REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre universitaire Salhi Ahmed – Naàma

Institut des Sciences et technologies

Département de Mathématiques et informatiques

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtenue du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Filière : Mathématiques

Thème

Problème de Valeur Propre pour l'Opérateur p-Laplacien Fractionnaire

Présenté par : ZIANI Salima

Soutenu le: **5/7 / 2021**

Devant le jury :

Encadreur : **Mr TAHRI Kamel** MCA, ESM, Tlemcen.

Président : **Mr KHALDI Brahim** MCB, C-Univ Salhi Ahmed, Naàma.

Examinateur : **Mr ZOUAUI Ali** MCB, Univ Mustapha Stambouli Mascara.

Année universitaire 2020/2021

Ddicaces

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents à qui

Je dois compte tout travail est fruit de leur amour

Leurs encouragement et sacrifices

A ma chère mère.

A mon cher père.

A ma chère sœur.

A mes chers frères.

A toute ma famille.

A mes amis.

A toutes mes amies et

Toute personne qui ont contribué à

La réalisation de ce travail.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah tout puissant, pour la bénédiction de la connaissance et pour la force, le courage qu'il m'a accordé dans ce travail.

J'exprime toute ma gratitude et mes remerciements à mon encadreur, Mr. TAHRI Kamal, pour ses conseils avisés, ses conseils et sa patience, qu'il m'a prodigués tout au long de cette période, il a une récompense de Allah, et de moi tout doit être apprécié.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce mémoire, je tiens également à remercier tous les professeurs et enseignants qui m'ont aidé et contribué dans mon cheminement académique.

Notation

Symbole	**Signification**
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.
$W_0^{s,p}(\Omega)$	Espacs de Sobolev de type fractionnaire.
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R},\ u$ mesurable, et $\exists C$ tel que $\lvert u(x)\rvert \leq C$ p.p $\}$.
$L^P(\Omega)$	$\left\{u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable}, \quad \int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\right\}$, $1 \leq p < \infty$.
$C_0^\infty(\Omega)$	Ensemble des fonction C^∞ à support compact inclue dans Ω.
$C^k(\Omega)$	Ensemble des fonction de class k dans Ω.
$C^{k,\beta}(\Omega)$	Ensemble des fonction Holderiennes de class k dans Ω.
$C_c^k(\Omega)$	Ensemble des fonction C^k à support compact.
Δu	Laplacien de la fonction .
Δ_P	P-Laplacien de la fonction
$(-\Delta)^s$	Laplacien fractionnaire.
$(-\Delta)_p^s$	P-Laplacien fractionnaire.
∇u	Gradient de u.
u^+	Partie positive de la fonction u, $u^+ = \max(u, 0)$.
u^-	Partie négative de la fonction u, $u^- = \min(u, 0)$.
p_s^*	L'exposant critique se Sobolev tel que :$p_s^* := \frac{pn}{n-sp}$ avec $n > p$.
dx	Mesure de Lebesgue de dimension N.
p.p	presque partout
P.V	Valeur principale.

Table des Matières

Introduction **6**

1 Espace de Sobolev de Type Fractionnaire **8**

1.1 Introduction et Motivation: 8

1.2 Espace de Sobolev de Type Fractionnaire, $s \in (0,1)$: 8

1.3 Espace de Soboleve de Type Fractionnaire, $s > 1$: 9

1.4 Exemples d'application: 9

1.5 Approximation de l'Espace $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$: 15

1.6 Approximation de l'Espace $W_0^{s,p}(\Omega)$: 15

1.7 Dual de l'Espace $W^{s,p}(\Omega)$: 15

1.8 Les Propriétés Fonctionnelles de l'Espace $W^{s,p}(\Omega)$: 15

1.9 Les Injections de type Sobolev sur $W^{s,p}(\Omega)$: 16

1.9.1 Le cas où $sp < n$: 17

1.9.2 Le cas où $sp = n$: 18

1.9.3 Le cas où $sp > n$: 18

2 L'opérateurs Laplacien et le $p-Laplacien$ Fractionnaire **20**

2.1 Opérateur $p-Laplacien$ Fractionnaire: 20

2.2 Opérateurs *Laplacien* Fractionnaire: 21

2.3 Les Proprièțés de l'Opérateur *p_Laplacien* Fractionnaire: 21

2.3.1 Les Proprièțés de l'Opérateur *Laplacien* Fractionnaire: 27

3 Problèmes aux Valeurs Propres de Type Fractionnaire **30**

3.1 Introduction et Motivation: 30

3.2 Existence de la première valeur propre: 31

3.3 Régularité de la fonction propre: 44

3.4 Propriété de la première fonction propre: 52

3.4.1 Positivité 52

3.4.2 Simplicité 59

4 Les Outils de calculs **61**

4.1 Conclusion générale 63

Introduction

Les équations aux dérivées partielles elliptiques sont outils essentiels de modélisation et leurs études occupent les mathématiciens depuis le dix-huitième siècles avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et de Laplace..., au fil de cette dernière quarantaine d'années beaucoups des phénomènes et des problèmes moderns physiques: en électromagnétisme(équatio de Maxwell), en mécaniques des fluides(équation de Navier-Stokers), biologiques et technologiques ont été modelés par des équations aux dérivées partielles(EDP), paraboliques ou hyperboliques, mais avec des conditions non locales.

Il existe des cas particuliers pour étudier les problèmes aux valeurs propres et des fonctions propres de l'opérateur p-Laplacien, pour trouver les couples de solution (u, λ) où λ est une valeur propre et u est une fonction propre associée, si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \left| u \right|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Et u est une solution faible de problème (1), si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que:

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \\ \int_\Omega \left| \nabla u \right|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega \left| u \right|^{p-2} uv dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{2}$$

Et la première valeur propre définie par:

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|u\|\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p}{\int_\Omega |u|^p} dx.$$

Les équations aux dérivées partielles elliptiques de type fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation (classique) à un ordre non entier, et ces équations à nombreuses applications dans la description de nombreux évènements qui ne peuvent pas être résolues exactement qu'en utilisant des méthodes comme la méthode variationnelle.

Il y a des opérateurs de type fractionnaire comme l'opérateur Laplacien de type fractionnaire et l'opérateur p-Laplacien de type fractionnaire qui est également une généralisation d'opérateur p-Laplacien.

Dans ce travail, nous étudions le problème de valeurs propres pour l'opérateur p-Laplacien de type fractionnaire c'est une extension de problème aux valeurs propres pour l'opérateur p-Laplacien classique, et ce problème est: soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ on a:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Ce mémoire est réparti principalement en, plus d'une introduction, quatre chapitres. Le premièr chapitre est consacré à la présentation des espaces de Sobolev de type fractionnaire et leurs propriétés (réflexivité, complétude, séparabilité, injection, etc.). Et dans le deuxième chapitre, on présente les opérateurs Laplacien et p-Laplacien de type fractionnaire et leurs propriétés. Et dans troisième chapitre, on étudie le problème de valeurs propres de type fractionnaire pour l'opérateur p-Laplacien et l'existence de la première valeur propre et la régularité des fonctions propres et quelque propriété de la fonction propre (positivité, simplicité). Et le dernier chapitre, on présente les théories utilisées dans ce travail.

Chapitre 1

Espace de Sobolev de Type Fractionnaire

1.1 Introduction et Motivation:

Dans ce chapitre, en s'intéresse d'introduire les espaces de Sobolev de type fractionnaire et quelques propriétés concernant ces espaces là. Ainsi, on va introduire quelques ces propriétés fonctionnelles et injections de type Sobolev.

1.2 Espace de Sobolev de Type Fractionnaire, $s \in (0,1)$:

Définition 1.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, et $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$, on définit l'espace de Sobolev de type fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par:*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \tag{1.1}$$

muni de la norme suivant:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}},$$

avec et la semi norme de Gagliardo donnée par

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-(u)\,y|}{|x-y|^{n+sp}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3 Espace de Soboleve de Type Fractionnaire, $s > 1$:

Définition 1.2 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, et $s \notin \mathbb{N}$ avec $s > 1$ et $p \in [1, +\infty[$, on peut écrire $s = m + \delta$, $m \in \mathbb{N}$ et $\delta \in (0,1)$, on définit l'espace de Sobolev de type fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s > 1$ par:*

$$W^{\,s,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m,p}(\Omega), D^{\alpha}u \in W^{\delta,p}(\Omega) \text{ pour tout } \alpha, \text{tq: } |\alpha| = m\right\}, \qquad (1,2)$$

muni de la norme suivant:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}u\|^p_{W^{\delta,p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.4 Exemples d'application:

Exemple 1.1 *Soit $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(x) = \ln|x|$, on va montrer $u \in W^{s,p}(\Omega)$ avec $\Omega := (0,1)$ et $sp < 1$.*

Preuve: On remaque que u est continue sur $\mathbb{R}^*$, ce qui implique que u est mesurable sur Ω.Il nous reste à montrer que $u \in L^p(\Omega)$ et $u \in W^{s,p}(\Omega)$. La demonstration se divise en deux parties:

