Pi[\mathbb{E}\mathrm{Y}]$ et pour covariance l'opérateur nucléaire :

$$\mathcal{V} = \Pi\mathcal{R}^t\Pi \qquad (1,2)$$

Définition 3.4.1 *:*

Comme tout élément u *de* H^* *est continu,* $u(X(.))$ *noté aussi* $< X(.), u >_{HH^*}$ *est une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et intégrable si* $\mathbb{E}\|\mathrm{Y}\|_H^2 < \infty$ *c'est-à-dire* $\mathrm{Y} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu; H, \mathcal{B}_H)$ *noté* $L_H^2(\mu)$ *, est vérifiée car :*

$$| < X(.), u >_{HH^*} | \leq \|u\|_{H^*} \|X(.)_H\| \qquad (1,3)$$

Notons U l'application linéaire de H^* dans $L^2(\mu)$ définie par

$$U_u = < X(.), u >_{HH^*} \qquad (1,4)$$

Proposition 3.4.1 *: U défini ci-dessus est un opérateur de Hilbert-Schmidt. ainsi que l'application transposée ${}^tU$ définie par :*

$$\forall\ \mathcal{F} \in L^2(\mu)^*, \quad {}^tU\mathcal{F} = \mathbb{E}(XD^{-1}\mathcal{F}).$$

De plus, la covariance $\mathcal{R}$ de X (ou de Y) se met sous la forme ^{t}UDU.
*Ceci se résume dans le diagramme commutatif ou "**schéma de dualité**" suivant :*

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{\quad {}^tU \quad} & L^2(\mu) \\ M \downarrow\uparrow \mathcal{R} & & \uparrow D \\ H^* & \xleftarrow{\quad U \quad} & L^2(\mu) \end{array}$$

Remarque 3.4.1 *:*
M *est un opérateur borné mais pas nécessairement compact.*
U est appelée la fonctionnelle aléatoire linéaire associée à X [3].

3.5 Opérateur de Covariance

soit maintenant $\mathcal{V}$ une mesuer bornée sur (H,$\mathcal{B}_H$) admettant un moment d'ordre deux, ce qui revient à dire que l'applicationt de H dans $\mathbb{R}$ qui, tout X de H , associe $\|$X$\|_H$ est un élément de L$^2(\mathcal{V})$.

Définition 3.5.1 *:*
on appelle opérateur de covariance de la mesure bornée $\mathcal{V}$ (admettant un mament d'ordre 2), l'unique opérateur $\mathcal{R}$ sur H tel que, pour (y,z) de H^2 :

$$< \mathcal{R}y, z >_H \; = \int_H < x, y >_H < x, z >_H d\mathcal{V}(x)$$

en notant X$\otimes$X l'opérateur de rang 1 de δ_2(H) qui, à tout Y de H, associe <y,x>$_H$ X , $\mathcal{R}$ vérifie encore :

$$<\mathcal{R}y,z>_H = \int_H <X\otimes X(y),z>_H \, d\mathcal{V}(x)\,.$$

comme $\int_H <X\otimes X(y),z>_H \, d\mathcal{V}(x) = <\int_H X\otimes X(y)\, d\mathcal{V}(x),z>_H$ *, on en déduit , pour tout* y *de* H *:*
$\mathcal{R}y = \int_H X\otimes X(y)d\mathcal{V}(x)$ *et on note encore habituellemment* $\mathcal{R} = \int_H X\otimes X \, d\mathcal{V}(x)$ *.*
on montre que $\mathcal{R}$ *est hermitien positif , et est un élément de* $\delta_2(H)$ *et aussi de* $\delta_1(H)$ *(on vérifie pour cela que sa trace est finie).*
$\mathcal{R}$ *apparait comme l'intégrale dans* $\delta_2(H)$ *de* $X\otimes X$ *par rapport à* $\mathcal{V}$ *et on vérifit immédiatement que :*

$$<\mathcal{R},x\otimes y>_{\delta_2(H)} = <\mathcal{R}x,y>_H\,,$$

ce qui permet de passer du produit scalaire sur $\delta_2(H)$ *à celui de* H*. en particulier : pour tout (x,y) de* H^2 *,*

$$\|x\otimes y\|^2_{\delta_2(H)} = \|x\|^2_H \, \|y\|^2_H\,.$$

Enfin, on peut remarquer que l'opérateur de covariance est la généralisation à la dimension infinie de la notion de la notion de matrice de covariance en dimension finie si on suppose $\mathcal{V}$ *centrée c-à-d , si* $\int_H X \, d\mathcal{V}(x) = 0$ *pour tout* X *de* H *.*

3.6 Propriété de L'opérateur de covariance

Supposons que X est une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Hilbert séparable H telle que $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$. Alors, son opérateur de covariance $\mathcal{R}$ est

$$(\imath)\;\; \mathcal{R} : f \in H \longmapsto \mathcal{R}f = \mathbb{E}[< X - \mathbb{E}[X], f > (X - \mathbb{E}[X])].$$

Il est à valeurs dans H.

$(\imath\imath)$ Dans le cas où X est centrée,

$$\mathcal{R} : \mathrm{f} \in H \longmapsto \mathbb{E}[< X, f > X]$$

Auto-adjoint : $\forall f, g \in H, < \mathcal{R}f, g >=< f, \mathcal{R}g >,$

$(\imath\imath)$ **de P Hilbert-Schmidt** : il existe une base hilbertienne $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\mathcal{R}_{\Phi_j}|^2 < \infty.$

On en déduit,

Corollaire 3.6.1 *:*
Avec les hypothéses et notations de la proposition précédente, l'opérateur de covariance $\mathcal{R}$ *de X est ainsi*

$(\imath)$ ***compact*** *(l'image de la boule unité de H par* $\mathcal{R}$ *est relativement compacte),*

$(\imath\imath)$ ***diagonalisable en base orthonormée.***

Le premier point est une conséquence du caractére Hilbert-Schmidt de $\mathcal{R}$. Le second point provient du résultat fondamental de décomposition des opérateurs autoadjoints compacts. Nous tirerons les conséquences de cette propriété . Enfin, on notera que si $\mathcal{R}$ est de rang fini, alors X appartient en fait un espace de dimension finie.[10]

3.7 Opérateurs compacts symétriques sur un espace de Hilbert

De tels opérateurs admettent une description simple [2].

