



Centre Universitaire Salhi Ahmed -Naama
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



**Mémoire de fin d'étude
pour l'obtention du diplôme de master en
Mathématiques**

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Présenté par : Atbi Nawel

Thème

**Les équations différentielles stochastiques et ses
applications**

Soutenu publiquement le 03 juillet 2022 devant les jury composé de :

Dr. Fethi Latti	MCB	C-Univ Naâma	Président
Dr. Tahri Kamel	MCA	ESM Tlemcen	Encadreur
Dr. Daoudi Khalifa	MCB	C-Univ El bayed	Examineur

Année universitaire : 2021-2022



Dédicace

Je dédie ce modeste travail

*A celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation et de ses
dévouements A ma chère mère*

A celui qui s'est changé la nuit en jour pour m assurer les bonnes conditions

A mon cher père

A ma petite famille qui m'a toujours soutenue

A tous mes collègues et amis

A mon ami Salafi

NAWEL.....





Remerciement



J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur le Professeur M.Kamel Kahri qui ma fourmi le sujet de ce mémoire et de ma voir guidé. Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été très précieux De même je remercie mon cher Mino et prof Mossaoui Fatma qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail. Enfin, je tiens à remercier ma famille et mon amie Salah camarade de promotion.



Sommaire

Dédicace	2
Remerciement	3
Inroduction Générale	6
1 Les Notions générales et définitions	8
1 Espace de Probabilité	8
1.1 Variable aléatoire	10
1.2 L'espace L^p	11
1.3 Indépendance	11
1.4 Convergence de suites des variables aléatoires	13
1.5 Espérance conditionnelle	14
2 Calcul stochastique	15
1 Processus stochastique	15
1.1 Martingale	17
2 Mouvement brownien	17
2.1 Pont Brownien	18
2.2 Application sur les mouvement Brownien	18
2.3 Mouvement Brownien multidimensionnel	19
2.4 Caractérisation d'un mouvement brownien	19
3 Généralités sur les équations différentielles	20
1 Equation différentielle ordinaire :	20
2 Théorème de Cauchy-Lipschitz :	20
2.1 Solution du problème de Cauchy :	21
3 Existence et unicité locale :	21
3.1 Couachy-Lipschitz	22
3.2 Fonction Lipschitzienne :	22
3.3 Fonction contractante :	23
3.4 Lemme de Gronwall :	24
3.5 Les types des équations différentielles ordinaires et ces méthodes des résolutions	25
4 Equation différentielle stochastique	31
1 Introduction et motivation	31
2 Equation Différentielle Stochastique	31
2.1 Solutions fortes	32
2.2 Exemple d'application :	32
2.3 Existence et unicité de solutions	34
5 Application sur le modèle de Black-Scholes	47
0.1 Hypothèses sur le marché	47
0.2 Modélisation probabiliste du marché	47
1 Simulation du modèle de Black-Scholes	51

1.1	Simulation de la solution de l'équation de Black-Sholes	51
2	Simulation des options européennes	52
2.1	Tarification des options européennes avec la simulation de Monte Carlo simple	53
3	Décision	57
	Conclusion	58
	Bibliographie	59

Introduction générale

Dans ce mémoire, on est intéressé à étudier les équations différentielles stochastiques (EDS en abrégé). Elles ont été introduites pour la première fois en 1946 par Kiyoshi Itô pour étudier les trajectoires des processus de diffusion.

L'histoire du mouvement brownien commence en 1828 avec les observations du naturaliste botanique Robert Brown. Brown décrit le mouvement très désordonné, caractérisé par d'incessants changements de directions, de fines particules de pollen en suspension dans l'eau.

C'est en 1905 qu'Albert Einstein franchit une étape importante. Einstein détermine de manière rigoureuse, sous des hypothèses mathématiques précises, la densité de la loi de la position à un instant donné d'une particule se déplaçant selon un mouvement brownien. Sa méthode repose sur des considérations de mécanique statistique qui le conduisent à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne, solution de cette équation.

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre.

Ce document est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre, est introductif contient des préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit, des rappels concernant notions de base sur calcul probabilité, une base théorique du calcul probabilité nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent et la variable aléatoire est aussi présenté dans cette partie comme outil essentiel permettant de prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude de quelques notions de calcul stochastique, Martingale, la définition d'un mouvement brownien où nous énumérerons ses différents propriétés, le pont Brownien, uniformément Höldernienne continue, Théorème de continuité de Kolmogorov qui nous seront utiles tout au long de ce travail.

Le troisième chapitre, nous présentons les équations différentielles ordinaires, l'existence et l'unicité de solution, le théorème de Cauchy-Lipschitz et solution du problème de Cauchy, lemme de Gronwall et les différents types des équations différentielles ordinaires et ces méthodes des résolutions.

Le quatrième chapitre, est réservé aux notions fondamentales sur les équations différentielles stochastiques et les différents théorèmes liés aux questions d'existence et d'unicité des solutions des EDS.

Enfin, Le cinquième chapitre, nous présenterons l'application mathématiques financières, la modélisations probabiliste du marché, les méthodes et graphes de simulation de modèle de Black-Scholes.

Ensuite nous avons pris la simulation de la valeur de prime avec les deux modèles étudiés pour les options de type européen avec méthode exacte et l'autre approché et la comparaison entre eux dans la décision.

Les Notions générales et définitions

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul probabilité, on va introduire les définitions et les notions de base qui nous avons besoin dans ce qui suit.

1 Espace de Probabilité

Définition 1.1 [9] Une expérience aléatoire est une expérience pouvant conduire à plusieurs résultats possibles. Formellement, une expérience aléatoire se décrit par la donnée de l'ensemble Ω des résultats possibles. L'ensemble Ω est appelé l'univers ou l'espace des états.

Définition 1.2 [9] Un événement aléatoire est un événement dont la réalisation dépend du résultat de l'expérience. Formellement, un événement aléatoire se décrit comme un sous-ensemble de Ω .

Définition 1.3 Pour un résultat donné $\omega \in \Omega$, si $\omega \in A$, on dit que l'événement A a été réalisé. espace [9] L'état Ω est aussi appelé un événement déterministe : il est réalisé quel que soit le résultat. L'ensemble vide aussi appelé événement impossible : il ne se matérialisera jamais.

Définition 1.4 Soit Ω , un ensemble. On appelle tribu (ou σ -algèbre) sur Ω , un ensemble \mathcal{F} de parties de Ω , qui vérifie :

1 $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2 $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

3 $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Autrement dit, une tribu est stable par passage au complémentaire et stable par union dénombrable.

Lemme

[9] L'intersection de deux est une tribu.

Remarque

On appelle " espace mesurable Le couple (Ω, \mathcal{F}) où les éléments de \mathcal{F} sont appelés des événements ou des ensembles mesurables".

Théorème 1.1

[9] Soit \mathcal{C} une collection d'ensembles sur Ω . L'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant \mathcal{C} est une tribu sur Ω . On la note $\sigma(\mathcal{C})$ et on l'appelle la tribu engendrée par \mathcal{C} sur Ω .

Définition 1.5

La tribu borélienne sur Ω est la tribu engendrée par les ouverts \mathcal{C} , c'est-à-dire la plus petite tribu contenant tous les ouverts, et est notée $\Omega(\mathcal{C})$, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors $\Omega(\mathcal{C}) = B(\mathbb{R}^n)$, les éléments de ce tribu sont appelés les boréliennes.

Définition 1.6

Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Une mesure sur X est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1 $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1.$

2 Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathcal{F}$ et $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ sont disjoints ($i.e. \alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset, \forall i \neq j$) Alors,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \alpha_i.$$

Remarque

- Espace de probabilité se compose de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- $\mathbb{P}(\alpha)$ probabilité d'occurrence de α .
- Si $\mathbb{P}(\alpha) = 1$, alors on dit que α se matérialise avec probabilité 1, ou α se matérialise presque certainement (ps).