1. On comence de va montrer qui $u \in L^p(\Omega)$.

   On pose
$$I := \int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \int_0^1 |\ln|x||^p \, dx.$$
   On sait que la fonction $\ln(x)$ est croissante sur Ω, alors on a:
$$\ln|x| < x.$$
   Puis on intègre
$$\int_0^1 |\ln x|^p \, dx < \int_0^1 |x|^p \, dx.$$
   On obtient
$$\int_0^1 |\ln x|^p \, dx < \int_0^1 |x|^p \, dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} < +\infty.$$
   On conclut que:
$$I := \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty.$$
   Et par conséquent
$$u \in L^P(\Omega).$$

2. Maintenant on que
$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy < +\infty.$$
   On pose
$$J := \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln(x) - \ln(y)|^p}{|x-y|^{sp+1}}.$$
   On obtient
$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln(x) - \ln(y)|^p}{|y|^{sp+1} \left|\frac{x}{y} - 1\right|^{sp+1}} dxdy.$$

En faisant le changement de variable

$$t = \frac{x}{y}.$$

Donc

$$J = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} y^{-sp} \frac{|\ln|yt| - \ln|y||^p}{|t-1|^{sp+1}} dtdy.$$

On obtient,

$$J = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\left|\ln \frac{|ty|}{|y|}\right|^p}{|1-t|^{sp+1}} dtdy.$$

$$J = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dtdy$$

$$\leq \int_0^1 y^{-sp} \left(\int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dt \ + \ \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dt \right) dy$$

$$\leq \int_0^1 y^{-sp} \int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dtdy + \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dtdy$$

Posons

$$J_1 = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dtdy,$$

et

$$J_2 = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dtdy.$$

Pour J_1, au voisinage de 0 on a

$$\frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} \sim |\ln t|^p \,,$$

et

$$\int_0^1 |\ln t|^p \, dx < +\infty.$$

Daprès critére d'équivalent:

$$\int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dx < +\infty.$$

Pour J_1, au voisinage de 1 on a

$$\frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} \sim |1-t|^{p-sp-1}$$

et

$$\int_0^1 |1-t|^{p-sp-1}\, dx = \left[\frac{1}{p-sp}\,|1-t|^{p-sp}\right]_0^1 = -\frac{1}{p-sp} < +\infty.$$

Donc au voisinage de 1:

$$\int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dx < +\infty.$$

D'autre part on a:

$$\int_0^1 y^{-sp} dy = \left[\frac{1}{-sp+1} y^{-sp+1}\right]_0^1 = \frac{1}{-sp+1} < +\infty.$$

Alors on déduit que

$$J_1 < +\infty.$$

Pour J_2:

$$J_2 = \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dt dy.$$

D'aprés la formule de Fubuni, on a:

$$J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} \left(\int_0^1 y^{-sp} dy\right) dt$$

et

$$= \frac{1}{-sp+1} \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} dt.$$

Au voisinage $+\infty$,ona

$$\frac{1}{|1-t|^{sp+1}} \sim \frac{1}{|t|^{sp+1}}$$

et

$$\frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \sim \ln |t|^p \, t^{-2}.$$

Comme $\ln |t|^p \, t^{-2}$ est intégrable, par le théorème de comparaison, au voisinage de

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} dt < +\infty.$$

Et au voisinage de 1, on obtient

$$\frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \sim |1-t|^{p-sp-1}$$

et $|1-t|^{p-sp-1}$est intégrable, d'après le théorème de comparaison, l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} dt < +\infty.$$

Donc

$$J_2 < +\infty$$

Par conséquent $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

■

Exemple 1.2 *Soit* $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(x) = |x|^{\alpha}$, *on va montrer* $u \in L^p(]0,1[)$ *et* $u \in W^{s,p}(]0,1[)$ *avec* $sp \langle 1$ *et* $\alpha = 1$.

Preuve: On remaque :u est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui implique u est mesurable sur $]0,1[$ .On commence de va montrer qui $u \in L^p(]0,1[)$: on calcule:

$$\int_0^1 |x|^p \, dx = \left[\frac{1}{p+1} (x)^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} < +\infty.$$

Alors $u \in L^p\left(]0,1[\right)$.

D'autre part, on va montrer:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy \in L^p\left(]0,1[\times]0,1[\right).$$

On a

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy.$$

Et

$$= \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^{p-sp-1}\, dxdy$$

D'autre part

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y |y-x|^{p-sp-1}\, dx + \int_y^1 |x-y|^{p-sp-1}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\left[\frac{1}{p-sp} |y-x|^{p-sp} \right]_0^y + \left[\frac{1}{p-sp} |x-y|^{p-sp} \right]_y^1 \right] dy.$$

D'où

$$= \int_0^1 \frac{1}{p-sp} y^{p-sp} + \frac{1}{p-sp} (1-y)^{p-sp}\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{p-sp}\right)\left(\frac{1}{p-sp+1}\right)\left[y^{p-sp+1}\right]_0^1 + \left(\frac{1}{p-sp}\right)\left(\frac{1}{p-sp+1}\right)\left[(1-y)^{p-sp}\right]_0^1.$$

Finalement

$$= \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} + \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} \langle +\infty.$$

On conclut

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy < +\infty.$$

Alors

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy \in L^p\left(]0,1[\times]0,1[\right).$$

On déduit que $u \in W^{s,p}\left(]0,1[\right)$. $\blacksquare$

1.5 Approximation de l'Espace $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$:

Définition 1.3 *Soient $s \in \mathbb{N}$ et $s > 0$, toutes fonctions dans l'espace Sobolev de type fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, on peut approximer par des fonctions lisses à support compact, par:*

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|.\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}} = W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

1.6 Approximation de l'Espace $W_0^{s,p}(\Omega)$:

Définition 1.4 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $s < 0$, l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{s,p}(\Omega)$, on définit $W_0^{s,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme $\|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ par:*

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}}.$$

1.7 Dual de l'Espace $W^{s,p}(\Omega)$:

Définition 1.5 *soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $s < 0$ et $p \in (1, +\infty)$, on désigne par l'éspace dual de l'éspace $W^{s,p}(\Omega)$ par $W_0^{-s,q}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ par:*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left(W_0^{-s,q}(\Omega)\right)^*.$$

1.8 Les Propriétés Fonctionnelles de l'Espace $W^{s,p}(\Omega)$:

Théorème 1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $s \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty[$, on a les propriétés suivantes:*

1. *L'espace* $\left(W^{s,p}(\Omega), \|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}\right)$ *est un espace normé avec:*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Theorem 1 1. *L'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace complet.*

2. *L'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace Banach pour tout* $1 \leq p < +\infty$.

3. *L'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour tout* $1 \leq p < +\infty$.

4. *L'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace réflexif pour tout* $1 < p < +\infty$.

5. *L'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est un espace uniformément convexe pour tout* $1 < p < +\infty$.

1.9 Les Injections de type Sobolev sur $W^{s,p}(\Omega)$:

Théorème 1.2 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *et* $p \in [1, +\infty[$ *on a:*

1. *Si* $0 < s \leq s' < 1$, *on a l'injection suivant :*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega).$$

est continue. d'où, il existe une constante $C_1(n,s,p) \geq 1$ *telle que pour toute* $u \in W^{s',p}(\Omega)$ *on a:*$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_1(n,s,p)\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$.

2. *Si* $0 < s < 1$, *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* $C^{0,1}$ *de frontière borné, on a l'injection suivant :*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

est continue. d'où, il existe une constante $C_2(n,s,p) \geq 1$ *telle que pour toute* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on a :*$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_2(n,s,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

3. Si $1 < s \leq s'$, et Ω est de classe $C^{0,1}$, on a l'injection continue suivant:

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega).$$

1.9.1 Le cas où $sp < n$:

Théorème 1.3 *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp < n$, alors il existe un constant positive $C = C(n,s,p)$ tel que pour toute fonction $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ on a:*

$$\|u\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy,$$

avec

$$p_s^* := \frac{pn}{n - sp}.$$

Par conséquent, pour tout $q \in [p, p_s^*]$, alors l'espace $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans l'espace $L^q(\mathbb{R}^n)$, et l'injection continue. De plus l'injection $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est compact pour tout $q \in [p, p_s^*[$.

Théorème 1.4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$, tel que $sp < n$, alors il existe un constant positive $C := C(n,p,s,\Omega)$ tel que pour toute $u \in W^{s,p}(\Omega)$ on a:*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Par conséquent, pour tout $q \in [p, p_s^*]$, alors l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est inclus dans l'espace $L^q(\Omega)$, et l'injection continue.De plus si Ω est borné et pour tout $q \in [1, p_s^*[$, alors l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ est compact.