Théorème 3.7.1 *:*
Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur symétrique $\mathcal{R} : H \to H$ *est compact si et seulement s'il admet une reprêsentation*

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathcal{R}h = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(h, e_n)e_n \quad , h \in H$$

où e_n *est une suite orthonormée d'éléments de H et* λ_n *est une suite de nombres réels différents de zéro qui converge vers zéro.*

Les nombres $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$*, dans la représentation (1) sont des valeurs propres non nulles de l'opérateur symétrique compact* $\mathcal{R}$*, et les éléments* $e_n, n \in \mathbb{N}$*, sont des vecteurs propres correspondants.*

Corollaire 3.7.1 *: Un opérateur symétrique* $\mathcal{R} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il est compact et que la suite de ses valeurs propres est sommable au carré.*

Corollaire 3.7.2 *:*
Un opérateur symétrique $\mathcal{R} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ***nucléaire*** *si et seulement s'il est compact et que la suite de ses valeurs propres est absolument sommable, (voir la preuve [3])*

2. (cf. F. Riesz et B. Szekefalvi-Nagy [1], p. 231)
3. 1987-Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanyan S.A - Probability distributions on Banach spaces-Springer-1 page 160 et 161

Lemme 3.7.1 *:*
Soit H ,H_1 et H_2 des espaces de Hilbert et soit $T_1 : H_1 \to H$ et $T_2 : H \to H_2$. des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Alors $T_2T_1 : H_1 \to H_2$ est un exploitant nucléaire (voir la preuve[4] *).*

Proposition 3.7.1 *Un opérateur symtrique de classe de trace positive $\mathcal{R} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est nucléaire et $\|\mathcal{R}\|_{nuc} = tr\mathcal{R}$.*

4. 1987-Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanyan S.A - Probability distributions on Banach spaces-Springer-1 page161

3.8 Processus stochastique

3.8.1 Hypothèses et Notations

Le modèle mathématique est le suivant : étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un intervalle fini [0,T] de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de lebesgue dt , on se donne une fonction mesurable de $T \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ notée :

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$$

On suppose que la classe de cette fonction appartient à $L^2(T \times \Omega)$.

par la suite, pour éviter des difficultés non essentielles de langage on identifiera une telle fonction avec sa classe d'équivalence. Ceci entraîne que X(t,.) noté encore (X_t) définit une application de T dans $L^2(\Omega)$ c'est-à-dire un processus du second ordre : pour tout t on a X_t est une variable ayant une espérance μ(t) et une variance $\sigma^2(t)$ finies. De même $X(., \omega)$ définit une application de Ω dans $L^2(T)$, ce qui veut dire que pour tout ω, trajectoire notée $X_t(\omega)$ est de carré intégrable. On supposera désormais le processus (X_t) centré c'est-à-dire μ(t)=0 pour tout t.

Espace L^2(T)

l'espace L^2(T) des fonctions de carré intégrable sur T muni de

$$<X,Y> = \int_T \|X(t)Y(t)\| dt ,$$

pour X,Y $\in L^2$(T) est un espace de Hilbert .

Définition 3.8.1 $(L^2(\mathrm{T}), \|.\|, <.,.>)$ *espace des fonctions de carré intégrable*

$$L^2(\mathrm{T}) = \{X : \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \int_{\mathrm{T}} X^2(t)dt < \infty\}$$

- $\forall$ *X,Y* $\in L^2(\mathrm{T})$, $<X,Y> = \int_{\mathrm{T}} \| X(t)Y(t) \| \, dt$,
- $\forall$ *X* $\in L^2(\mathrm{T})$, $\| X \| = \sqrt{<X,X>} = (\int_{\mathrm{T}} X^2(t)dt)^{1/2}$
- ***Structure*** $(L^2(\mathrm{T}), <.,.>)$ *espace de Hilbert*

— $(L^2(\mathrm{T}), <.,.>)$ *espace muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive),*
— $(L^2(\mathrm{T}), \|.\|)$ *espace vectoriel normé complet , séparable*

$$X : \Omega \longrightarrow H = L^2(T)$$

Un processus aléatoire généralise la notion de variable aléatoire utilisée en probabilité. On le définit comme une famille de variables aléatoires X(t) associées à toutes les valeurs $t \in T$.
D'un point de vue statistique, on considérera l'ensemble des observations disponibles X(t) comme une réalisation du processus, ce qui donne lieu à certaines difficultés. Un premier probléme concerne le fait que la durée sur laquelle est construit le processus est généralement infinie alors qu'une réalisation porte sur une durée finie. Il est donc impossible de représenter parfaitement la réalité. Il y a une seconde difficulté beaucoup plus sérieuse : à la différence du probléme des variables aléatoires, l'information disponible sur un processus se réduit généralement à une seule réalisation.

Définition 3.8.2 *:*
Un processus stochastique (ou aléatoire) est une famille de variables aléatoires (c'est-à-dire, des applications mesurables) définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexée par* T *et à valeurs dans* S. *Si* T *est un sous-ensemble d'un espace multidimensionnel, on préfére utiliser la dénomination de champ stochastique. Un processus stochastique est noté par* $\{X_t\}_{t \in T}$. *La valeur de la variable aléatoire* X_t *en un certain* $w \in \Omega$ *est désignée par* $X_t(w)$.

3.8.2 Espérance de Processus Stochastiques

la question posée dans cette section est celle de l'extension des notions d'espérance et de matrice de covariance d'un vecteur aléatoire aux variables à valeurs dans un espace de dimension infinie . On suppose dans la suite que H est un espace de Banach , plus précisément un espace de fonctions définies sur un ensemble T et à valeurs réelles , dont on note $\|.\|$ la norme , et muni de la tribu borélienne , c'est-à-dire la tribu associée à la norme , $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé , et X une variable aléatoire fonctionnelle sur Ω , à valeure dans H .

Espérance :

On peut définir au moins deux notions d'espérance pour un processus stochastique . Une premiére maniére rigoureuse et générale consiste à introduire l'intégrale de Bochner qui généralise l'intégrale de lebesgue pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach [5].