Définition 1.7

pour un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) , une partie de X est dit négligiable si elle est contenue dans une partie mesurable de mesure nulle.

Définition 1.8

On dit que l'espace (X, \mathcal{A}, μ) est un espace complet en tant qu'espace mesuré, si toute partie négligiable est mesurable

Définition 1.9

B le tribu borélien une application sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tel que $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, B)$, on dit qu'il est \mathcal{F} -mesurable si

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in B(\mathbb{R}^n).$$

1.1

Variable aléatoire

Définition 1.10 [9] On rappelle qu'une variable aléatoire X sur E est une application mesurable de Ω dans E .

Définition 1.11 Toute variable aléatoire X induit une mesure de probabilité μ_X dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est spécifié par

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

et μ_X s'appelle la distribution de X .

Définition 1.12 Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, si X est une variable aléatoire réelle et $\int_{\Omega} |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$. Puis le nombre :

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} x d\mu_X(x),$$

C'est ce qu'on appelle l'espérance de X .

Dans le cas général, soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de Borel alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} (g(X)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu_X(x).$$

Définition 1.13 Soient deux variables aléatoires X, Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de carrée intégrable, on a

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)).$$

S'appelles respectivement la variance de X et la covariance de X et Y .

Définition 1.14 La fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R} (ou plus exactement de sa loi) est la fonction F_X , de \mathbb{R} dans $[0, 1]$, qui à $x \in \mathbb{R}$ associe :

$$F_X = \mathbb{P}[X \leq x].$$

Définition 1.15 Une variable aléatoire X existe dans le cas d'une fonction d'intégration de Lebesgue positive f_X comme $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X dx$, pour tout $A \in \mathcal{B}$. f_X est la densité (de probabilité) de X .

Exemple 1 Loi gaussienne : X suit une loi gaussienne (ou normale) d'espérance m et de variance σ^2 , s'elle à densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Définition 1.16 Soit X une variable aléatoire à valeur dans $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ Le clan créé par X est le plus petit clan sur qui fait de X le la tribu engendrée par X est la plus petite tribu sur Ω qui rende X est \mathcal{F} -mesurable :

$$\sigma(X) = \{\alpha = X - 1(B), \in B\}.$$

Définition 1.17 Si $X_i, i \in I$ est un ensemble de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors la tribu crié par cette famille est déterminée par :

$$\sigma(X_i, i \in I) = \sigma(X_i \in B, i \in I, B \in B(\mathbb{R})) = \sigma(X_i \leq t, i \in I, t \in \mathbb{R}).$$

1.2 L'espace L^p

soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire et $p \in [1, \infty)$ une constante. Nous établissons la norme de X dans L_p par $\|X\|_p$ tel que,

$$\|X\|_p = \|X\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$\|X\|_p = \|X\|_{L^\infty} = \sup\{|X(\omega)|, \omega \in \Omega\}.$$

On définit l'espace L_p par

$$L_p(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \|X\|_p < \infty\}.$$

L'espace L_p est un espace vectoriel normé complet, i.e espace de banach.

1.3 Indépendance

Définition 1.18 Soient A, B de \mathcal{F} Deux événements indépendants ssi,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition 1.19 Un ensemble des événements $A = \{A_i, i \in I\} \in \mathcal{F}$ est indépendante si,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_n}),$$

Pour toutes les options possibles d'indicateurs $i_1, \dots, i_n \in I$.

Définition 1.20 Ensemble \mathcal{F}_i, i dans I sous-classes de \mathcal{F} sont indépendantes si elles le sont pour tous les choix possibles d'indices $i_1, \dots, i_n \in I$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_n}),$$

pour tous $A_{i_1} \in \mathcal{F}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{F}_{i_n}$.

Exemple 2 Deux sous-tribus $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ de \mathcal{F} sont indépendants si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ pour tous $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$.

Proposition Si les événements $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont indépendants, alors l'ensemble $\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)$ de sous-tribus engendré par $\alpha_i, i \in I$ est indépendante.

Définition 1.21 La variable aléatoire X est indépendante de la sous-tribu \mathcal{G} si la tribu $\mathcal{H}_X = \sigma(X)$ et \mathcal{G} sont indépendants.

Définition 1.22 Une famille de variables aléatoires $\{X_i, i \in I\}$ est indépendante si le groupe de tribus $\sigma(X_i)$ créé par les X_i indépendants.

Exemple 3 Soient $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux variables aléatoires, à savoir indépendants si

$$\mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A\}\mathbb{P}\{\omega : Y(\omega) \in B\},$$

pour tous $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Remarque

Si deux variables aléatoires $A, B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont indépendants, et $\mathbb{E}(|A|) < \infty, \mathbb{E}(|B|) < \infty$. Alors :

$$\mathbb{E}(AB) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B).$$

Soit α_k une suite des parties sur \mathcal{F} . Définissons la limite supérieure des ensembles par

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \{\omega : \omega \in \alpha_k \text{ pour infiniment nombreux } k\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha_k.$$

Il appartient évidemment à \mathcal{F} . En ce qui concerne la probabilité de cela, nous avons le

Lemme

[1]

1 Si la suite $\{\alpha_k\} \subset \mathcal{F}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\alpha_k) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}(\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k) = 0.$$

i.e, qu'il existe une partie $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et variable entier aléatoire k_0 avec pour chaque $\omega \in \Omega_0$, on a $\omega \notin \alpha_k$ chaque fois que $k \geq k_0(\omega)$.

2 Si la suite $\{\alpha_k\} \subset \mathcal{F}$ est indépendante et $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\alpha_k) = \infty$ alors $\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k) = 1$.

i.e, qu'il existe une partie $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_\theta) = 1$ tel que pour chaque $\omega \in \Omega_\theta$, il existe une sous-suite α_{k_i} telle que $\omega \in \alpha_{k_i}$.

1.4

Convergence de suites des variables aléatoires

Supposons que $X, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une variable et une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il existe plusieurs types de convergence :

1 S'il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ tel que pour chaque $\omega \notin \Omega_0$, la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ au sens habituel dans \mathbb{R}^d , alors (X_n) est dit converger vers X presque sûrement ou avec probabilité 1, et on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ p.s.

2 Si pour chaque $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Alors, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité.

3 Si X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent L^p avec

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Alors, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X dans L^p .

4 Si pour chaque fonction continue bornée f à valeur dans \mathbb{R}^d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X).$$

Alors, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X .

Définition 1.23

On appelle loi conjointe du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ la mesure de probabilité définie par

$$\mu_X(B) := \mathbb{P}(X \in B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.24

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.25

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est à densité s'il existe une fonction positive Lebesgue-intégrable $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

f_X est la densité conjointe de X .

Remarque

1 $C_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ est une matrice variance-covariance de X est définie par $\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

2 Un vecteur aléatoire X dans \mathbb{R}^n est un vecteur suit la loi normale ssi toutes les combinaisons linéaires de ses composantes X_i sont gaussiennes sur \mathbb{R} , et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, C)$.

1.5 Espérance conditionnelle

[1] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire intégrable et \mathcal{G} une sous tribu de \mathcal{F} .

Soient $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition 1.26

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D})$ de X sachant \mathcal{D} Il existe plusieurs types de convergence :

1 \mathcal{D} -mesurable.