1.9.2 Le cas où $sp = n$:

Théorème 1.5 *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1,+\infty[$ *tel que* $sp = n$*, alors il existe un constant positive* $C = C(n,s,p)$ *tel que pour toute fonction* $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ *on a:*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout $q \in [p,+\infty[$*, alors l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est inclus dans l'espace* $L^q(\Omega)$*, et l'injection continue.*

Théorème 1.6 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, et* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1,+\infty[$*, tel que* $sp = n$*, alors il existe un constant positive* $C := C(n,p,s,\Omega)$ *tel que pour toute* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *on a:*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

pour tout $q \in [p,+\infty[$*, alors l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est inclus dans l'espace* $L^q(\mathbb{R}^n)$*, et l'injection continue.De plus si* Ω *est borné et pour tout* $q \in [1,+\infty[$*, alors l'injection* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ *est continue.*

1.9.3 Le cas où $sp > n$:

On note l'espace des fonctions continue de Hölder par $C^{0,\alpha}(\Omega)$ et muni de la norme suivant:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Théorème 1.7 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*de class* $C^{0,1}$*,de frontière borné, et* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1,+\infty[$*, tel que* $sp > n$*, alors il existe un constant positive* $C := C(n,p,s,\Omega)$ *tel que pour toute* $u \in W^{s,p}(\Omega)$ *on a:*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

pour $\alpha := \frac{(sp-n)}{p}$*, alors l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *est inclus dans l'espace* $C^{0,\alpha}(\Omega)$*, et l'injection* *continue.*

Théorème 1.8 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$de class $C^{0,1}$,de frontière borné, et $s \in (0,1)$ et $p \in [1,+\infty[$, tel que $sp > n$, on a l'injection suivant:*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$$

est compact pour tout $\beta < \alpha$,tel que $\alpha := \frac{(sp-n)}{p}$.

Chapitre 2

L'opérateurs Laplacien et le $p - Laplacien$ Fractionnaire

Dans ce chapitre, on introduit l'opérateurs Laplacien et p_Laplacien de type fractionnaire avec des résultats de cet opérateurs.

2.1 Opérateur $p - Laplacien$ Fractionnaire:

Définition 2.1 *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit l'opérateur p-Laplacien de type fractionnaire,*

$$(-\Delta)_p^s : S \to L^2(\mathbb{R}^n) :$$

$$(-\Delta)_p^s u(x) := 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Avec

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} dy.$$

2.2 Opérateurs *Laplacien* Fractionnaire:

Définition 2.2 *Si $p = 2$, on obtient l'opérateur Laplacien de type fractionnaire*

$$(-\Delta)^s : S \to L^2(\mathbb{R}^n) :$$

$$(-\Delta)^s u(x) := 2C(n,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+sp}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 2.3 *La constante de normalisation $C = C(n,s)$ est défini par:*

$$C(n,s) := \left(\int \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1}$$

avec $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n)$.

2.3 Les Propriètés de l'Opérateur *p_Laplacien* Fractionnaire:

proposition 2.1 *La proposition suivante donne la relation entre $(-\Delta)_p$et $(-\Delta)_p^s$:*

1. *$(-\Delta)_p^s \to (-\Delta)_P$ quand $s \to 1$, dans l'espace dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$.*
2. *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ alors:*

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$$

   est bien définit.

3. *Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ on a:*

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

4. Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$*:*

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Donc

$$\left\| (-\Delta)_p^s u \right\|_{\left(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)^*} \leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} .$$

Preuve: On démontrer la proposition 4. Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy v(x)\, dx. \tag{(1.1)}$$

D'après théorème de Fubini

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x)\, dxdy,$$

D'autre part

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(y) dxdy.$$

On peut changer les roles entre x et y :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x)\, dxdy \\ = & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} v(x) dxdy, \end{aligned}$$

Et par suit

$$
\begin{aligned}
& 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}v(x)\,dxdy \\
= & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.
\end{aligned}
$$

D'apres (1.1) on a:

$$
\left\langle(-\Delta)_p^s u, v\right\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy
$$

$$
\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{(n+sp)\left(\frac{p-1}{p}\right)}|x-y|^{(n+sp)\left(\frac{1}{p}\right)}}dxdy,
$$

Par l'inégalité de Holder:

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
& \times\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|(v(x)-v(y)|^{p}}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
= \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1}\|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Par conséquent

$$
\left\langle(-\Delta)_p^s u, v\right\rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1}\|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.
$$

■

proposition 2.2 *On montrer la monotone de l'opérateur p_Laplacien fractionnaire. Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, et* $s\in(0,1)$ *et* $p\in[1,+\infty[$

$$
(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\Omega) \to \left(W_0^{s,p}(\Omega)\right)^*
$$

est strictement monotone c'est à dire: pour tout $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *avec* $u \neq v$ *montrer que:*

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle > 0.$$

Preuve: Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle = \left\langle (-\Delta)_p^s u, u - v \right\rangle - \left\langle (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle.$$

D'aprés la linéairité de deuxième variable

$$= \left\langle (-\Delta)_p^s u, u - v \right\rangle - \left\langle (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle.$$

D'aprés la linéairité de la deuxième composant

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, u \right\rangle - \left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle - \left\langle (-\Delta)_p^s v, u \right\rangle + \left\langle (-\Delta)_p^s v, v \right\rangle,$$

$$\geq \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|u\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|v\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Par conséquent

$$= \left(\|u\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|v\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right) \left(\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right), \quad \forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Donc $(-\Delta)_p^s$est monotone.

Et pour $(-\Delta)_p^s$est strictement monotone il faut montrer: soient $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, et $u \neq v$ on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle > 0.$$

D'autre part

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle > \left(\|u\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|v\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right) \left(\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right),$$

Supposons que

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle = 0.$$

Alors

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u - (-\Delta)_p^s v, u - v \right\rangle = \left(\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} - \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \right) \left(\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} - \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \right) = 0.$$

Et de plus on a

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Donc

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \text{ et } \left\langle (-\Delta)_p^s v, u \right\rangle = \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Et

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} ,$$

Qui implique $u = v$ et ce contradiction avec $u \neq v$. ■

On va regarder la contiuté de l'opérateur p_Laplacien fractionnaire:

proposition 2.3 *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1, +\infty[$*, alors:*

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \to \left(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)^* ,$$

est continue: $(-\Delta)_p^s \in C(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*)$.

Preuve: Soient $u_n \to u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ on va montrer $(-\Delta)_p^s\ u_n \to (-\Delta)_p^s u$ dans $(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$, on a:

$$\left\| (-\Delta)_p^s u_n \to (-\Delta)_p^s u \right\|_{\left(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)^*} \to \|u_n \to u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} .$$

Donc il suffit de montrer que:

$$\|u_n \to u\|^{p-1}_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

On a

$$u_n \to u \text{ dans } W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

Et par conséquent

$$u_n \to u \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Pour une sous suite on a $\exists g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$u_n \to u \text{ p.p et } |u_n| \leq g(x).$$

Et d'aprés théorème de convergence dominée alors $(-\Delta)^s_p \in C(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*)$.

■

On va regarder la linéairité de l'opérateur *p_Laplacien* fractionnaire.

proposition 2.4 *Soient $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$, alors $(-\Delta)^s_p$ est non linéaire.*

Preuve: Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned}
&(-\Delta)^s_p (\lambda u(x) + v(x)) \\
:\quad &= 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\lambda u(x) + v(x)) - (\lambda u(y) + v(y))|^{p-2} ((\lambda u(x) + v(x)) - (\lambda u(y) + v(y)))}{|x-y|^{n+sp}} dy.
\end{aligned}$$

On obtient

$$:= 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\lambda u(x) - \lambda u(y)) + (v(x) + v(y))|^{p-2} ((\lambda u(x) - \lambda u(y)) + (v(x) + v(y)))}{|x-y|^{n+sp}} dy$$

et

$$= 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\lambda u(x) - \lambda u(y)) + (v(x) + v(y))|^{p-2} ((\lambda u(x) - \lambda u(y)) + (v(x) + v(y)))}{|x-y|^{n+sp}} dy.$$

D'aprés théorème de Minkoweski

$$\begin{aligned} &\leq \; 2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\lambda u(x) - \lambda u(y)) + (v(x) + v(y))|^{p-2} (\lambda u(x) - \lambda u(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy \\ &\quad +2P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\lambda u(x) - \lambda u(y)) + (v(x) + v(y))|^{p-2} (v(x) + v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy. \end{aligned}$$

On utilise le théorème de Minkoweski pour la deuxiéme fois

$$\begin{aligned} &\leq \; 2P.V(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\lambda|^{p-2} |(u(x) - u(y))|^{p-2} \lambda (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\lambda|^{p-2} |(u(x) - u(y))|^{p-2} (v(x) + v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x) + v(y))^{p-2} \lambda (u(x) - u(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(v(x) + v(y))|^{p-2} (v(x) + v(y))}{|x-y|^{n+sp}} dy. \end{aligned}$$

Alors la résultat est

$$\neq \lambda (-\Delta)_p^s u(x) + (-\Delta)_p^s v(x)).$$

Donc $(-\Delta)_P^s$ est non linéaire. ∎

2.3.1 Les Propriètés de l'Opérateur *Laplacien* Fractionnaire:

proposition 2.5 *Soit $s \in (0,1)$, alors $(-\Delta)^s$ est bijectif.*

on va montrer la linéairité de l'opérateur Laplacien:

proposition 2.6 *Soit $s \in (0,1)$, alors $(-\Delta)^s$ est linéaire.*

Preuve: Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:

$$(-\Delta)^s(\lambda u(x)+v(x) := 2C(n,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\epsilon)}\frac{(\lambda u(x)+v(x))-(\lambda u(y)+v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dy.$$