Définition 3.8.3 *: si* $\mathbb{E}[\|\mathrm{X}\|] < \infty$ *, on peut définir l'**espérance** de* X *comme*

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}] = \int_{\Omega} \mathrm{X}(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

5. (voir Dunford et Schwartz 1958)

*où l'intégrale est l'**intégrale de Bochner de** X . on définit ainsi un élément de H . on dira que X est centrée lorsque $\mathbb{E}[\mathrm{X}] = 0$.*

cette espérance a des propriétés "classiques" : par exemple , $\|\mathbb{E}[\mathrm{X}]\| \leq \mathbb{E}[\|\mathrm{X}\|]$, ou $\|\mathbb{E}[\mathrm{X}]\|^2 \leq \mathbb{E}[\|\mathrm{X}\|^2]$. lorsque H est un espace de Hilbert , de produit scalaire <.,.> , on a en fait plus généralement $\mathbb{E}[< \mathrm{X}, \mathrm{f} >] =< \mathbb{E}[\mathrm{X}], \mathrm{f} >$. Une autre possibilité pour définir l'espérance d'une variable fonctionnelle consiste à prendre point par point l'espérance de X : on se contentera de la définition (lgérement imprécise) suivante.[8]

Définition 3.8.4 *: Lorsque cela a un sens , on peut définir l'**espérance** de X comme la fonction non aléatoire $(\mathbb{E}[\mathrm{X}])(.)$ (élément de H) définie point par point par*

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[\mathrm{X}])(t) &= \mathbb{E}[\mathrm{X}(t)] \\ &= \int_\Omega \mathrm{X}(t,\omega) d\mathbb{P}(\omega) \,, \end{aligned} .$$

Ces deux notions d'espérance coïncident souvent. Par exemple, si $H = L^2(T)$, l'espérance point à point de X existe et définit bien un élément de $L^2(T)$ dés que $\mathbb{E}[\|X\|] < \infty$, et on a égalité presque partout des deux notions d'espérance dans ce cas.

3.8.3 Opérateur de Covariance du Processus

Soit U Opérateur linéaire défini par (X_t). c'est-à-dire l'application de $L^2(T)$ dans $L^2(\Omega)$ définie par :

$$U(f) = Y = \int_0^T X_t f(t) dt$$

U est alors un opérateur de Hilbert-schmidt c'est-à-dire que pour toute base orthogonale (f_i) de $L^2(T)$, $\sum_i \|U(f_i)\|^2$ est fini et est indépendant de la base.

Il en est de même de son adjoint U^* opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(T)$ défini par :

$$U^*(Y) = \mathbb{E}(X_t Y) = f(t)$$

Opérateur de covariance

L'opérateur de covariance du processus est l'opérateur de $L^2(T)$ dans lui-même défini par :

$$\forall f, g \in L^2(T)$$

$$\begin{aligned} < f, \mathcal{R}g > &= \mathbb{E}[< f, X_t >< g, X_t >] \\ &= \mathbb{E}[(\int_0^T X_t f(t)dt)(\int_0^T X_s g(s)ds)] \end{aligned}$$

Où <.,.> désigne le produit scalaire de $L^2(T)$.

Proposition 3.8.1 *:*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(T)$, ***d'opérateur de covariance*** *Γ et de fonction de covariance $\mathcal{C}$. Alors,*

$$\forall f \in L^2(T)\,,$$
$$\forall t \in T\,,$$

$$(\Gamma f)(t) = \int_T \mathcal{C}(s,t) f(s) ds.$$

3.9 L'opérateur intégral de noyau

Définition 3.9.1 *: la fonction de covariance de X est l'application*

$$\mathcal{C} : (s,t) \in H^2 \longrightarrow \mathcal{C}(s,t) = cov(X(s),X(t))$$

si X est centrée ($\mathbb{E}[X]=0$) , $\mathcal{C}(s,t) = \mathbb{E}[X(s)X(t)]$.

Définition 3.9.2 *: Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(T)$. La* ***fonction de covariance*** *de X est l'application*

$$\mathcal{C} : (s,t) \in T^2 \longrightarrow \mathcal{C}(s,t) = \mathbb{E}[X(t)X(s)].$$

Γ *est un* ***opérateur à noyau*** *, de noyau de la fonction de covariance .*
C'est l'opérateur intégral de noyau $\mathcal{C}(t,s)=\mathbb{E}(X_t X_s)$ c'est-à-dire que

$$f \to \mathcal{C}f = g$$

$$g(t) = \int_0^T \mathbb{E}(X_t X_s) f(s) ds \,.$$

Propriété 3.9.1 *: Soit U Opérateur linéaire définit précédent :*
On montre alors que $\mathcal{C} = U \circ U^*$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ qui est positif et autoadjoint , est également nucléaire comme produit d'opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Pour toute base orthogonale (f_i) de $L^2(T)$ on a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_i < f_i, \mathcal{C} f_i > &= Trace\mathcal{C} \\
&= \int_0^T \mathcal{C}(t,t) dt \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Application

4.1 Application Dans le cas deux Variable aléatoire

Exemple : 4.1 *: je Trouvez la matrice de covariance de la population suivant.*

```
X <- c(29,26,30,35,24,23,21,36,39,34,38,37,54,45,46)
X
y <- c(68,60,58,40,45,98,25,65,47,25,35,25,26,24,78)
y
age <- X
score <- y
sample_data <- data.frame( age,score)
sample_data
mean(X)
var(X)
mean(y)
var(y)
cov(X,y)
m <- cbind(X,y)
m
cov(m)
M<-cov(m)
t(M)
```

R Console

```
> X <- c(29,26,30,35,24,23,21,36,39,34,38,37,54,45,46)
> X
 [1] 29 26 30 35 24 23 21 36 39 34 38 37 54 45 46
>  y <- c(68,60,58,40,45,98,25,65,47,25,35,25,26,24,78)
> y
 [1] 68 60 58 40 45 98 25 65 47 25 35 25 26 24 78
>   age <- X
>  score <- y
> sample_data <- data.frame( age,score)
> t(sample_data)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14] [,15]
age     29   26   30   35   24   23   21   36   39    34    38    37    54    45    46
score   68   60   58   40   45   98   25   65   47    25    35    25    26    24    78
> mean(X)
[1] 34.46667
>  var(X)
[1] 86.55238
> mean(y)
[1] 47.93333
> var(y)
[1] 515.9238
> cov(X,y)
[1] -64.32381
> m <- cbind(X,y)
> cov(m)
          X         y
X  86.55238 -64.32381
y -64.32381 515.92381
> 
```