2

$$\int_D \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) d\mathbb{P} = \int_D X d\mathbb{P}, \forall D \in \mathcal{D}.$$

Remarque

Soit X, Y deux variables aléatoires intégrables, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, si $\sigma(Y)$ est la tribu engendré par rapport Y, alors

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(Y)).$$

Les propriétés principales de l'espérance conditionnelle suivantes :

- 1 $\mathcal{D} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(X)$.
- 2 Soit $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{D}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{D})$.
- 3 $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{D})$.
- 4 X est \mathcal{D} -mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) = X$.
- 5 $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D})) = \mathbb{E}(X)$.
- 6 Si X est \mathcal{D} -mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}(XY \mid \mathcal{D}) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{D})$.
- 7 Si X est indépendante de \mathcal{D} , $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}) = \mathbb{E}(X)$.
- 8 $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}_2) \mid \mathcal{D}_1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{D}_1)$.

Calcul stochastique

Introduction

Le calcul stochastique est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps. À ce titre, il est une extension de la théorie des probabilités. Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique, on va introduire des notions générale de calcul stochastique, les définitions Nous en aurons besoin plus tard.

1 Processus stochastique

Définition 1.27 [4] Un processus stochastique est un ensemble paramétré de variables aléatoires $X_t, t \in T$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant des valeurs dans \mathbb{R}^n .

Remarque

- Dans la pratique l'indice t représente le temps.
- Le processus peut également être considéré comme une fonction stochastique : dans chaque ω dans Ω fonction associée \mathbb{R}^+ dans E , $t \mapsto X_t(\omega)$, appelée trajectoire du processus.
- Le processus peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ En E , nous Supposons toujours que cette application est mesurable lorsqu'elle est configurée $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la tribu $B(\mathbb{R}^+) \mathcal{F}$ et E de la tribu ϵ .
- On prend usuellement $T = [0, \infty[$ ou un intervalle $[0, a]$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

Définition 1.28 [1] Le processus X_t b1 est appelé chemins continus (ou continus), si L'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue pour chaque $\omega \in \Omega$.

Définition 1.29 [10] Le filtrage sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille Augmentation croissante (\mathcal{F} de sous tribus de \mathbb{A}).

Définition 1.30 On dit que la filtration est satisfait la condition usuelle, si

- 1 Les parties négligeables appartiennent \mathcal{F}_0 ,
- 2 \mathcal{F}_t est continue à droite [7], i.e :

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.31 On dit qu'un processus approprié X_t (par rapport au filtrage \mathcal{F}_t si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable $\forall t$).

Définition 1.32 Nous disons que "un processus X_t progressivement mesurable par rapport à \mathcal{F}_t si $\forall t \in T$ l'application $(t, \omega) : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -mesurable".

Définition 1.33 si $\forall \omega \in \Omega, X_t = Y_t p.s, \forall t \geq 0$, i.e : $(\mathbb{P}\{\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1, \text{ pour tout } t \geq 0$. alors le processus Y_t est dit modification ou version de processus X_t).

Définition 1.34 [1] Soient X_t et Y_t Deux processus sont indiscernables si $\forall \omega \in \Omega, X_t = Y_t, \forall t \geq 0$ p.s, i.e : $\mathbb{P}\{\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \geq 0\} = 1$.

Définition 1.35 soient X_t et Y_t deux processus sont égaux en loi $X \stackrel{\text{loi}}{=} Y$ si

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{\text{loi}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}), \forall t_1, \dots, t_k \in T, k \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.36 Un processus X_t est constante (stationnaire) si $\forall H > 0, X_t + H \stackrel{\text{loi}}{=} X_t$ ne dépend pas de $H > 0$, c'est à dire : $\forall H > 0, \forall t_1, \dots, t_k \in T$

$$(X_{t_1+H}, \dots, X_{t_k+H}) \stackrel{\text{loi}}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}).$$

Définition 1.37 On dit que le processus X_t est à incréments constants si la loi augmente $X_{t+H} - X_t$ ne dépend pas de $t \geq 0$, i.e.

$$X_{t+H} - X_t \stackrel{\text{loi}}{=} X_H$$

Définition 1.38 Un processus X_t est dit à incréments indépendants s'il est accessible à tous $k \geq 1$ et $0 < t_1 < \dots < t_k$ les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ sont indépendants

Définition 1.39 Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est dit gaussien si Toutes ses lois sont de dimensions limitées $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ soit gaussiennes (pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \in T$). Autrement dit $X = (X_t)_{t \in T}$ est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1 X_{t_1} + \dots + a_p X_{t_p}$ suit une loi normale ($\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \in T$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$).

Définition 1.40 [1] Soit $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ une variable aléatoire est nommé (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt (ou simplement, temps d'arrêt) si $\{\sigma : \tau(\sigma) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.

$$[[\tau, \rho] = \{(t, \sigma) \in \mathbb{R}^+ : \tau(\sigma) \leq t < \rho(\sigma)\},$$

et un intervalle stochastique. De même, On peut définir des périodes Aléatoire comme suit "[$[\tau, \rho],]\tau, \rho]$ et] τ, ρ [".

1.1

Martingale

Définition 1.41

Soit l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ intégrables, (c'est-à-dire vérifiant $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \forall t$) c'est une :

- 1 Si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ est dit une martingale .
- 2 Si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ est dit une sur-martingale.
- 3 Si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ est dit une sous-martingale.

2

Mouvement brownien

Le mouvement brownien, également appelé mouvement brownien, est défini comme le mouvement incontrôlé ou erratique de particules dans un fluide en raison de leur collision constante avec d'autres molécules en mouvement rapide.

Définition 2.42

[1] Soit l'espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus $(W_t)_{t \geq 0}$ Convient pour le filtrage \mathcal{F}_t à des valeurs réelles sont appelées mouvement brownien si :

- 1 $W_0 = 0$ p.s ;
- 2 $\forall 0 \leq s \leq t$, le variable aléatoire $W_t - W_s$ est gaussien de paramètre 0 et $t - s$;
- 3 $\forall 0 \leq s \leq t$, le variable aléatoire $W_t - W_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s .

Si $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ alors les incréments $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq k$ Indépendant et dire que les suggestions brownie avec incréments indépendants. De plus, la loi de $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ dépend uniquement de la différence $t_i - t_{i-1}$, Et on dit que le mouvement brownien est comme ça Fixé (stationnaire).

Proposition

[2] Si $(W_t, t \geq 0)$ [1] un mouvement brownien, alors

- W_t défini par $W_t = -W_t$ est aussi un mouvement brownien.
- W_t défini par $W_t = \frac{1}{c} W_{c^2 t}$ est aussi un mouvement brownien.
- W_t défini par $W_t = t W_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0$ et $W_0 = 0$ est aussi un mouvement brownien.

Lemme

Supposons que W_t un mouvement brownien. Si, [3] Supposons que W_t un mouvement brownien. Alors,

$$\mathbb{E}(W_t W_s) = t \wedge s \forall t \geq 0, s \geq 0.$$

2.1 Pont Brownien

le pont brownien $(W_t^o)_{t \in [0, 1]}$ est le processus gaussien centré défini par fonction de covariance $L(s, t) = \min(s, t) - st$.

Proposition On peut déterminer directement un pont brownien W^o à partir d'un mouvement brownien W^o par

$$W_t^o = W_t - tW_1, t \geq 0.$$

Définition 2.43

1 Soit $0 < \alpha < 1$. Une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est dit uniformément Höldernienne continue avec l'exposant $\alpha > 0$ s'il existe une constante L telle que

$$|g(t) - g(s)| \leq L|t - s|^\alpha, \quad \forall s, t \in [0, T]$$

2 [1] Soit $\alpha > 0$. Une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est dit Höldernienne continue avec l'exposant $\alpha > 0$ au point s , s'il existe une constante L telle que

$$|g(t) - g(s)| \leq L|t - s|^\alpha, \quad \forall s, t \in [0, T].$$

Il y a une autre théorie est la théorie de Kolmogorov, qui peut répondre à la question de la continuité du mouvement Brownien.