Et

$$= 2C(n,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\epsilon)}\frac{\lambda u(x)+v(x)-\lambda u(y)-v(y)}{|x-y|^{n+sp}}dy.$$

Et par suit

$$= 2C(n,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\epsilon)}\frac{\lambda(u(x)-u(y))+v(x)-v(y)}{|x-y|^{n+sp}}dy.$$

D'autre part

$$= 2C(n,s).\lambda\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\epsilon)}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+sp}}dy + 2C(n,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x,\epsilon)}\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{n+sp}}dy.$$

En fin

$$(-\Delta)^s(\lambda u(x)+v(x)) = \lambda(-\Delta)^s u(x) + (-\Delta)^s v(x)).$$

Alors $(-\Delta)^s$ est linéaire. ■

Cette proposition pour la continuté de l'opérateur Laplacien:

proposition 2.7 *Soit* $s \in (0,1)$, *on a* $(-\Delta)^s$ *est continue.*

Preuve: On va montrer qu'il existe $c > 0$ telle que:

$$\|(-\Delta)^s u\|_{\left(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)^*} \leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Soient $u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ et $(-\Delta)^s u \in (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$ on a:

$$\langle(-\Delta)^s u(x), v\rangle := 2C(n,s).P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(y)(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dydx.$$

D'aprés Holder on trouve

$$\leq 2C(n,s).P.V.\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+sp}}dydx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(v(x)-v(y))^2}{|x-y|^{n+sp}}dydx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient

$$\leq 2C(n,s).P.V.\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.\|v\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

On conclut

$$\|(-\Delta)^s u\|_{\left(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)^*}\leq C\|u\|_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Alors $(-\Delta)^s$ est continue. ■

proposition 2.8 *Soit $s\in(0,1)$, on a $(-\Delta)^s$est auto adjoint.*

Preuve: Soient $u,v\in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, on a par définition,

$$\langle(-\Delta)^s u,v\rangle = 2C(n,s).P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(y)(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.$$

Puis que (.)est commutative

$$\langle(-\Delta)^s u,v\rangle = 2C(n,s).P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(v(x)-v(y))\,u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$=\langle u,(-\Delta)^s v\rangle.$$

On conclut que, $(-\Delta)^s$est auto adjoint. ■

Chapitre 3

Problèmes aux Valeurs Propres de Type Fractionnaire

3.1 Introduction et Motivation:

Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale des équations aux dérivées partielles élliptique de type fractionnaire, c'est-à-dire à l'étude des valeurs propres et des fonctions propres de ces équations. La motivation de cette étude est d'etudier des solutions particulières.

Donnons tout de suite un exemple de problème aux valeurs propres pour p_Laplacien fractionnaire avec condition aux limites de Dirichlet. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ on cherche les couples $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W_0^{s,p}(\Omega)$, avec $u \neq 0$, solutions de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le réel λ est appelé valeur propre, et la fonction $u(x)$ est fonction propre. L'ensemble des valeurs propres est appelé le spectre de (3.1). On peut faire l'analogie entre (3.1) et le problème plus simple de détermination des valeurs propres associé aux problème élliptique suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 3.1 *On dit que u est une solution faible de* (3.1) *si $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega) \tag{3.2}$$

Définition 3.2 *Soient $s \in (0,1)$ et $p > 1$, on dit que λ est une valeur propre de l'opérateur p_Laplacien fractionnaire, s'il existe une fonction $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ du problème* (3.2).

La solution faible u s'appelle fonction propre associé à λ.

Remarque 2 *Si on remplace φ par $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ dans* (3.2) *on obtient λ comme le quotient suivant:*

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_\Omega |u|^p dx}$$

Ce quotient est appelé le quotient de **Rayleigh**.

3.2 Existence de la première valeur propre:

Définition 3.3 *La première valeur propre de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire noté par λ_1 est définie par:*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_\Omega |u|^p dx} = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}}. \tag{3.3}$$

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donne par le théorème suivant:

Théorème 3.1 *Soient $s \in (0,1)$ et $p > 1$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors le problème admit une fonction propre associé à la première valeur propre λ_1 qui caractérisée comme* *suit:*

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy. \tag{3.4}$$

Pour montrer ce théorème, on utilise le résultat suivant:

Théorème 3.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$ pour $p \in (1,+\infty)$, on définit la fonction*

$$G : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Avec

$$G(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

Alors G est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$ et

$$\left\langle G'(u), \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy.$$

Preuve: On montre que G est Gateaux différentiable c'est-à-dire :soient u et $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(u+t\varphi)-G(u)}{t} = \left\langle G'(u), \varphi \right\rangle.$$

On calculer

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0}\frac{G(u+t\varphi)-G(u)}{t} \\ =\ &\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u(x)+t\varphi(x))-(u(y)+t\varphi(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right] \end{aligned}$$

D'ou

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u(x)-u(y))+t(\varphi(x)-\varphi(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\right]$$

Pour calculer cette limite, on utilisé la théorème des accroissements finis sur la fonction g définie par:

$$g(s) = |(u\,(x) - u(y)) + s(\varphi(x) - \varphi(y))|^p$$

En effet, il existe un nombre θ telle que $(0 < \theta < |t|)$ qui vérifiant:

$$g(t) - g(0) = g'(\theta)(t - 0)$$

Et par suit

$$\begin{aligned} & |(u\,(x) - u(y)) + t(\varphi(x) - \varphi(y))|^p - |u\,(x) - u\,(y)|^p \\ = \; & \left[p\,|(u\,(x) - u\,(y)) + \theta(\varphi(x) - \varphi(y)|^{p-2}\,(u\,(x) - u\,(y) + \theta(\varphi(x) - \varphi(y))\,(\varphi\,(x) - \varphi\,(y))\right] t. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u\,(x) - u(y)) + t(\varphi(x) - \varphi(y))|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u\,(x) - u\,(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy\right] \\ = \; & \lim_{\theta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u\,(x) - u\,(y)) + \theta(\varphi(x) - \varphi(y)|^{p-2}\,(u\,(x) - u\,(y) + \theta(\varphi(x) - \varphi(y))\,(\varphi\,(x) - \varphi\,(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxd \end{aligned}$$

On conclut

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u\,(x) - u\,(y)|^{p-2}\,(u\,(x) - u\,(y))\,(\varphi\,(x) - \varphi\,(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

Par conséquent G est Gateaux différentiable. En plus, on pose

$$Lu : W_0^{s,p}\,(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Et

$$\varphi \to Lu\,(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u\,(x) - u\,(y))^{p-2}\,(u\,(x) - u\,(y))\,(\varphi\,(x) - \varphi\,(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

On vérifie qu'elle est continue: soient u et $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$|Lu(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right|$$

On obtient

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}|u(x)-u(y)||\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{n+sp}} dxdy$$

Et par suit

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\frac{ns+p}{p'}}|x-y|^{\frac{ns+p}{p}}} dxdy$$

Et d'aprés théorème de Holder on trouve

$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{ns+p}} dxdy\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{|x-y|^{ns+p}} dxdy\right]^{\frac{1}{p}}$$

Donc

$$\leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \|\varphi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}$$

On conclut

$$\leq C \|\varphi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}.$$

Par conséquence G'est continue.

On étude la linéairité de G' : soients φ et $\omega \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:

$$\left\langle G'(u), \lambda\varphi + \omega \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))((\lambda\varphi(x)+\omega(x))-(\lambda\varphi(y)+\omega(y)))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy$$

On obtient

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\lambda((\varphi(x)-\varphi(y))+(\omega(x)-\omega(y)))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy$$

D'ou

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))\lambda((\varphi(x)-(\varphi(y)))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\omega(x)-\omega(y)))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

En effet

$$= \lambda\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))((\varphi(x)-(\varphi(y)))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\omega(x)-\omega(y)))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

En conclut

$$\lambda\left\langle G^{'}(u),\varphi\right\rangle + \left\langle G^{'}(u),\omega\right\rangle.$$

Par conséquence G'est linéaire. Alors G est différentiable. ∎

Théorème 3.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$ pour $p \in (1,+\infty)$, on définit la fonction*

$$H : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

Par

$$H(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega}|u|^p dx$$

Alors H est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$ et

$$\left\langle H^{'}(u),\varphi\right\rangle = \int_{\Omega}|u|^{p-2}u\varphi dx, \quad \forall\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Preuve: On montre que H est Gateaux différentiable c'est-à-dire: soient u et $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{H(u+t\varphi)-H(u)}{t} = \left\langle H^{'}(u),\varphi\right\rangle.$$

On calculer

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to 0}\frac{H\left(u+t\varphi\right)-H\left(u\right)}{t} \\ = \quad & \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(x\right)+t\varphi(x)\right|^p dx-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x)\right|^p dx\right]. \end{aligned}$$