4.2 Application dans le cas Vecteur aleatoire

Exemple : 4.2 *:*
Dans cet exemple, nous étudions les résultats des examen des étudiants de deuxiéme année du Master Maths de l'Université de Naama dans 2021-2022

```
#les noms des etudiants du deuxieme master en maths
#de l'annee 2021-2022.
Nom_et_prenoms <- c("Aliouane Chahrazad" , "Amara Mohammed Ridha"
," Atbi Nawal"  , "Azizi Ibrahim ","Beddane Latifa"
, "Bekhedda Larissi" , "Belkacemi Safa "," Boudia Nesrine "
```

```
," Bouguern Zineb" ,"Boukhalkhal Zouheyr" ," Chebbab Abdelkrim"
, "Dahou Fatima Zahra ", "Ghezli Khayra ","Guettaf Abdelkader "
,"Harchouche Aicha "," Harkati Mawloud "
," Hashas Mohammed Essadeq El Amin" ,"Hellou Rabie "
, "Kaddouri Aziz" , "Labed Fatna ","Lahcene Abderrahmane "
, "Mebarki Oussama" , "Slamani Boubakr ", "Talha Aida"
, "Yakoubi Meryem")
Nom_et_prenoms
#Resultats de l'examen de la matiere MNEDO = methodes numerique
#pour EDO et EDP
MNEDO <- c(09,15,14,13,12,16,12,08,08,06,15,10,00,08,14,14,13
,16,08,11,18,14,14,10,14 )
MNEDO
points_d_examen_MNEDO <-  data.frame(Nom_et_prenoms, MNEDO )
points_d_examen_MNEDO
#Resultats de l'examen de la matiere recherch bibliographique = R_B
R_B <- c(02,10,13,11,10,10,10,10,05,04,07,06,00,11,10,11,12,14
,03,12,11,08,04,10,07)
R_B
points_d_examen_R_B<-  data.frame(Nom_et_prenoms,R_B)
points_d_examen_R_B
#Resultats de l'examen de la matiere series chronologiques = S_CH
S_CH <- c(3,14,12,08,03,11,08,03,03,02,09,04,00,04,04,08,15
,16,07,13,17,09,03,03,10)
S_CH
points_d_examen_S_CH <-  data.frame(Nom_et_prenoms,S_CH)
points_d_examen_S_CH
#Resultats de l'examen de la matiere statistique non
# parametrique = S_non_P
S_non_P <- c(04,11.25,11.50,11.50,06,11,04,05.75,05.75,02,09,06
,00,08.50,09.25,10.75,08,12,07,04.75,04.75,14,05,05.25,04.50)
S_non_P
points_d_examen_S_non_P <- data.frame(Nom_et_prenoms,S_non_P)
points_d_examen_S_non_P
#Resultats de l'examen de la matiere de Modeles de survie = M_S
M_S <- c(1.5,13.5,10.5,7,6.5,8.5,4.5,1.5,6.5,1.5,6.5,12.5,00
,06,7.5,16,10.5,9,4.5,15,13,11,7.5,2,7.5)
M_S
points_d_examen_M_S <- data.frame(Nom_et_prenoms,M_S )
points_d_examen_M_S
#Resultats de l'examen de la matiere Structure geometrique
#de modeles statist = SGMS
SGMS <- c(6,6.5,8,2,6.5,7,5.5,11.5,5.5,4,8,15,00,3.5,14,09
,10,08,6.5,12,09,09,7,5,7)
SGMS
points_d_examen_SGMS <-  data.frame(Nom_et_prenoms,SGMS)
points_d_examen_SGMS
#Resultats de l'examen de la matiere Analyse des donnees = A_D
```

```
A_D <- c(2.5,14,13.25,8.5,8,10.5,4,9,3,1,10,00,00,3,13.5,15
,13.5,11,02,9,17.5,8.5,2,8,7)
A_D
points_d_examen_A_D <-  data.frame(Nom_et_prenoms,  A_D)
points_d_examen_A_D
#Nous donnons des resultats ensemble
points_d_examen <-  data.frame(Nom_et_prenoms, MNEDO,R_B,S_CH
, S_non_P,M_S,SGMS,A_D)
points_d_examen
# Nom_et_prenoms   MNEDO R_B  S_CH  S_non_P  M_S  SGMS   A_D
#1      Aliouane Chahrazad     9   2    3     4.00  1.5  6.0  2.50
#2    Amara Mohammed Ridha    15  10   14    11.25 13.5  6.5 14.00
#3              Atbi Nawal    14  13   12    11.50 10.5  8.0 13.25
#4          Azizi Ibrahim    13  11    8    11.50  7.0  2.0  8.50
#5          Beddane Latifa    12  10    3     6.00  6.5  6.5  8.00
#6        Bekhedda Larissi    16  10   11    11.00  8.5  7.0 10.50
#7         Belkacemi Safa    12  10    8     4.00  4.5  5.5  4.00
#8         Boudia Nesrine     8  10    3     5.75  1.5 11.5  9.00
#9          Bouguern Zineb     8   5    3     5.75  6.5  5.5  3.00
#10    Boukhalkhal Zouheyr     6   4    2     2.00  1.5  4.0  1.00
#11      Chebbab Abdelkrim    15   7    9     9.00  6.5  8.0 10.00
#12    Dahou Fatima Zahra    10   6    4     6.00 12.5 15.0  0.00
#13          Ghezli Khayra     0   0    0     0.00  0.0  0.0  0.00
#14    Guettaf Abdelkader     8  11    4     8.50  6.0  3.5  3.00
#15      Harchouche Aicha    14  10    4     9.25  7.5 14.0 13.50
#16       Harkati Mawloud    14  11    8    10.75 16.0  9.0 15.00
#17    Hashas Mohammed       13  12   15     8.00 10.5 10.0 13.50
#18           Hellou Rabie    16  14   16    12.00  9.0  8.0 11.00
#19           Kaddouri Aziz     8   3    7     7.00  4.5  6.5  2.00
#20             Labed Fatna    11  12   13     4.75 15.0 12.0  9.00
#21  Lahcene Abderrahmane    18  11   17     4.75 13.0  9.0 17.50
#22        Mebarki Oussama    14   8    9    14.00 11.0  9.0  8.50
#23       Slamani Boubakr    14   4    3     5.00  7.5  7.0  2.00
#24              Talha Aida    10  10    3     5.25  2.0  5.0  8.00
#25         Yakoubi Meryem    14   7   10     4.50  7.5  7.0  7.00
```

pour afficher les notes de l'examen en appliquer le code suivant :

```
points_d_examen$......
```

```
points_d_examen$S_non_P
# [1]  4.00 11.25 11.50 11.50  6.00 11.00  4.00  5.75  5.75  2.00
# 9.00  6.00  0.00  8.50  9.25 10.75  8.00 12.00  7.00  4.75  4.75
#14.00  5.00  5.25  4.50
```