Théorème 2.2

[4] (Théorème de continuité de Kolmogorov).

On suppose que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ le processus qui satisfait la condition suivante : $\forall T > 0$, il existe des constantes positives α, β, γ telles que

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\beta) \leq \gamma|t - s|^{1+\alpha}, \quad \forall 0 \leq s, t \leq T.$$

Théorème 2.3

[3] Disons que X_t est un processus stochastique avec des chemins continus p.s, comme ceci

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\beta \leq M|t - s|^{1+\alpha}, \quad \forall 0 \leq s, t \leq \infty.$$

pour les constantes $\alpha, \beta > 0, M \geq 0$ et $\forall 0 \leq t, s$.

Ensuite, pour chaque $0 < \gamma < \alpha\beta, T > 0$, et presque chaque $\omega, \exists K, K = K(\omega, \gamma, T)$ de telle sorte que

$$|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma, \text{ pour tous } 0 < t, s \leq T,$$

Ainsi, la trajectoire $t \rightarrow X(t, \omega)$ est uniformément Höldernienne continue avec l'exposant γ sur $[0, T]$.

2.2 Application sur les mouvement Brownien

Regardons $W(t)$, qui est un mouvement brownien à n dimensions. Nous l'avons pour tout le monde $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|W(t) - W(s)|^{2m}) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} g_x(x) dx. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx. \end{aligned}$$

On utilise le changement des variable suivante $h = t - s > 0, y = \frac{x}{\sqrt{t-s}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|W(t) - W(s)|^{2m}) &= \int_{\mathbb{R}^n} h^m |y|^{2m} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= |t - s|^m \mathbb{E}(|y|^{2m}) \\ &\leq C^m |t - s|^m\end{aligned}$$

Selon la théorie de la continuité de Kolmogorov). Pour $\alpha = m - 1, \beta = 2m$, il existe une copie \tilde{W} continue de $W(t)$, et selon les hypothèses de la théorie 1.7 \tilde{W} est Höldernienne continue p.s pour les exposants

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \quad \forall m.$$

Alors, Approximativement pour tout les ω et tout $T > 0$, le trajectoire $t \rightarrow W(t, \omega)$ est uniformément Höldernienne continue sur $[0, T]$ pour chaque exposant $0 < \gamma < 1/2$.

2.3

Mouvement Brownien multidimensionnel

Définition 2.44

On dit que un processus stochastique d-dimensionnels $Y_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)})$ est un mouvement brownien d-dimensionnels si satisfait les condition suivantes :

- 1 $W_0 = 0$;
- 2 $\forall 0 \leq s \leq t$, le vecteur aléatoire $W_t - W_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s ;
- 3 $\forall 0 \leq s \leq t$, le vecteur aléatoire W_s est de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, C)$.

2.4

Caractérisation d'un mouvement brownien

[1] Soit $Y = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)})_{t \geq 0}$ un processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , on dit que W est un mouvement brownien d-dimensionnel si pour tout $1 \leq i \leq d$, $W_t^{(i)}$ est un mouvement brownien réels, $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(d)}$ donc sont indépendants.

Lemme

[1] (Inégalité de Gronwall)

Soit $f(\cdot)$ Une fonction positive finie qui peut être mesurée sur $[0, T]$, et que $g(\cdot)$ soit une fonction intégrable positive sur $[0, T]$ telle que $T > 0$ et $a \geq 0$. Si

$$f(t) \leq a + \int_0^t g(s) f(s) ds, \forall 0 \leq t \leq T.$$

Alors

$$f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right), \forall 0 \leq t \leq T.$$

Généralités sur les équations différentielles

Introduction :

Les équations différentielles jouent un rôle important pour la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques. Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équations différentielles ordinaires. Et pour résoudre ces équations différentielles ordinaires, il existe de nombreuses façons que nous allons découvrir dans ce chapitre.

1 Equation différentielle ordinaire :

Définition 1.45

Une équation différentielle ordinaire qui notée par (EDO) du premier ordre est une équation qui a pour inconnue une fonction y d'une variable réelle t , qui s'écrit sous forme suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)), t \in I$$

telque,

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}.$$

Où I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , f est une fonction continue de $I \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} qui est connue. On cherche alors les fonctions y de classe \mathcal{C}^1 , qui vérifiant : $y'(t) = f(t, y(t)), t \in I$.

2 Théorème de Cauchy-Lipschitz :

Problème De Cauchy : Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On note $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^m (on a vu en analyse 3 que toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^m).

Définition 2.46

Etant donnée une équation différentielle ordinaire du premier ordre sous forme normale

$$x' = f(t, x)$$

.Pour $(t, x(t)) \in U$, et un point $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions x telque :

$$x(t_0) = x_0$$

Notation 1. On note le problème de Cauchy de la façon suivantes :

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

2.1

Solution du problème de Cauchy :

Définition 2.47

Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} avec la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } t \in I, (t, x(t)) \in U, \\ \text{pour tout } t \in I, x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Solution de (1.1) :

Théorème 2.4

Supposons $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue. Soit $(t_0, x_0) \in U$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Une fonction x est solution de (1.1) sur I si et seulement si :

- 1 pour tout $t \in I, (t, x(t)) \in U,$
- 2 x est continue sur $I,$
- 3 pour tout $t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$

3

Existence et unicité locale :

Enonçons tout d'abord un résultat local d'existence et d'unicité .

3.1

Couachy-Lipschitz

Théorème 3.5

Soient $f \in \mathcal{C}(U; \mathbb{R}^N)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, et $(t_0, x_0) \in U$. On suppose f lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (t_0, x_0) , c'est à dire qu'il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans U et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.2)$$

Alors on a les propriétés suivantes.

Existence : Il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T]; J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Unicité : Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$. Régularité : Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$, alors x est de classe \mathcal{C}^{r+1}

Le théorème suivant donne une condition pour qu'une fonction soit uniformément continue :

3.2

Fonction Lipschitzienne :

Théorème 3.6

Soit f une fonction Lipschitzienne sur un intervalle I ($\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$). Alors f est uniformément continue sur I .

(On dit que f est uniformément continue (ou f est u-continue) sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2, \exists \eta \in \mathbb{R}_+, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Exemple 4

$f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. La fonction f est impaire et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} \right| = \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} \leq |y-x|.$$

Donc f est 1-Lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ donc elle l'est aussi sur \mathbb{R} (puisque f impaire).

Remarque

La réciproque du théorème 1.1 est fausse. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ mais non Lipschitzienne.

-Par contra-position, on a :

$$f \text{ non u-continue sur } I \Rightarrow f \text{ non Lipschitzienne sur } I.$$

3.3

Fonction contractante :

**Théorème
3.7**

Une fonction f est dite contractante sur I si il existe un réel $0 < K < 1$ telque $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

Exemple 5

- 1** Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{10}$ définie sur $[1, 3]$.
On va montrer que f est contractante :
soit $(x, y) \in [1, 3]$ en calculant la quantité.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{10} \right| = \frac{1}{10} \times |x^2 - y^2|.$$

On obtient :

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{10} \times |x + y| \times |x - y|.$$

Comme $x, y \in [1, 3]$, alors

$$\frac{2}{10} \leq \frac{1}{10} \times |x + y| \leq \frac{6}{10}.$$

Donc,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{6}{10} \times |x - y|.$$

D'où f est contractante sur $[1, 3]$ avec $K = \frac{6}{10}$.

- 2** Soit la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $[2, 4]$.
On va montrer que h est contractante sur $[2, 4]$.
Soient $x, y \in [2, 4]$, en calculant la quantité :

$$|h(x) - h(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x - y}{xy} \right|.$$

On obtient :

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{xy} |x - y|.$$

Comme $x, y \in [2, 4]$, alors

$$\frac{1}{16} < \frac{1}{xy} < \frac{1}{4}.$$

Donc,

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|.$$

D'où h est contractante sur $[2, 4]$ avec $K = \frac{1}{4}$.