Pour calculer cette limite, on utilisé la théorème des accroissements finis sur la fonction $g$définie par:

$$g(s)=\left|u\left(x\right)+s\varphi(x)\right|^p$$

Il existe un nombre θ telle que $(0<\theta<|t|)$ qui vérifiant:

$$g(t)-g(0)=g'(\theta)(t-0)$$

D'ou

$$\begin{aligned} & \left|(u\left(x\right)+t(\varphi(x)\right|^p-\left|u\left(x\right)\right|^p \\ = \quad & \left[p\left|u\left(x\right)+\theta(\varphi(x)\right|^{p-2}\left(u(x)+\theta(\varphi(x))\left(\varphi\left(x\right)\right)\right](t-0) \end{aligned}$$

Par suit

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(x\right)+t\varphi(x)\right|^p dx-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x)\right|^p dx\right] \\ = \quad & \lim_{\theta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(x\right)+\theta(\varphi(x)\right|^{p-2}\left(u(x)+\theta(\varphi(x))\left(\varphi\left(x\right)\right)dx \end{aligned}$$

A la limite on obtient

$$=\int_{\Omega}\left|u(x)\right|^{p-2}u(x)\varphi(x)dx.$$

Par conséquent

$$\left\langle H'\left(u\right),\varphi\right\rangle=\int_{\Omega}\left|u\right|^{p-2}u\varphi dx.$$

Enfin H est Gateaux différentiable. En plus, on pose h est une forme linéaire et continue

$$h : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

Et

$$\varphi \to h(\varphi) = \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x)\varphi(x)dx.$$

On vérifie qu'elle est continue: soient u et $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$|h(\varphi)| = \left| \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x)\varphi(x)dx \right|.$$

On obtient

$$\leq \int_\Omega |u(x)|^{p-2} |u(x)| |\varphi(x)| dx,$$

Et par suit

$$\leq \int_\Omega |u(x)|^{p-1} |\varphi(x)| dx,$$

On utilisé le théorème de Holder on trouve

$$\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

Par conséquent

$$\leq \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \|\varphi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)},$$

Donc

$$\leq C \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^{\frac{p}{p'}} \|\varphi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}.$$

On conclut H' est continue. On étude la linéairité de H': soient φ et $\omega \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:

$$\left\langle H'(u), \lambda\varphi + \omega \right\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2} u(\lambda\varphi + \omega)dx,$$

Par suit

$$= \int_\Omega |u|^{p-2} u\lambda\varphi dx + \int_\Omega |u|^{p-2} u\omega dx,$$

On obtient

$$= \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u\varphi dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u\omega dx,$$

Par conséquent

$$\lambda \left\langle H^{'}(u), \varphi \right\rangle + \left\langle H^{'}(u), \omega \right\rangle.$$

On conclut H' est linéaire. Alors, H est différentiable. ■

Preuve: D'aprés le théorème $(3, 1)$ on remarque

$$\inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_{\Omega} |u|^p dx} = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

On va comence de la montrer que on a

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_{\Omega} |u|^p dx}.$$

En effet

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} \leq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \tag{3.5}$$

car

$$\left\{u \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\right\} \subset \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}.$$

D'autre part, soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on pose

$$\varphi = \frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

Et par suit

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^p(\Omega)} (\varphi(x) - \varphi(y))$$

Remplacer dans $(3,3)$ on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy}{\int_\Omega |u|^p\,dx}\\ =& \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}=\|\varphi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p\geq \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}}\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p$$

D'ou

$$\inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}\geq \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}}\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \tag{3.6}$$

D'aprés (3.5) et (3.6) on conclut

$$\lambda_1=\inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}=\inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}}\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p\,.$$

D'autre part, on va montrer l'existence de minimum dans ce théorème par la méthode direct de minimisation: soit $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$\lambda_1=\inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}$$

D'aprés l'inégalité de Poincaré

$$\exists C>0,\quad \|u\|_{L^p(\Omega)}^p\leq C\,\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante, telle que:

$$\forall n\in\mathbb{N},\exists u_n:\lambda_1\leq\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}<\lambda_1+\frac{1}{n}$$

Alors

$$\frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} \to \lambda_1$$

Avec

$$\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \to \lambda_1 \text{ et } \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \to 1$$

On conclut, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite borné dans$W_0^{s,p}(\Omega)$, donc il existe un sous suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que:

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{faiblement dans } W_0^{s,p}(\Omega)$$

On obtient

$$\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \lambda_1.$$

D'ou

$$\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \lambda_1$$

Par conséquent, le minimum est existe.

Théorème $(3,1)$:

D'aprés le théorème $(3,1)$ on remarque

$$\inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_\Omega |u|^p\, dx} = \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

On va comence de la montrer que on a

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_\Omega |u|^p\, dx}.$$

En effet

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} \leq \inf_{\substack{u\in W_0^{s,p}(\Omega)\\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)} \tag{3.5}$$

car

$$\left\{u \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\right\} \subset \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}.$$

D'autre part, soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on pose

$$\varphi = \frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

Et par suit

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^p(\Omega)} (\varphi(x) - \varphi(y))$$

Remplacer dans $(3,3)$on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p |\varphi(x)-\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \\ = & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} = \|\varphi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \geq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p$$

D'ou

$$\inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} \geq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \tag{3.6}$$

D'aprés (3.5) et (3.6) on conclut

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p.$$

D'autre part, on va montrer l'existence de minimum dans ce théorème par la méthode direct de minimisation: soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on a

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}.$$

D'aprés l'inégalité de Poincaré

$$\exists C > 0, \quad \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante, telle que:$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n$:

$$\lambda_1 \leq \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} < \lambda_1 + \frac{1}{n}$$

Alors

$$\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p} \to \lambda_1$$

Avec

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \to \lambda_1 \text{ et } \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \to 1$$

On conclut, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite borné dans$W_0^{s,p}(\Omega)$, donc il existe un sous suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que:

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{faiblement dans } W_0^{s,p}(\Omega)$$

On obtient

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p = \lambda_1$$

D'ou

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^p = \lambda_1$$

Par conséquent, le minimum est existe. D'autre part on va montrer que u est un solution:

on a les fonction G et H sont différentiables telle que:

$$G(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

Et

$$H(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \, dx.$$

Et on définie la fonction F

$$F : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

Par

$$F(u) = \frac{G(u)}{H(u)}.$$

Avec

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} F(u).$$

Alors F est différentiable et:

$$\left\langle F'(u), \varphi \right\rangle = \frac{1}{K(u)} \left(H(u) \left\langle G'(u), \varphi \right\rangle - G(u) \left\langle H'(u), \varphi \right\rangle \right).$$

Comme u est un point minimum de F si seulement si $F'(u) = 0$, implique que

$$H(u) \left\langle G'(u), \varphi \right\rangle - G(u) \left\langle H'(u), \varphi \right\rangle = 0,$$

Et par suit

$$\left\langle G'(u), \varphi \right\rangle = \frac{G(u)}{H(u)} \left\langle H'(u), \varphi \right\rangle = \lambda_1 \left\langle H'(u), \varphi \right\rangle.$$

Finalement u est un solution faible de (3.2). ■

3.3 Régularité de la fonction propre:

Lemme 3.1 *Soient (v_n)une suite réel telle que $v_n > 0$, $v_{n+1} \leq C^n v_n^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et C^n est un constant, alors:*

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \quad \textit{si } v_0 \textit{ est assez petit.}$$

Preuve: On a

$$v_n \leq C^{n-1} v_{n-1}^{1+\alpha}.$$

Par suit

$$v_{n-1}^{1+\alpha} \leq C^{(n-2)(1+\alpha)} v_{n-2}^{(1+\alpha)^2},$$

D'ou

$$v_{n-2}^{(1+\alpha)^2} \leq C^{(n-3)(1+\alpha)^2} v_{n-3}^{(1+\alpha)^3},$$

On obtient

$$v_1^{(1+\alpha)^{n-1}} \leq C^{0 \times (1+\alpha)^{n-1}} v_0^{(1+\alpha)^n}.$$

Par multiplication, on a

$$v_n \leq C^{S_n} v_0^{(1+\alpha)^n}.$$

Avec

$$S_n = (n-1) + (n-2)(1+\alpha) + (n-3)(1+\alpha)^2 + ... + (1+\alpha)^{n-2},$$

Donc

$$S_n = \frac{(1+\alpha)^n}{\alpha^2}.$$

On effet

$$v_n \leq C^{\frac{(1+\alpha)^n}{\alpha^2}} v_0^{(1+\alpha)^n} = \left(C^{\frac{1}{\alpha^2}} v_0 \right)^{(1+\alpha)^n}.$$

Alors

$$v_n \text{ converge vers } 0 \text{ si } \; C^{\frac{1}{\alpha^2}} v_0 < 1.$$

Par conclut

$$v_0 < C^{\frac{-1}{\alpha^2}}.$$

■

Lemme 3.2 *Si* $\|u^+\|_{L^P} \leq \delta$ *alors* $\|u^+\|_{L^\infty} \leq 1$, *pour certain* $\delta > 0$.