M-mean un vecteur de taille [7] (" M-mean" est le vecteur de moyenne.)
pour calculer la moyenne on trouve la forme siuvent :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} X\mathbb{P}(X = x)$$

```
M_mean <- matrix(data=1, nrow=1) %*% cbind( mean( MNEDO )
,mean( R_B ),mean( S_CH ) , mean( S_non_P ),mean( M_S  )
, mean( SGMS   ), mean(  A_D ) )
M_mean
#      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7]
#[1,] 11.68 8.44 7.56 7.26  7.6 7.42 7.75
mean(points_d_examen[,2])
#[1] 11.68
```

M-var un vecteur de taille [7] (" M-var" est le vecteur de variance.)
pour calculer la variance on trouve la forme siuvent :

$$Var(X) \quad = \quad \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

```
M_var <- matrix(data=1, nrow=1) %*% cbind( var( MNEDO )
,var( R_B ),var( S_CH ) , var( S_non_P ),var( M_S  )
, var( SGMS   ), var(  A_D ) )
M_var
#         [,1]     [,2]     [,3]     [,4]   [,5]     [,6]     [,7]
#[1,] 15.47667 13.50667 24.17333 12.24208 19.625 11.80583 26.23958
```

Cov un matrice de taille [7×7] ("Cov" est la matrice de Covariance.)
pour calculer la matrice de Covariance on trouve la forme siuvent :

soit X et Y deux variable aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$ on appelle covariance de X et Y , ou covariance de (X,Y), le réel Cov(X,Y) défini par :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$$Cov(X,X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] = V(X).$$

pour La variance de X est : Var(X) = Cov(X, X)

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

```
cov(points_d_examen[,2:8])
```

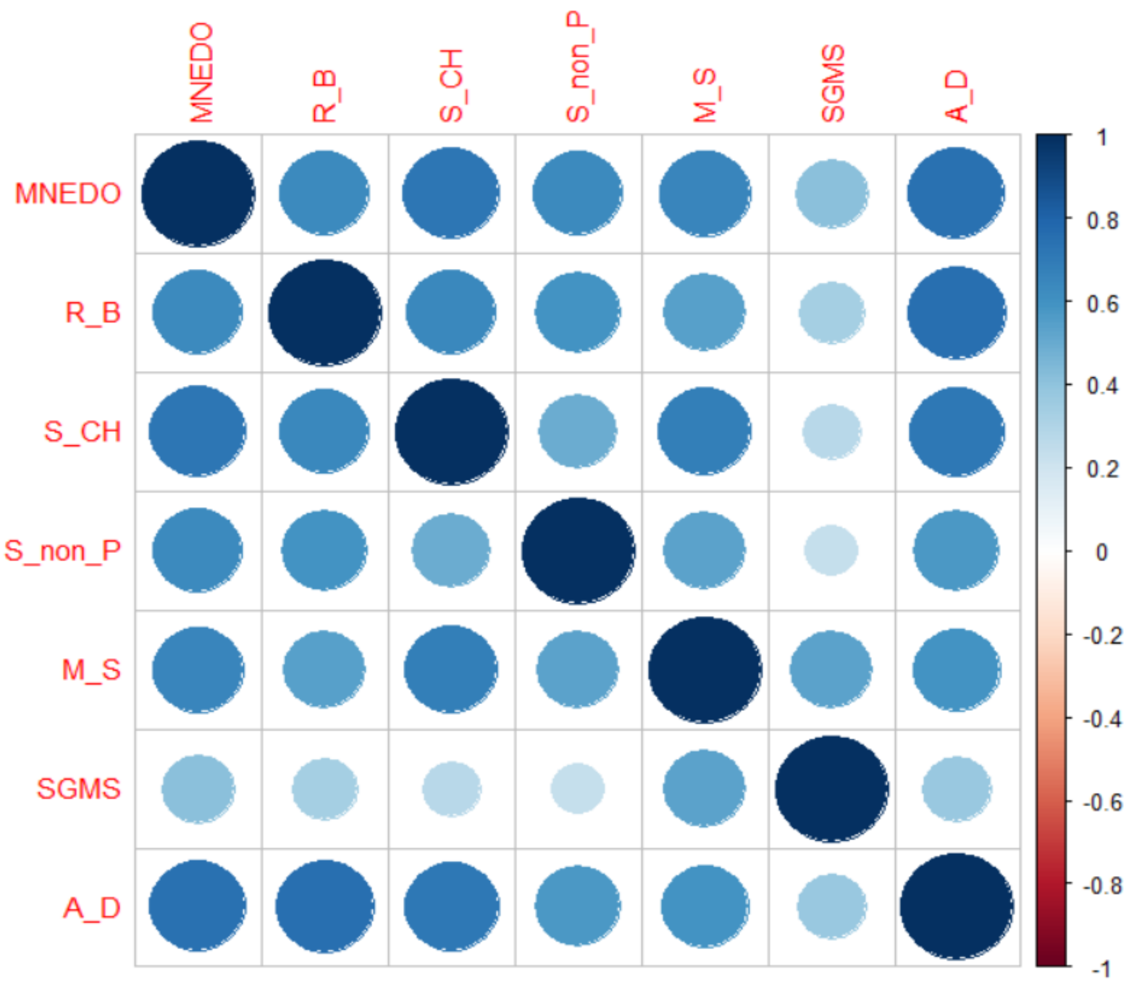
	MNEDO	R_B	S_CH	S_non_P	M_S	SGMS	A_D
MNEDO	15.476667	9.146667	14.103333	8.732500	11.450000	5.619167	14.958333
R_B	9.146667	13.506667	11.618333	7.599583	8.870833	4.286667	14.166667
S_CH	14.103333	11.618333	24.173333	8.504583	14.879167	4.650833	18.114583
S_non_P	8.732500	7.599583	8.504583	12.242083	8.222917	2.797708	10.229167
M_S	11.450000	8.870833	14.879167	8.222917	19.625000	8.216667	13.588542
SGMS	5.619167	4.286667	4.650833	2.797708	8.216667	11.805833	6.598958
A_D	14.958333	14.166667	18.114583	10.229167	13.588542	6.598958	26.239583

```
points <-  data.frame( MNEDO,R_B,S_CH, S_non_P,M_S,SGMS,A_D)
points
#   MNEDO R_B S_CH S_non_P  M_S SGMS   A_D
```

```
cor(points)
```