-Pour d'obtention de nombreuses approximations des solutions d'équations différentielles ordinaires. On va énoncer un théorème qui s'intéresse aux.

3.4

Lemme de Gronwall :

Lemme

Soient φ, ψ, y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs positives et vérifiant l'inégalité.

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors,

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds.$$

corollaire 1. Soient ψ et $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant $\exists c \geq 0 \forall t \in [a, b], y(t) \leq \int_a^t \psi(s)y(s)ds$.
Alors

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est constante égale à c , on a donc pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds = c + c[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)]_a^t = c \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

corollaire 2. Soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 vérifiant :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \geq 0, \forall t \in [a, b], \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha \|y(t)\|$$

Alors,

$$\forall t \in [a, b], \|y(t)\| \leq \|y(a)\exp^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(\exp^{\alpha(t-a)} - 1).$$

Il suffit d'écrire, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \|y(t) - y(a)\| \leq \|y(a)\| + \int_a^t \|y'(s)\| + \beta(t-a) + \alpha \int_a^t \|y(s)\|ds.$$

puis on applique le lemme de Gronwall on conclut en intégrant par parties.

Exemple 6 Soient $b, k > 0, a \in \mathbb{R}$ et $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall t \in [a, b], g(t) \leq at + k \int_0^t g(s)ds.$$

On va démontrer que :

$$\forall t \in [a, b], g(t) \leq \frac{a}{k}(\exp^{kt} - 1).$$

Posons

$$h(t) = \exp^{-kt} \int_0^t g(s)ds.$$

Alors,

$$h(t) = 0 \text{ et } h'(t) = \exp^{-kt}(g(t) - k \int_0^t g(s)ds) \leq \exp^{-kt} at. \text{ Donc}$$

$$h(t) \leq a \int_0^t \exp^{-ks} ds = \frac{a}{k^2}(1 - \exp^{-kt} - kt \exp^{-kt}).$$

Si bien que $g(t) \leq at + k \exp^{kt} h(t) \leq at + \frac{a}{k}(\exp^{kt} - 1 - kt) = \frac{a}{k}(\exp^{kt} - 1)$.

Il faut savoir la forme de l'équation et sa classification pour pouvoir déterminer la méthode de sa solution

3.5 Les types des équations différentielles ordinaires et ces méthodes des résolutions

Equation à variable séparés :

Définition 3.48 Considérons l'EDO d'ordre 1 sous la forme normale donnée par l'équation $x' = f(t, x)$.

Exemple 7 Trouver la solution générale des équations différentielles ordinaires suivantes : $\frac{dy}{dx} = xy$ et $\frac{dy}{dx} = x^3\sqrt{y}$.

1

$$\frac{dy}{dt} = xt.$$

On va séparée les varibales :

$$\frac{dy}{y} = t dt.$$

Par intégrale

$$\int \frac{dy}{y} = \int t dt.$$

d'où

$$\ln|y| = \frac{t^2}{2} + c.$$

$$y = \exp\left(\frac{t^2}{2} + c\right).$$

donc

$$y = \exp\frac{t^2}{2} \exp c.$$

$$y = c_1 \exp\frac{t^2}{2}.$$

où $c_1 = \exp c$.

2 $\frac{dy}{dt} = t^3\sqrt{y}$, on va séparée les variables :

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = t^3 dt.$$

Par intégrale

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int t^3 dt.$$

D'où

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{t^4}{4} + c.$$

Donc

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{t^4}{8} + \frac{c}{2}.$$

Alors

$$y = \left(\frac{t^4}{8} + c_1\right)^2.$$

où $c_1 = \frac{c}{2}$.

Equation scalaires autonomes :

Définition 3.49 Les équations scalaires autonomes sont de la forme

$$y' = f(y).$$

Remarque

On remarque que $x \equiv a$ avec a racine de f est nécessairement une solution de ce type d'équations. On a également une propriété importante concernant la monotonie de la fonction f .

Exemple 8 -Trouver la solution générale $y(t)$ d'équation scalaire autonome suivante : $2yy' = 1$

La solution :

Soit l'équation $2yy' = 1$

On remarque que

$$f(y) = \frac{1}{2y}.$$

D'où

$$y' = \frac{1}{2y}.$$

Donc

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2y}.$$

Par intégrale :

$$\int 2y dy = \int dt.$$

Alors

$$y^2 = t + c.$$

Donc

$$|y| = \sqrt{t + c}.$$

Equation linéaire :

Définition 3.50 Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y' . Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme :

$$a(t)y' + b(t)y = d(t). \quad (3.3)$$

On suppose que a, b et d sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exemple 9 Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2ty = 2t \exp^{-t^2} \quad 3.3, \text{ tel que } x \in \mathbb{R}.$$

Solution :

On remarque que l'équation 3.3 est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre.

$$y' + 2ty = 0$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = 0.$$

Alors

$$\frac{dy}{dt} = -2ty.$$

donc

$$\frac{1}{y} dy = -2t dt.$$

par intégral

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -2t dt.$$

donc

$$\ln|y| = -t^2 + c.$$

Alors

$$|y| = \exp^{-t^2+c}.$$

d'où

$$|y| = \exp^{-t^2} \exp^c.$$

On pose $\lambda = \exp^c \Rightarrow |y| = \lambda \exp^{-t^2}$.

On utilise la méthode de la variation de la constante et reportons dans 3.3 $y(t) = \lambda(t) \exp^{-t^2}$

$$\lambda'(t) = 2t.$$

$$\lambda(t) = \int 2t dt.$$

$\lambda(t) = t^2 + k$ ou $k \in \mathbb{R}$.

Donc

$$y(t) = t^2 \exp^{-t^2}.$$

est une solution général de l'équation 3.3.

Equation de Bernoulli :

Définition 3.51

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle scalaire non linéaire de la forme

$$y' = a(t)y + b(t)y^r$$

où $r \in \mathbb{R}$, a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . Cette équation est linéaire pour $r = 0$ et $r = 1$. Dans le cas général, en l'écrivant :

$$y' y^{-r} = a(t) y^{1-r} + b(t)$$

donc si on pose : $z = y^{-r}$, on est alors ramené une équation linéaire

$$z' = (1-r)[a(x)z + b(x)]$$

Exemple 10

Soit l'équation différentielle suivantes : $ty' - y + \frac{t^3}{y^3} = 0$.

Trouver la solution générale de l'équation différentielle ci-dessus.

Solution :

$$ty' - y + \frac{t^4}{y^3} = 0.$$

On divise par x :

$$y' - \frac{1}{t}y + t^3y^{-3} = 0.$$

On multiplie par y^3 :

$$[y' - \frac{1}{t}y = -t^3y^{-3}]y^3.$$

On trouve :

$$y^3y' - \frac{1}{t}y^4 = -t^3 \quad (3.4)$$

On pose : $z = y^4 \Rightarrow z' = 4y^3y'$. D'où

$$[\frac{z'}{4} - \frac{1}{t}z = -t^3]4.$$

Donc

$$z' - \frac{4}{t}z = -4t^3$$

est une équation différentielle du premier d'ordre avec second membre .
donc

$$z' - \frac{4}{t}z = 0.$$

solution homogène est :

$$z_h = C \exp^{-\int \frac{4}{t} dt}.$$

Alors

$$z_h = C \exp^{\int \frac{4}{t} dt}.$$

D'où

$$C \exp^{4\ln(t)} = Ct^4.$$

Solution particulière :

$$z_p - \frac{4}{t}z_p = -4t^3 \quad 4.14$$

Donc

$$z_p = C(t)t^4.$$

$$z'_p = C'(t)t^4 + 4t^3C(t).$$

$$C'(t)t^4 = -4t^3.$$

$$C'(t) = \frac{-4t^3}{t^4}.$$

D'où

$$C'(t) = \frac{-4}{t}$$

$$C(t) = -4 \int \frac{1}{t} dt.$$

$$C(t) = -4 \ln t.$$

$$z_p = -4 \ln t t^4.$$

$$z_g = Ct^4 - 4 \ln t t^4.$$

Alors

$$y = (Ct^4 - 4 \ln t t^4)^{\frac{1}{4}}.$$

Equation de Ricatti :

Définition 3.52 L'équation de Ricatti est de la forme :

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t) \quad (3.5)$$

($t \in I$) où \mathbb{R}

Remarque

$a(t), b(t)$ etc $c(t)$ sont trois fonctions continues sur un intervalle I .