Preuve: Soient $k > 0$ et $w_k \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on définie la fonction w_k comme suit:

$$w_k(x) = (u(x) - (1 - 2^{-k})).$$

Avec

$$w_k = 0 \text{ p.p dans } \Omega.$$

On effet l'inégalité suivant

$$w_{k+1}(x) \leq w_k \ (x) \, \text{dans } \Omega. \tag{3.7}$$

Et

$$u(x) < (2^{k+1} - 1)w_k(x) \quad \text{pour } x \in \{w_{k+1} > 0\}. \tag{3.8}$$

On vérifie cette inégalité on a

$$(2^{k+1} - 1)w_k(x) = (2^{k+1} - 1)(u(x) - (1 - 2^{-k}))$$

D'ou

$$\geq (2^{k+1} - 1)(u(x) - (\frac{1 - 2^{-k}}{1 - 2^{-(k+1)}}.u(x)))$$

Par suit

$$= u(x)(2^{k+1} - 1)(1 - (\frac{1 - 2^{-k}}{1 - 2^{-(k+1)}})),$$

On obtient

$$= u(x).$$

D'autre part on va montrer l'inclusion suivant:

$$\{w_{k+1} > 0\} \subseteq \left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\} \tag{3.9}$$

On vérifie cette inclusion: soit $x \in \{w_{k+1} > 0\}$ alors

$$u(x) > 1 - 2^{-k}.$$

D'aprés (3.8) on a

$$u(x) < (2^{k+1} - 1)w_k(x).$$

Donc

$$1 - 2^{-k} < (2^{k+1} - 1)w_k(x),$$

Implique

$$w_k(x) > \frac{1 - 2^{-k}}{(2^{k+1} - 1)}.$$

On obtient

$$= \frac{2^{-(k+1)}(2^{k+1} - 1)}{(2^{k+1} - 1)} = 2^{-(k+1)}.$$

Donc

$$w_k > 2^{-(k+1)}.$$

Par conséquent

$$x \in \left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}.$$

Si $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, alors

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2} \left(v^+(x) - v^+(y)\right) ((v(x) - (v(y))) \geq \left|v^+(x) - v^+(y)\right|^P.$$

On vérifier cette inégalité:

Si $x \in \{v > 0\}$ et $y \in \{v < 0\}$ alors

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2}\left(v^{+}(x) - v^{+}(y)\right)((v(x) - (v(y))) > \left|v^{+}(x) - v^{+}(y)\right|^{P}.$$

Si $x \in \{v < 0\}$ et $y \in \{v < 0\}$ alors

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2}\left(v^{+}(x) - v^{+}(y)\right)((v(x) - (v(y))) = \left|v^{+}(x) - v^{+}(y)\right|^{P}.$$

Si $x \in \{v > 0\}$ et $y \in \{v > 0\}$ alors

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2}\left(v^{+}(x) - v^{+}(y)\right)((v(x) - (v(y))) = \left|v^{+}(x) - v^{+}(y)\right|^{P}.$$

On conclut

$$I = |v(x) - v(y)|^{p-2}\left(v^{+}(x) - v^{+}(y)\right)((v(x) - (v(y))) \geq \left|v^{+}(x) - v^{+}(y)\right|^{P}.$$

On pose $v^{+} = w_{k+1}$ et $v = u - \left(1 - 2^{-(k+1)}\right)$ on obtient

$$\|w_{k+1}\|^{p}_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_{k+1}(x) - w_{k+1}(y)|^{p}}{|x-y|^{ns+p}} dxdy,$$

D'ou

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(w_{k+1}(x) - w_{k+1}(y))}{|x-y|^{n+sp}} dxdy,$$

Par suit

$$= \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^{p-2}(u(x))(w_{k+1}(x))\, dx = \lambda \int_{\{w_{k+1}>0\}} |u(x)|^{p-2} u(x)\, w_{k+1}(x)\, dx.$$

D'aprés(3.8) on obtient

$$\leq \lambda(2^{k+1} - 1)^{p-1} \int_{\{w_{k+1}>0\}} (w_k(x))^{p-1} w_{k+1}(x)\, dx,$$

D'aprés(3.7) on trouve

$$\leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1}\int_{\{w_{k+1}>0\}}(w_k(x))^p\,dx,$$

On conclut

$$\leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1}U_k.$$

Donc

$$U_k=\|w_k\|^p_{L^p(\Omega)}=\int_{\{w_k>0\}}(w_k(x))^p\,dx.$$

Et

$$\|w_{k+1}\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}\leq \lambda(2^{k+1}-1)^{p-1}U_k. \tag{3.10}$$

D'autre part, on a

$$U_{k+1}=\|w_{k+1}\|^p_{L^p(\Omega)},$$

$$=\int_{\{w_{k+1}>0\}}w_{k+1}(x)^p dx,$$

D'aprés l'inégalité de Holder

$$\leq\left(\int_{\{w_{k+1}>0\}}w_{k+1}(x)^{\alpha p}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_{\{w_{k+1}>0\}}1^{\beta}dx\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

On pose

$$\alpha p=p^*\Rightarrow\alpha=\frac{p^*}{p}\text{ et }\beta=\frac{n}{sp}.$$

On obtient

$$U_{k+1}\leq\left(\int_{\{w_{k+1}>0\}}w_{k+1}(x)^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\left|\{w_{k+1}>0\}\right|^{\frac{sp}{n}},$$

Et d'aprés la théorème d'injection de Sobolev $W_0^{s,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, on a

$$U_{k+1}\leq C\left\|w_{k+1}\right\|^p_{W_0^{s,p}(\Omega)}\left|\{w_{k+1}>0\}\right|^{\frac{sp}{n}}. \tag{3.11}$$

Et de plus

$$\left|\{w_{k+1} > 0\}\right| \leq \left|\left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}\right| \leq 2^{p(k+1)} U_k, \tag{3.12}$$

On montrer cette inégaté.

D'aprés(3.9) , on a

$$\left|\{w_{k+1} > 0\}\right| \leq \left|\left\{w_k > 2^{-(k+1)}\right\}\right|.$$

D'autre part on a

$$U_k = \int_{\{w_{k+1}>0\}} w_k(x)^p dx.$$

Et

$$= \int_{\left\{w_{k+1}>2^{-(k+1)}\right\}} w_k(x)^p dx + \int_{\left\{w_{k+1}<2^{-(k+1)}\right\}} w_k(x)^p dx,$$

Par suit

$$\geq \int_{\left\{w_{k+1}>2^{-(k+1)}\right\}} w_k(x)^p dx,$$

D'ou

$$\geq \int_{\left\{w_{k+1}>2^{-(k+1)}\right\}} 2^{-(k+1)p} dx,$$

On obtient

$$= 2^{-(k+1)p} \left|\left\{w_{k+1} > 2^{-(k+1)}\right\}\right|.$$

On conclut

$$\left|\left\{w_{k+1} > 2^{-(k+1)}\right\}\right| \leq 2^{(k+1)p} U_k.$$

On remplace dans (3.10) et (3.12) dans (3.11) on trouve

$$U_{k+1} \leq \lambda C \left(2^{(k+1)p} U_k\right),$$

D'ou

$$U_{k+1} \leq C^k U_k^{1+\frac{sp}{n}}.$$

Avec
$$C^k = \left(\lambda^{\frac{1}{k}} C^{\frac{1}{k}} 2^{\frac{(k+1)p+\frac{sp}{n}}{k}}\right)^k.$$
Donc
$$\lim_{k\to\infty} U_k = 0.$$
D'aprés le lemme(3.1), on a
$$\left\|u^+\right\|_{L^P}^p = U_0 \leq C^{\frac{-1}{\alpha^2}} = \delta^p.$$
Avec $\alpha = \frac{sp}{n}$.

On a
$$\lim_{k\to\infty} U_k = \lim_{k\to\infty} \|w_k\|_{L^P}^p = 0.$$
Par conséquent
$$\lim_{k\to\infty} w_k = 0. \tag{3.13}$$
D'autre part on a

si $k \to \infty$ alors $w_k \to (u-1)^+$ p.p et $w_k \leq u^+ \in L^P$, d'aprés théorème de convergence dominée on a
$$\lim_{k\to\infty} w_k = (u-1)^+ \text{ dans } L^P. \tag{3.14}$$
D'aprés (3.13) et (3.14) on trouve
$$(u-1)^+ = 0 \ \Rightarrow u \leq 1,$$
D'ou
$$u^+ \leq 1.$$
Donc
$$\left\|u^+\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1.$$

Par conséquent

$$Si \left\|u^+\right\|_{L^P} \leq \delta alors \left\|u^+\right\|_{L^\infty} \leq 1.$$

■

Lemme 3.3 *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $p > 1$, *et* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *est une solution de* (3.1), *alors* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve: On distingue deux cas suivant:

Si $sp > n$:

alors d'aprés l'injection de Sobolev on a $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (évident).