	MNEDO	R_B	S_CH	S_non_P	M_S	SGMS	A_D
MNEDO	1.0000000	0.6326304	0.7291465	0.6344132	0.6569948	0.4157046	0.7422770
R_B	0.6326304	1.0000000	0.6429859	0.5910007	0.5448607	0.3394668	0.7525149
S_CH	0.7291465	0.6429859	1.0000000	0.4943757	0.6831334	0.2753051	0.7192529
S_non_P	0.6344132	0.5910007	0.4943757	1.0000000	0.5305098	0.2327161	0.5707345
M_S	0.6569948	0.5448607	0.6831334	0.5305098	1.0000000	0.5398120	0.5988107
SGMS	0.4157046	0.3394668	0.2753051	0.2327161	0.5398120	1.0000000	0.3749286
A_D	0.7422770	0.7525149	0.7192529	0.5707345	0.5988107	0.3749286	1.0000000

```
library(corrplot)
#corrplot 0.92 loaded
library(corrplot)
corrplot.mixed(cor(points),order="AOE")
```



4.3 Application dans le Processus Stochastique

4.4 Approximation par discrétisation

[6] Dans la pratique, en général, un processus n'est pas connu en tout point t de T mais seulement en des points de discrétisation $t_1, t_2, ..., t_n$. tel que opérateur approché de V noté V_n.

Définition 4.4.1 *Soit Φ_n un sous-espace de $L^2(T)$ de dimension finie n muni de la structure hilbertienne induite de celle de $L^2(T)$ et .on note i_n (resp π_n) l'injection canonique de Φ_n dans $L^2(T)$ (resp .le projecteur orthogonal de $L^2(T)$ sur Φ_n.*

pour obtenir une base orthonormée de Φ.
le schéma se complète alors de la façon suivante :

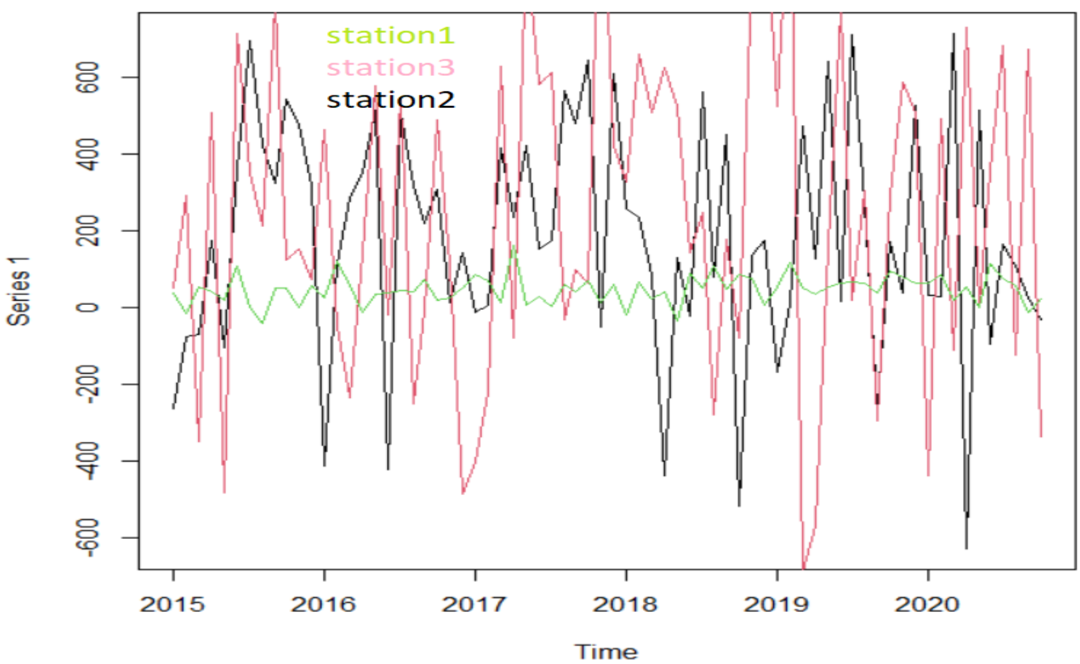
$$\begin{array}{ccccc}
\Phi_n & \underset{\xrightarrow{\ i_n\ }}{\xleftarrow{\ \pi_n\ }} & L^2(T) & \xleftarrow{\ U\ } & L^2(\Omega) \\
M_n \downarrow\uparrow V_n & & M \downarrow\uparrow \mathcal{R} & & \uparrow i \\
\Phi_n^* & \xleftarrow{\ \pi_i\ } & L^2(T) & \xleftarrow{\ U^*\ } & L^2(\Omega)
\end{array}$$

Exemple : 4.3 Application la quantité de pluie qui tombe en trois station :

1. **Mecheria**
2. **Naama**
3. **El bayadh**

des annes 2015

```
plot(ts(matrix(rnorm(70,192,271)), start = c(2015, 1)
, frequency = 12))
lines(ts(matrix(rnorm(70,212.21,366.3)), start = c(2015, 1)
, frequency = 12),col="2")
lines(ts(matrix(rnorm(70,46,41)), start = c(2015, 1)
, frequency = 12),col="3")
```



le noyaux de l'opérateur de covariance est fonction en fonction de s et t :

$$\mathcal{C} : (s,t) \in H^2 \longrightarrow \mathcal{C}(s,t) = cov(X(s),X(t))$$