On ne peut la résoudre que si on en connaît a priori une solution particulière y_1 . on pose alors $y = y_1 + z$, z étant une nouvelle fonction inconnue, d'où

$$4.15 \Leftrightarrow z' = a(t)z^2 + d(t)z.$$

C'est une équation de Bernoulli qui se remène à une équation linéaire en posant $\frac{1}{z} = u$.

Exemple 11 Trouver la solution générale de l'équation suivante :
 $y' = (y - t)^2$.

Solution :

$$y' = (y - t)^2 \quad (3.6)$$

La solution particulier de 4.16 est : $y_p = t + 1$ telque $y'_p = 1$.

$$y' = y^2 + t^2 - 2xy.$$

telque $a(t) = 1, b(t) = -2t, c(t) = t^2$.

On pose : $y = y_p + z$ sa dérivé est : $y' = y'_p + z'$.

On remplace dans 4.16 : $1 + z' = (t + 1 + z - t)^2$

$$1 + z' = (1 + z)^2.$$

D'où $1 + z = 1 + z^2 + 2z \Leftrightarrow z' - 2z = z^2$. est une equation différentielle ordinaire de Bernoulli.

On divise sur z^2 :

$$z'z^{-2} - 2z^{-1} = 1 \quad (3.7)$$

On pose $u(t) = z^{1-\alpha}$:

$$u = z^{-1}, u' = -z^{-2}z'.$$

On remplace 3.7 :

$$-u' - 2u = 1$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

$$u' + 2u = -1$$

Sans second membre : $u' + 2u = 0$.

Donc

$$\frac{du}{dt} = -2u.$$

D'où

$$\int \frac{du}{u} = \int -2dt.$$

Alors

$$\ln|u| = -2t + c_1.$$

Donc

$$|u| = \exp^{-2t+c_1}.$$

$$|u| = \exp^{-2t} \exp^{c_1}.$$

d'où

$$|u| = \lambda \exp^{-2t} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Donc

$$u = k \exp^{-2t} \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

La variation de la constante :

$$u = k \exp^{-2t} \quad u = k(t) \exp^{-2t}$$

donc

$$u' = k'(t) \exp^{-2t} - 2k \exp^{-2t}.$$

D'où

$$2.3 \Leftrightarrow k' \exp^{-2t} - 2k \exp^{-2t} + 2(k \exp^{-2t}) = 1.$$

Donc

$$k' \exp^{-2t} = -1 \Leftrightarrow k' = -\exp^{-2t}.$$

et comme

$$\int dk = \int \exp^{-2t} dt \Leftrightarrow k = \frac{-1}{2} \exp^{2t} + c.$$

Alors

$$u = k(t) \exp^{-2t} \Leftrightarrow u = \left(\frac{-1}{2} \exp^{2t} + c \right) \exp^{-2t}.$$

$$u = \frac{-1}{2} + c \exp^{-2t}.$$

ona

$$u = z^{-1} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{u}.$$

D'où

$$z = \frac{2}{-1 + A \exp^{-2t}}.$$

, tel que $A = 2c$.

$$y = y_p + z$$

Donc

$$y = t + 1 + \frac{2}{-1 + A \exp^{-2t}}.$$

tel que $A = 2c$.

Equation différentielle stochastique

1 Introduction et motivation

Les équations différentielles stochastiques jouent un rôle important dans les applications mathématiques, principalement dans la modélisation des phénomènes réels physiques, biologiques, ... La théorie des équations différentielles stochastiques connues, en faisant le lien avec les connaissances et notions connues sur les équations différentielles ordinaires qui ont été développés depuis plusieurs années. Les équations différentielles stochastiques servent de modèles mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire ou stochastique. L'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques est un point important dans cette théorie mathématique, et pour ce faire en utilisant plusieurs méthodes.

2 Equation Différentielle Stochastique

Définition 2.53 L'équation différentielle stochastique notée par (EDS) est une équation différentielle de la forme :

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t \quad (4.1)$$

ou bien

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_s, s)ds + \int_0^t b(X_s, s)dB_s \quad (4.2)$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (4.3)$$

Telque l'inconnue est le processus X , où a et b sont des fonctions déterministes mesurables de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Avec,

- X_t : Processus stochastique.
- B_t : Mouvement Brownien .
- t : Le temps.
- $a(X_t, t)$: appelée coefficient de dérivé.
- $b(X_t, t)$: appelée coefficient de diffusion.

Exemple 12 Considérons l'EDS linéaire avec "Bruit additif"

$$dX_t = \phi(t)X_t dt + \varphi(t)dB_t,$$

où ϕ et φ sont des fonctions déterministes. avec, Cette équation est de la forme (1),

- $a(X_t, t) = \phi(t)X_t$.
- $b(X_t, t) = \varphi(t)$.

Exemple 13 Soit l'EDS linéaire avec "Bruit multiplicatif"

$$dX_t = f(t)X_t dt + g(t)X_t dB_t,$$

où f et g des fonctions déterministes. Cette équation est de la forme (1) avec,

- $a(X_t, t) = f(t)X_t$.
- $b(X_t, t) = g(t)X_t$.

2.1 Solutions fortes

Définition 2.54

Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ est appelé une solution forte de l'EDS (1) avec condition initiale x_0 si

- X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \in [0, T]$;
- on a les conditions de régularité

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^t |a(X_s, s)| ds < \infty \right\} = \mathbb{P} \left\{ \int_0^t b(X_s, s)^2 ds < \infty \right\} = 1. \quad (4.4)$$

- pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(X_s, s) ds + \int_0^t b(X_s, s) dB_s \quad (4.5)$$

avec probabilité 1.

2.2 Exemple d'application :

Considérons l'EDS linéaire avec "bruit additif"

$$dX_t = \phi(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t, \quad (4.6)$$

où ϕ et σ sont des fonctions déterministes. Dans le cas particulier $\sigma \equiv 0$, la solution peut s'écrire simplement

$$X_t = e^{\alpha(t)} x_0, \alpha(t) = \int_0^t \phi(s) ds \quad (4.7)$$

Ceci suggère d'appliquer la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire de chercher une solution de la forme $X_t = \exp^{\alpha(t)} Y_t$. La formule d'Ito appliquée à $Y_t = u(X_t, t) = \exp^{-\alpha(t)} X_t$

En calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\phi(t) \exp^{-\alpha(t)} X_t, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \exp^{-\alpha(t)}, \quad \text{et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

nous donne

$$dY_t = -\phi(t) \exp^{-\alpha(t)} X_t dt + \exp^{-\alpha(t)} dX_t \quad (4.8)$$

En remplace dX_t par $\phi(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t$, on obtient

$$dY_t = -\phi(t) \exp^{-\alpha(t)} X_t dt + \exp^{-\alpha(t)} (\phi(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t)$$

Alors

$$dY_t = \exp(-\alpha(t)) \sigma dB_t.$$

d'où en intégrant et en tenant compte du fait que $Y_0 = x_0$,

$$Y_t = x_0 + \int_0^t \exp^{-\alpha(s)} \sigma(s) dB_s \quad (4.9)$$

Ceci donne finalement la solution forte de l'équation (4.6)

$$X_t = x_0 \exp \alpha(t) + \int_0^t \exp^{\alpha(t)-\alpha(s)} \sigma(s) dB_s \quad (4.10)$$

2.3

Existence et unicité de solutions

Nous donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives sur les coefficients a et b.