Si $sp \leq n$:

On montrer que la partie positive de $u^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\|u^+\right\|_{L^P(\Omega)} \leq \delta \text{ car } \|u\|_{L^P(\Omega)} = \delta.$$

Par suit

$$\left\|\frac{1}{2}u^+\right\|_{L^P(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2} < \delta$$

D'aprés le lemme précédent

$$\left\|\frac{1}{2}u^+\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$$

On obtient

$$\left\|u^+\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2 < \infty \, .$$

On conclut $u^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On applique la propriété $(-u)^+ = u^-$ pour déduire $u^- \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On trouve

$$u^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On pose

$$u^+ = (-u)^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Et puis que

$$(-u)^{+} = u^{-}$$

Donc par conséquent

$$u^{-} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$$

Puis que u s'écrit comme suit

$$u = u^{+} - u^{-}.$$

Alors on conclut que $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$. ■

3.4 Propriété de la première fonction propre:

3.4.1 Positivité

Dans cette section on va montrer que la fonction propre qui associée à la première valeur propre est de signe constante.

Lemme 3.4 *Soient $s \in (0,1)$ et $p > 1$, et $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que $u, v \neq 0$, on considère la fonction σ_t définie par:*

$$\sigma_t(x) = ((1-t)v^p(x) + tu^p(x))^{\frac{1}{p}}, \ \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy &\leq (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ +t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy, \quad \forall 0 &\leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Preuve: Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on a la norme $\|.\|_{L^p}$dans $\mathbb{R}^2$ comme suit:

$$\sigma_t = \left\| t^{\frac{1}{p}} u(x), (1-t)^{\frac{1}{p}} v(x) \right\|_{L^P},$$

Et d'aprés l'inégalité de trianglaire on a

$$\|\epsilon\|_{L^P} - \|\eta\|_{L^P} \leq \|\epsilon - \eta\|_{L^P}.$$

On pose

$$\epsilon = t^{\frac{1}{p}} u(x) + (1-t)^{\frac{1}{p}} v(x),$$

Et

$$\eta = t^{\frac{1}{p}} u(y) + (1-t)^{\frac{1}{p}} v(y).$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \left| (tu^p(x) + (1-t)v^p(x))^{\frac{1}{p}} - (tu^p(y) + (1-t)v^p(y))^{\frac{1}{p}} \right| \\ \leq \quad & (t(u(x)-u(y))^p + (1-t)(v(x)-v(y))^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Donc

$$|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p \leq (t(u(x)-u(y))^p + (1-t)(v(x)-v(y))^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Par suit, on multiplie cette inégalité par $\frac{1}{|x-y|^{n+sp}}$, et intégré sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \quad \leq \quad & (1-t) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ & + t \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.4 *Soient* $s \in (0,1)$ *et* $p > 1$, *et* $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *est une solution de* (3.2), *alors* $v > 0$ *dans* Ω. *Alors*

$$\lambda = \lambda_1.$$

Preuve: On suppose que $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution strictement positive de (3.2). Soit $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ une solution de problème minimum

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

On pose

$$u_\epsilon = u + \epsilon \quad \text{et} \quad v_\epsilon = v + \epsilon.$$

Soit $x \in \Omega$ on a

$$\sigma_t^\epsilon(x) = ((1-t)v_\epsilon^p(x) + t u_\epsilon^p(x))^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Par suit on a d'aprés lemme(3.3)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ \leq \;& (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ & -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy, \quad \forall 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

On obtient

$$\leq t\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy\right), \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \leq t(\lambda_1 - \lambda). \tag{3.15}$$

D'autre part on a, soit $\epsilon > 0$ d'aprés la convexité de la fonction $|x|^p$ on a l'inégalité suivant

$$|x|^p - |y|^p \leq p|y|^{p-2} y(x-y).$$

En effet

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\geq$$

$$p\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\left(\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)-(v(x)-v(y))\right). \quad (3.16)$$

Pour $u,v\in W_0^{s,p}(\Omega)$ la fonction $\sigma_t^\epsilon\in W_0^{s,p}(\Omega)$, on pose $\varphi=\sigma_t^\epsilon-v_\epsilon$ une fonction test, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\left(\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)-(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y))\right)\\ =\ &\lambda\int_\Omega v(z)^{p-1}\left(\sigma_t^\epsilon(z)-v_\epsilon(z)\right)dz.\end{aligned}$$

Puis que $(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y))=(v(x)-v(y))$, donc

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}dxdy\left(\sigma_t^\epsilon(x)-\sigma_t^\epsilon(y)-(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y))\right) \quad (3.17)\\ =\ &\lambda\int_\Omega v(z)^{p-1}\left(\sigma_t^\epsilon(z)-v(z)\right)dz.\end{aligned}$$

Alors, d'aprés (3.15) et(3.16) et(3.17), on trouve

$$p\lambda\int_\Omega v(z)^{p-1}\left(\sigma_t^\epsilon(z)-v(z)\right)dz\leq t(\lambda_1-\lambda),$$

D'ou

$$p\lambda\int_\Omega v(z)^{p-1}\frac{\left(\sigma_t^\epsilon(z)-v(z)\right)}{t}dz\leq(\lambda_1-\lambda).$$

On pose

$$f_t(z)=p\lambda v(z)^{p-1}\frac{\left(\sigma_t^\epsilon(z)-v(z)\right)}{t}.$$

Donc

$$\lim_{t\to0}p\lambda v(z)^{p-1}\frac{((1-t)v_\epsilon^p(z)+tu_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}}-v(z)}{t},$$

Par suit

$$= \lim_{t\to 0} p\lambda v(z)^{p-1} \frac{(v_\epsilon^p(z) + t(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}} - v\left(z\right)}{t},$$

En effet

$$= \lim_{t\to 0} p\lambda v(z)^{p-1} \frac{(v_\epsilon^p(z) + t(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}} - v\left(z\right)}{t(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z))}(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)).$$

On obtient

$$= \lambda v(z)^{p-1} \left(v_\epsilon(x)^p\right)^{\frac{1}{p}-1} \left(u_\epsilon^p(x) - v_\epsilon^p(x)\right).$$

D'ou

$$= \lambda v(z)^{p-1} \left(v_\epsilon(z)^{1-p}\right) \left(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)\right).$$

On conclut

$$= \lambda \left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)}\right)^{p-1} \left(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)\right).$$

D'autr part on a

$$\left|f_t\left(z\right)\right| \leq p\lambda \left|v(z)^{p-1}\right| \left|\frac{((1-t)v_\epsilon^p(z) + tu_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}} - v\left(z\right)}{t}\right|.$$

D'ou

$$= p\lambda \left|v(z)^{p-1}\right| \left|\frac{(v_\epsilon^p(z) + t(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}} - \left(v\left(z\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}}{t}\right|.$$

On pose

$$\varphi\left(t\right) = (v_\epsilon^p(z) + t(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}}.$$

Donc

$$\varphi'\left(t\right) = \frac{1}{p}(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z))(v_\epsilon^p(z) + t(u_\epsilon^p(z) - v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}-1}.$$

On applique la théorème de accroissement finis, il existe un nombre θ telle que $(0 < \theta < |t|)$ qui vérifiant:

$$\frac{\varphi\left(t\right) - \varphi\left(0\right)}{t-0} = \varphi'\left(t\right).$$

En effet

$$\frac{(v_\epsilon^p(z)+t(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}}-(v\,(z)^p)^{\frac{1}{p}}}{t}=\frac{1}{p}(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z))(v_\epsilon^p(z)+\theta(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}-1}.$$

Par suit

$$|f_t\,(z)|\leq p\lambda\left|v(z)^{p-1}\right|\left|\frac{((1-t)v_\epsilon^p(z)+tu_\epsilon^p(z))^{\frac{1}{p}}-v\,(z)}{t}\right|$$

On obtient

$$\leq \lambda\left|v(z)^{p-1}\right|\left|(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z))(v_\epsilon^p(z)+\theta(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z)))^{\frac{1}{p}-1}\right|.$$

Et

$$\leq C\lambda\left|v(z)^{p-1}\right|\left|u_\epsilon^p(z)+v_\epsilon^p(z)\right|\left|u_\epsilon^{1-p}(z)+v_\epsilon^{1-p}(z)\right|.$$

Par conséquent

$$\leq C\lambda\left|\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)}\right|^{p-1}\left|u_\epsilon^p(z)+v_\epsilon^p(z)\right|+\left|\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)}\right|^{p-1}\left|u_\epsilon^p(z)+v_\epsilon^p(z)\right|\in L^1\left(\Omega\right).$$

D'aprés la théorème de la convergece dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t\to0}\int_\Omega p\lambda v(z)^{p-1}\frac{(\sigma_t^\epsilon\,(z)-v\,(z))}{t}dz=\int_\Omega\lambda\left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)}\right)^{p-1}(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z)).$$

On conclut

$$\int_\Omega\lambda\left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)}\right)^{p-1}(u_\epsilon^p(z)-v_\epsilon^p(z))dz\leq(\lambda_1-\lambda).$$