la fonction de covariance : dans le cas le processus stationnaire

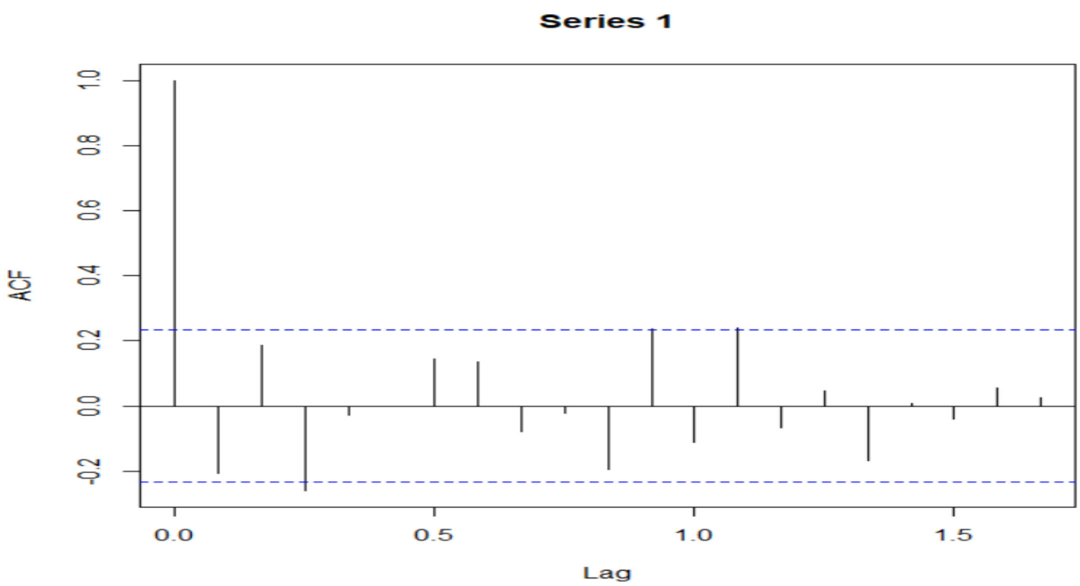
$$\mathcal{C}(s,t) = cov(X(s), X(t)) = cov(X(s-t), X(0)) = cov(X(h), X(0))$$

La fonction d'autocovariance apparaît alors comme la covariance de ce processus avec une version décalée de lui-même.

```
acf(ts(matrix(rnorm(70,212,366)), start = c(2015, 1), frequency = 12)
,lag.max=20)
```

```
 acf(ts(matrix(rnorm(70)), start = c(2015, 1)
, frequency = 12),lag.max=20
 , type = "covariance",plot=FALSE)
# Autocovariances of series ts(matrix(rnorm(70)), start = c(2015, 1)
#, frequency = 12), by lag

# 0.0000  0.0833  0.1667  0.2500  0.3333  0.4167  0.5000  0.5833
# 0.8438 -0.2374  0.1267  0.0199 -0.0766  0.1478  0.0460  0.0148
#0.6667  0.7500  0.8333  0.9167  1.0000  1.0833  1.1667  1.2500
#0.0142 -0.0635  0.0155  0.0166 -0.0580  0.1036 -0.0224  0.0650
# 1.3333  1.4167 1.5000 1.5833  1.6667
# -0.0219 -0.0301  -0.1145 -0.0258  0.0333
```



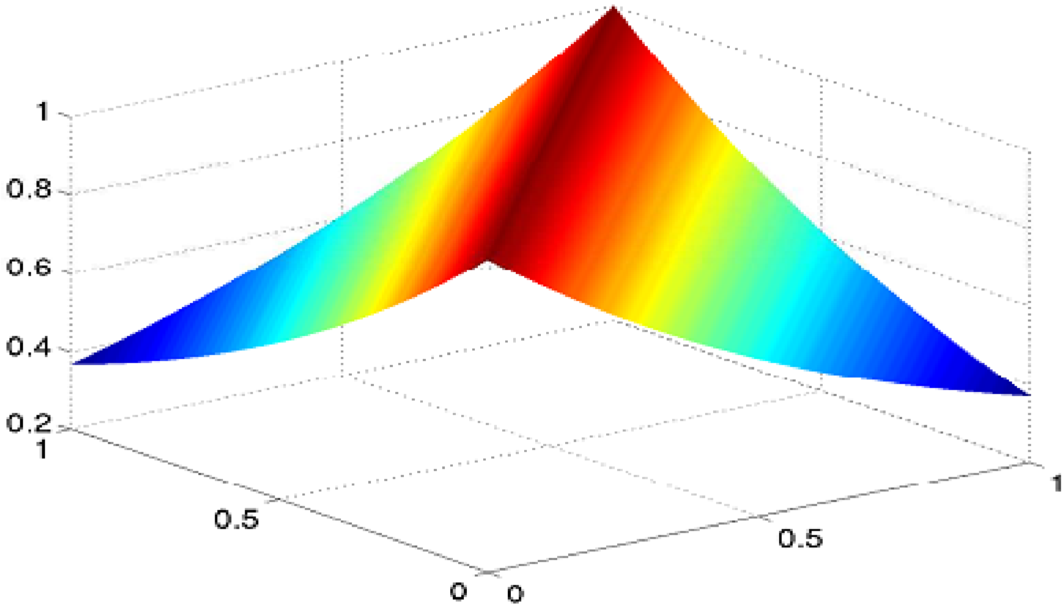
kernel de l opérateur de processus gaussien on trouve l'application sur R simulation de kernel de l opérateur de processus gaussien centre