Théorème 2.8

[1] Supposons que les fonctions a et b satisfont les deux conditions suivantes :

1 Condition de Lipschitz globale : Il existe une constante K telle que

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq K|x - y| \tag{4.11}$$

pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$.

2 Condition de croissance : Il existe une constante L telle que

$$|a(x, t)| + |b(x, t)| \leq L(1 + |x|) \tag{4.12}$$

pour tous les $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$.

Alors l'EDS (1) admet, pour toute condition initiale x_0 de carré intégrable, une solution forte $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, presque sûrement continue. Cette solution est unique dans le sens que si $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ et $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ sont deux solutions presque sûrement continues, alors

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| > 0 \right\} = 0. \tag{4.13}$$

Exemple 14

En Considérant l'EDS linéaire "processus d'Ornstein-Uhlenbeck" à coefficients constants suivants :

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dB_t, & \forall t \in]0, T] \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{4.14}$$

Où α et β sont des constantes strictement positives.

- 1** Posons $Y_t := u(X_t, t) = X_t \exp(\alpha t)$, Calculer dY_t .
- 2** Calculer la solution X_t .
- 3** Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $Var(X_t)$.

Solutions

1 On calculant dY_t : On a la fonction d'Itô

$$Y_t := u(X_t, t) = X_t \exp(\alpha t).$$

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha X_t \exp(\alpha t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \exp(\alpha t), \quad \text{et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Alors

$$dY_t = \alpha X_t \exp(\alpha t) dt + \exp(\alpha t) dX_t.$$

En remplaçant dX_t par $-\alpha X_t dt + \beta dB_t$, on obtient :

$$dY_t = \alpha X_t \exp(\alpha t) dt + \exp(\alpha t)(-\alpha X_t) dt + \beta \exp(\alpha t) dB_t.$$

Donc

$$dY_t = \beta \exp(\alpha t) dB_t.$$

2 Calculons la solutions X_t : on a

$$dY_t = \beta \exp(\alpha t) dB_t.$$

Sous forme intégrale

$$\int_0^t dY_s = \int_0^t \beta \exp(\alpha s) dB_s.$$

Donc

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \beta \exp(\alpha s) dB_s.$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \beta \exp(\alpha s) dB_s.$$

En remplaçant Y_t par $X_t \exp(\alpha t)$, on obtient

$$X_t \exp(\alpha t) = X_0 + \int_0^t \beta \exp(\alpha s) dB_s.$$

Alors

$$X_t = x \exp(-\alpha t) + \int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s.$$

3 Pour calculer l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[x \exp(-\alpha t) + \int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right].$$

Avec l'inéairité d'espérance , on a

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[x \exp(-\alpha t)\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right].$$

Mais l'espérance d'une intégrale stochastique est nul.

Alors,

$$\mathbb{E}(X_t) = x \exp^{-\alpha t}.$$

Et la variance

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left(x \exp(-\alpha t) + \int_0^t \beta \exp^{-\alpha(t-s)} dB_s\right).$$

On sais que la variance est l'inéaire par apport a la variable aléatoire , alors

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left(x \exp(-\alpha t)\right) + \text{Var}\left(\int_0^t \beta \exp^{-\alpha(t-s)} dB_s\right).$$

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left(\int_0^t \beta \exp^{-\alpha(t-s)} dB_s\right).$$

Car $\text{Var}\left(x \exp(-\alpha t)\right) = 0$

et comme

$$\text{Var}\left(\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right]^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right)\right]^2.$$

Donc

$$\text{Var}\left(\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right]^2\right).$$

En utilisant l'isométrie d'Ito

$$\mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \beta \exp(-\alpha(t-s)) dB_s\right]^2\right) = \int_0^t \beta^2 \exp(-2\alpha(t-s)) dB_s.$$

Donc

$$\beta^2 \exp(-2\alpha t) \int_0^t \exp(2\alpha s) dB_s = \beta^2 \frac{1 - \exp(-2\alpha t)}{2\alpha}.$$

Alors

$$\text{Var}(X_t) = \beta^2 \frac{1 - \exp(-2\alpha t)}{2\alpha}.$$

Exemple 15 En Considérant l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -X_t dt + \exp(-t) dB_t, & \forall t \in]0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases} \quad (4.15)$$

- 1 Posons $Y_t := u(X_t, t) = X_t \exp(t)$, Calculer dY_t .
- 2 Calculer la solution X_t .
- 3 Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\text{Var}(X_t)$.

Solution

- 1 On a fonction d'Itô

$$Y_t := u(X_t, t) = X_t \exp(t).$$

On rapelle la formule d'Itô pour la fonction

$$u(x, t), dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t) dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t) b_t dt.$$

On calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X_t \exp(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \exp(t), \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Alors

$$dY_t = X_t \exp(t) dt + \exp(t) dX_t.$$

- 2 On calculant la solution X_t
En remplace dX_t par $-X_t dt + \exp(-t) dB_t$, on obtient

$$dY_t = \exp(t) + dB_t.$$

$$dY_t = dB_t.$$

En effectuant une intégration, on obtient Donc

$$\int_0^t dY_t = \int_0^t dB_s.$$

D'où

$$Y_t - Y_0 = B_t.$$

Alors

$$Y_t = Y_0 + B_t.$$

$$X_t \exp(t) = x + B_t.$$

Donc

$$X_t = x + \exp(-t) B_t.$$

3 Pour calculer l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(x + \exp(-t)B_t).$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_t) = x + \mathbb{E}(\exp(-t)B_t).$$

et la variance

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(x + \exp(-t)B_t).$$

Donc

$$\text{Var}(X_t) = (\exp(-t)B_t).$$

Exemple 16 Le modèle de Black et Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué et l'autre pas. Dans cet exemple, on traite le cas de l'actif risqué, à savoir le prix d'une action à l'instant t . Il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), & \forall t \in]0, T] \\ S_0 = x. \end{cases} \quad (4.16)$$

Où μ et σ des fonctions mesurables indéterministes. On applique ensuite la formule d'Itô à

$$u(S_t, t) = Y_t = \ln(S_t).$$

On a l'équation de modèle de Black-Scholes est :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), & t \in]0, T], \\ S_0 = x. \end{cases}$$

Si $\sigma = 0$, alors nous sommes face à une équation différentielle ordinaire dont la solution est

$$S_t = S_0 \exp(\mu t)$$

On pose la fonction d'Itô $u(S_t, t) = Y_t = \ln S_t$

On rappelle la formule d'Itô

$$dY_t = \frac{\partial Y}{\partial t}(S_t, t)dt + \frac{\partial Y}{\partial x}(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(S_t, t)dS_t^2.$$

En calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{1}{S_t^2}.$$

Alors

$$dY_t = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2S_t^2}dS_t^2.$$

telque $dS_t^2 = S_t^2 \sigma^2 dt$.