Pour ϵ assez petit, alors

$$\lim_{\epsilon\to0}\lambda\left(\frac{v(z)}{v(z)+\epsilon}\right)^{p-1}((u^p(z)+\epsilon)-(v^p(z)+\epsilon))=\lambda(u^p(z)-v^p(z)).$$

Et d'autre part on a

$$\left|\left(\frac{v(z)}{v(z)+\epsilon}\right)^{p-1}\left((u^p(z)+\epsilon)-(v^p(z)+\epsilon)\right)\right| \leq \left|\frac{v(z)}{v(z)+\epsilon}\right|^{p-1}\left|(u^p(z)+\epsilon)-(v^p(z)+\epsilon)\right|.$$

On obtient

$$\leq 1 \times \left|C\left(u^p(z)+\epsilon\right)+C\left(v^p(z)+\epsilon\right)\right|.$$

Par conséquent

$$\leq C\left|(u^p(z)+v^p(z)+2\right| \in L^1(\Omega).$$

D'aprés la théorème de la convergece dominée de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega\left(\frac{v(z)}{v_\epsilon(z)}\right)^{p-1}\left((u^p(z)+\epsilon)-(v^p(z)+\epsilon)\right) &= \int_\Omega(u^p(z)-v^p(z)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

On obtient

$$0 \leq (\lambda_1-\lambda).$$

D'ou

$$\lambda \leq \lambda_1.$$

D'autre part, car λ_1 est plus petit valeur propre, on a

$$\lambda_1 \leq \lambda.$$

On conclut

$$\lambda = \lambda_1.$$

■

3.4.2 Simplicité

Théorème 3.5 *Soient $s \in (0,1)$ et $p > 1$, alors la première valeur propre $\lambda_1$est simple, c'est-à-dire $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ deux fonction propres associées à λ_1 alors $u = \alpha v$ pour certin constante α.*

Preuve: Soient $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ deux fonction propres associées à λ_1, avec $u, v > 0$. D'aprés le lemme (3.3) on a la fonction σ_t définie par:

$$\sigma_t(x) = ((1-t)v^p(x) + tu^p(x))^{\frac{1}{p}}, \ \forall 0 \leq t \leq 1.$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy &\leq (1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \\ +t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy, \ \forall 0 &\leq t \leq 1. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$(1-t)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy + t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_1 = \lambda_1.$$

Et d'aprés la définition de λ_1, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy = \lambda_1.$$

On obtient

$$u(x)v(y) = v(x)u(y).$$

par conséquent

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(y)}{v(y)} = \alpha.$$

Avec α un constante.

Enfin

$$u = \alpha v.$$

■

Chapitre 4

Les Outils de calculs

Théorème 4.1 *(Inégalité de Holder)*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Alors

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Théorème 4.2 *(Inégalité de Poincaré)*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $s \in (0,1)$ et $p \in [1, +\infty[$ alors: il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Théorème 4.3 *(Inégalité de Young)*

Soient a et b deux réels positifs, et p et q des réels strictement positifs vérifiant:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors on a:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Théorème 4.4 *(Fubini)*

Soient Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^N$

On suppose que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$,pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$f(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} f(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De meme, pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$f(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} f(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)dxdy.$$

Théorème 4.5 *(Théorème de Minkowski)*

Soient (Ω, A, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

C'est-à-dire

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 4.6 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$.

On suppose que:

1- $f_n(X) \to f(x)$ p.p sur Ω.

2- Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $f_n(X) \leq g(x)$ p.p sur Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Théorème 4.7 *(lemme de Fatou)*

Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que:

1-Pour chaque $f_n(x) \geq 0$ p.p surΩ.

2-sup $\int_\Omega f_n(x) < +\infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et:

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx.$$

4.1 Conclusion générale

L'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques de type fractionnaire est l'un des sujets très riche et important qui s'est développé dans ces dernières années car il représente un phénomène en physique, en biologie, et en mécanique etc.

Dans ce mémoire, j'ai étudié le problème aux valeurs propres pour l'opérateur p-Laplacien de type fractionnaire et j'ai obtenu des résultats:

-Existence de la première valeur propre

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^p(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

-Régularité de la fonction propre.

- Les propriétés de la première fonction propre sont la positivité et la simplicité.

Avec de ces solutions, il y a des solutions faibles pour l'utilité de la théorie variationelle.

En plus malgré la courte période et le manque de sources liées à ce sujet. Ce travail est considéré comme une première étape pour moi, et j'espère continuer à l'étudier dans l'avenir en tant que future doctorante.

Et mes conseils pour chaque étudiant qui à voulu compléter l'étude de ce travail, doit avoir des concepts sur les équations aux dérivées partielles elliptiques classiques et son étude d'un groupe de livre comme livre de la théorie des points critiques de Kavian, afin de bénéficier, et développer le sujet sur le cas où d'un autre cas comme les équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires de type fractionnaire, et chercher des résolutions pour ce problème.

En fin de compte, j'espère que mon travail sera acceptable, et tous mes remerciements à mon professeur TAHRI Kamel pour ses efforts qu'il a fait pour nous et pour son aide dans ce travail.

Bibliographie

[1] E. Lindgren, P. Lindqvist: Fractional eigenvalues. Calc. Var. partial Differential Equation 49(2014), no.1-2, 795-826. MR3148135.

[2] G. M. Bisci, V. D. Radulescu, R. Servadei: Variational methods for nonlocal fractional problems, Encyclopedia of mathematics and its application, 162. Cambridge university Press, Cambridge, 2016.

[3] G. Palatucci E. Di. Nezza and E. Valdinoci: Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev space. Bull. Sci. Math, 136: 521-573, 2012.

[4] G. Franzina, G. Palatucci: Fractional p-eigenvalues, pp.1-13.

[5] H. Brezis: Analyse fonctionnelle théorie des application, New York,1987.

[6] K. Belhout: Problème de valeurs propres pour le laplacien fractionnaire, université Mohamed Boudiaf de M'sila, mémoire mastre, soutenu le: 30-06-2019.

[7] P. Piersanti and P. Pucci: Existence theorems for fractionnal p-laplacian problem. Anal. Appl. (Singap), in press. Preprint, 2015.

[8] R.Servadei, E.Valdinoci: Variational methods for non-local operators of elliptic type, Italy, 2013.

[9] S. Saldi P. Pucci: Multiple solutions for an eigenvalue problem involving non-local elliptic p laplacian operators. In Geometric Methods in PDEs (springer INdAM

series). Vol. 13, ed. by G. Citti, M. Manfredini, D. Morbidelli, S. Polidaro, and F. Uguzzoni. Springer Verlag, Berlin, page 159-76, 2015.

[10] W. D, J. Xu: Weak solution for fractional p-laplacien equation with signchanging potential, 2015, DOI: 10.1080/17476933.2015.1076808.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons définie l'espace de Sobolev de type fractionnaire, l'opérateur Laplacien fractionnaire et P-Laplacien fractionnaire et leurs propriétés, et nous avons étudié le problème de valeur propre pour l'opérateur P-Laplacien fractionnaire qui définie comme suit :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Avec Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, s∈(0,1) et p∈ [1, +∞ [, et montrons l'existence de la première valeur propre, régularité de la fonction propre et les propriétés de la première fonction propre sont la positivité et la simplicité.

Mots-Clés :

Espace de Sobolev de type fractionnaire, L'opérateur Laplacien fractionnaire, L'opérateur P-Laplacien fractionnaire, Equation aux dérivées partielles elliptiques linéaires.

Abstract :

In this memoir, we defined the fractional space of

Sobolev, the fractional Laplacian operator and the fractional P-Laplacian operator and their properties , and we studied the eigenvalue problem for the fractional P-Laplacian operator which defines as follows:

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2}u & dans\ \ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega.\end{cases}$$

With Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^N$, s∈ (0, 1) and p∈ [1, +∞ [, and let us show the existence of the first eigenvalue, regularity of the eigenfunction and the properties of the first eigenfunction are positivity and simplicity.

Keywords:
Fractional Sobolev space, Fractional Laplacian operator, Fractional P-Laplacian operator, Linear elliptical partial differential equation.

ملخص:
في هذه المذكرة ، قمنا بتعريف فضاء سوبوليف الكسري ، والمؤثر لابلاس الكسري ، والمؤثر ب-لابلاس الكسري وخصائصهما ، ودرسنا مشكلة القيمة الذاتية المؤثر ب-لابلاس الكسري والذي تم تعريفه على النحو التالي:

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2}u & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega.\end{cases}$$

حيث Ω هي مجموعة مفتوحة محدودة من $\mathbb{R}^N$، و$s\in(0, 1)$ $p\in [1, +\infty[$, ونظهر وجود أول قيمة ذاتية، وانتظام الوظيفة الذاتية وخصائص الوظيفة الذاتية الأولى هي الإيجابية والبساطة.

الكلمات المفتاحية :
فضاء سوبوليف الكسري ، والمؤثر لابلاس الكسري ، والمؤثر ب-لابلاس الكسري ، معادلة مشتقة جزئية خطية.