$$C(t,s) = exp^{-|t-s|}$$

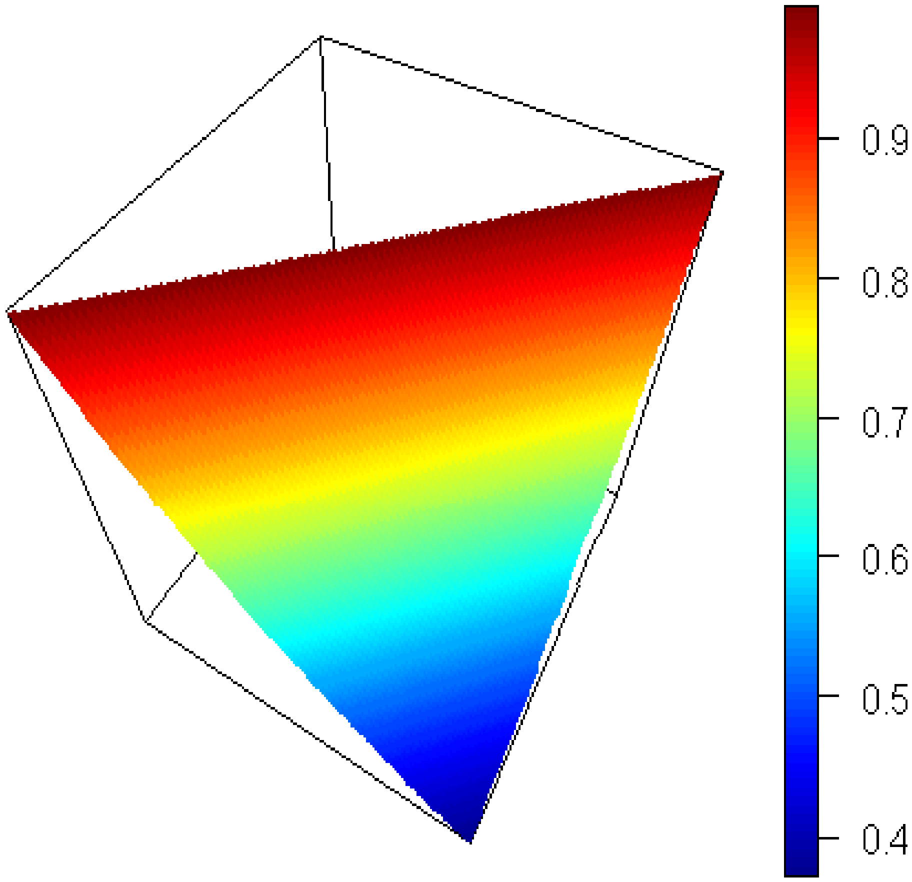
```
##  2D Gaussian Kernal plot
##  Generer les sequences t et s
s = seq(0,1,0.01)
t = seq(0,1,0.01)
# Une matrice vide z
C = matrix(data=NA, nrow=length(s), ncol=length(t))
for(i in 1:length(s))
{
for(j in 1:length(t))
{
C[i,j] = exp(-abs(s[i]-t[j]))
}
}
# Required for using persp3D() function below.
library(plot3D)


## Nous appelons la fonction persp3D pour les memes
## donnees de noyau gaussien generees ci-dessus.

persp3D(t,s,C,theta=30, phi=50,axes=T,scale=T, box=T, nticks=5,
ticktype="detailed",xlab="s", ylab="t", zlab="C(s,t)",
main="Gaussian Kernal")
```



Gaussian Kernal



Conclusion

Dans le cadre multivarié, la covariance a une forme matricielle : l'extension naturelle à la dimension infinie est donc un opérateur. On se présent au cas oú espace vectoriel normé complet c-a-d espace de banach en suite de Hilbert .c'est l' opérateur de covariance des données fonctionnelle plus precisement la representation au l'espace $L^2([0,T])$ des fonctions de carré intégrable sur [0,T]

Utilisation en statistique de La matrice de covariance est un outil essentiel pour l'analyse multivariée : l'analyse en composantes principales qui exploite la diagonalisation de cette matrice ; l'analyse discriminante qui se fonde sur l'examen des coefficients de cette matrice.
La conclusion que nous obtenons est le tableau suivant :

Synthésé

	Cas multivarié	**cas fonctionnel**
Variable	$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^t$	$\mathbf{X} \in L$
Espérance	**vecteur de moyenne** $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[\mathbf{X}_1],...,\mathbb{E}[\mathbf{X}_n]])^t$	**courbe de la moyenne** $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \{\mathbb{E}[X(t)], t \in \mathcal{R}\}$
covariance	**matrice** $\sum_x = cov(X, X)$	**fonction de covariance $\mathcal{C}_x$ ou opérateur $\mathcal{R}_x$** $\mathcal{C}_x(s,t) = cov(X(s),X(t))$

Bibliographie

[1] 1987-Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanyan S.A - Probability distributions on Banach spaces - Springer - 1 page 144

[2] 1987-Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanyan S.A - Probability distributions on Banach spaces - Springer - 1 page 169

[3] 1987-Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanyan S.A - Probability distributions on Banach spaces - Springer - 1 page 171

[4] 1987-Vakhania N.N., Tarieladze V.I., Chobanyan S.A - Probability distributions on Banach spaces-Springer-1 page 170

[5] ATTEIA (M.) . 2014 Hilbertian kernels and spline functions, (1989) livre à paraître.

[6] Boudou, A. (2006)*Approximation of the principal component analysis of a stationary function*. Statistics and Probability Letters 76 571-578

[7] Giuseppe da Prato, Equations in Hilbert Spaces.

[8] H. Brezis. Analyse fonctionelle Théorie et Applications, 1987.

[9] https ://www.cuemath.com/algebra/covariance-matrix

[10] https ://www.cuemath.com/algebra/covariance-matrix

[11] https ://www.math.u-bordeaux.fr/ mchabano/Agreg/ProbaAgreg1213-COURS1-VectGauss.pdf

[12] N. Dunford et J. T. Schwartz : Linear operators, vol. i. Interscience, New York, 1963, 1958.

[13] Jean-Claude Laleuf, Processus et intègrales stochastiques, coll. ”Ellipses”, 2014.

[14] R. B. Ash et M. F. Gardner : Topics in stochastic processes. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 27.

[15] TAYLOR (S.J.) . 2014 Introduction to measure and intégration, Cambridge University Press (1966).

[16] W. V. Li et Q.-M. Shao : Gaussian processes : inequalities, small ball probabilities and applications. In Stochastic processes : theory and methods, vol. 19 de Handbook of Statist., p. 533-597. North-Holland, Amsterdam, 2001.

[17] w.GRENANDER (U.) .2014 Probabilities on algebraic structures, Almquist et Wiksell, Stockholm (1963).

[18] W.V. Lovitt. Linear Intégral Équation , 1950.

[19] Extrait de "Je suis mathématicien" de N. Wiener, p. 35, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts 1964.

[20] J. O. Ramsay et B. W. Silverman : Applied functional data analysis. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2002. Methods and case studies.

[21] F. Ferraty et P. Vieu : Nonparametric functional data analysis. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2006. Theory and practice..

[22] P. J. Green et B. W. Silverman : Nonparametric regression and generalized linear models, vol. 58 de Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman et Hall, London, 1994. A roughness penalty approach..

[23] Vakhaniya, N.N. ; Chobanyan, S.A., On the problem of best approximation in a space of vector-valued functions. Math., Dokl. 25, (1982), 565-568.

[24] J. O. Ramsay, G. Hooker et S. Graves : Functional data analysis with R and MATLAB. Springer Science et Business Media, 2009.

[25] J. O. Ramsay et B. W. Silverman : Functional data analysis. Springer Series in Statistics. Springer, New York, second édn, 2005..