Donc

$$dY_t = \frac{1}{S_t}dS_t + -\frac{1}{2S_t^2}S_t^2 \sigma^2 dt.$$

En remplace dS_t par $S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$, on obtient :

$$dY_t = \frac{1}{S_t}[S_t(\mu dt + \sigma dB_t)] - \frac{1}{2S_t^2}S_t^2 \sigma^2 dt.$$

D'où

$$dY_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t.$$

par intégration

$$\int_0^t Y_t = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Alors

$$Y_t - Y_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s.$$

En remplace Y_t par $\ln S_t$,

$$\ln S_t - \ln S_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s.$$

En utilise les propriétés de la fonction $\ln(x)$,

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Donc

$$\frac{S_t}{S_0} = \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] + \int_0^t \sigma dB_s.$$

D'où

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Donc la solution de l'équation (4.16) est

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] + \sigma \int_0^t dB_s.$$

est appelé brownien géométrique.

Exemple 17 Considérons l'EDS linéaire avec "bruit additif"

$$\begin{cases} dX_t = \phi(t)X_t dt + \varphi(t)dB_t, \forall t \in (0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases}$$

où ϕ et φ sont des fonctions déterministes.

- 1 Calculer la solution de cette équation à l'aide d'utilisant la formule d'Itô?
- 2 Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $Var(X_t)$.

Solution

- 1 Posons la fonction d'Itô $Y_t := u(X_t, t) = \exp(-\alpha)X_t$ On rappelle la formule d'Itô

$$u(x, t), dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t)b_t|dt|^2.$$

On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = -\phi \exp(-\alpha)(t)X_t$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \exp(-\alpha(t))$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
Alors,

$$dY_t = -\phi \exp(-\alpha(t))X_t dt + \exp(-\alpha(t))dX_t.$$

En remplaçant dX_t par $\phi(t)X_t dt + \varphi(t)dB_t$.

$$dY_t = -\phi \exp(-\alpha(t))X_t dt + \exp(-\alpha(t))(\phi(t)X_t dt + \varphi(t)dB_t)$$

Alors

$$dY_t = \exp(-\alpha(t))\varphi(t)dB_t.$$

En effectuant une intégration, on obtient

$$\int_0^t \exp(-\alpha(s))\varphi(s)dB_s.$$

En tenant compte du fait que $Y_0 = x$.

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \exp(-\alpha(s))\varphi(s)dB_s.$$

En remplaçant Y_t par $X_t \exp(-\alpha(t))$, on obtient

$$X_t = x \exp(\alpha(t)) + \int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s.$$

2 En calcule l'espérance de X_t

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[x \exp(\alpha(t)) + \int_0^t \exp(-\alpha(s))\varphi(s)dB_s\right].$$

Par l'inéairité d'espérance on a

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[x \exp(\alpha(t))\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right].$$

On sait que l'espérance de l'intégrale stochastique est null,Donc

$$\mathbb{E}(X_t) = x(\exp \alpha(t)).$$

Et la variance

$$Var(X_t) = Var\left(x \exp(\alpha(t)) + \int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right).$$

On sait que la variance de la constante est null, donc

$$Var(X_t) = Var\left(\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right).$$

Alors

$$Var\left(\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right]^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right)\right]^2.$$

Donc

$$Var(X_t) = Var\left(\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right).$$

Alors

$$Var\left(\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right]^2\right)$$

En utilisant l'isométrie d'Ito

$$\mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \exp(\alpha(t-s))\varphi(s)dB_s\right]^2\right) = \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \exp(2\alpha(t-s))\varphi(s)^2 dB_s\right]\right)$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \exp(2\alpha(t-s))\varphi(s)^2 dB_s\right]\right) = \int_0^t \exp(2\alpha(t-s))\varphi(s)^2 dB.$$

Alors

$$Var(X_t) = \int_0^t \exp(2\alpha(t-s))\varphi(s)^2 dB.$$

Exemple 18 Soit l'EDS linéaire avec "bruit multiplicatif"

$$\begin{cases} dX_t = a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t, \forall t \in (0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases}$$

- 1 Ecrire dY_t .
- 2 En déduire la forme de la solution $X(t)$.
- 3 Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $Var(X_t)$.

Solution

1

$$\begin{cases} dX_t = a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t, \forall t \in (0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases}$$

où $a(t)$ et $\sigma(t)$ sont des fonctions déterministes.

Nous pouvons alors écrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = a(t)dt + \sigma(t)dB_t.$$

Posons $Y_t = u(X_t, t) = \log(X_t)$. On rappelle la formule d'Itô

$$u(X_t, t), dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt^2.$$

On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{X_t}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{X_t^2}$.

On applique la formule d'Itô, on obtient

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t^2.$$

2

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} dX_t^2.$$

En remplaçant dX_t par $a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t$.

$$dY_t = \frac{1}{X_t} \left[a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t \right] - \frac{1}{X_t^2} \left[a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t \right]^2.$$

Alors

$$dY_t = a(t)dt + \sigma(t)dB_t - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 dt.$$

En intégrant et reprenant l'exponentielles, on obtient

$$X_t = X_0 \exp \left[\int_0^t a(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2 ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \right]$$

3 En calculant l'espérance

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E} \left[X_0 \exp \left[\int_0^t a(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2 ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \right] \right].$$

Et la variance

$$Var(X_t) = Var \left[X_0 \exp \left[\int_0^t a(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2 ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \right] \right].$$

Exemple 19 Soit l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{1}{2}\alpha dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t, \forall t \in (0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases}$$

1 On pose $Y_t = X_t \exp^{\alpha \frac{t}{2}}$, Ecrire dY_t .

2 En déduire la forme de la solution $X(t)$.

Solution

1

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{1}{2}\alpha dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t, \forall t \in (0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases}$$

où α et σ sont deux constantes avec,

- X_t processus stochastique.
- B_t mouvement brownien.
- t le temps.

On rappelle la formule d'Itô

$$dY_t = \frac{\partial Y}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial Y}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt^2.$$

On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2} X_t \exp(\alpha \frac{t}{2})$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \exp(\alpha \frac{t}{2})$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$. On applique la formule d'Itô sur la fonction Y_t , on obtient

$$dY_t = \frac{\alpha}{2} X_t \exp(\alpha \frac{t}{2}) dt + \exp(\alpha \frac{t}{2}). \quad (4.17)$$

En remplaçant dX_t par $-\frac{1}{2}\alpha dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t$ sur (4.17).

$$dY_t = \frac{\alpha}{2} X_t e^{\alpha \frac{t}{2}} dt + e^{\alpha \frac{t}{2}} \left[-\frac{1}{2}\alpha dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t \right].$$

Alors

$$dY_t = \frac{1}{2}\sigma dB_t.$$

Par l'intégrale, On obtient

$$\int_0^t dY_t = \int_0^t \frac{1}{2}\sigma dB_s.$$

Donc

$$Y_t - Y_0 = \frac{1}{2}\sigma B_t.$$

Alors

$$Y_t = Y_0 + \frac{1}{2}\sigma B_t. \quad (4.18)$$

En remplaçant Y_t par $X_t \exp(\alpha \frac{t}{2})$, sur (4.18) on obtient

$$X_t \exp(\alpha \frac{t}{2}) = Y_0 + \frac{1}{2}\sigma B_t.$$

telque $Y_0 = X_0 \exp(0) = X_0$.

Donc

$$X_t = \exp(-\alpha \frac{t}{2}) X_0 + \frac{1}{2} \exp(-\alpha \frac{t}{2}) \sigma B_t.$$

Exemple 20 En considérant l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = a(\theta - X_t)dt + dB_t, \forall t \in (0, T] \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases} \quad (4.19)$$

Où a et θ sont des constantes.

- 1 Ecrire dY_t .
- 2 En déduire la forme de la solution $X(t)$.
- 3 Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $Var(X_t)$.

Solution

- Posons la fonction d'Itô $Y_t := u(X_t, t) = X_t \exp(at)$.
- Avec

$$u(x, t) = x \exp(at).$$

- On rappelle la formule d'Itô pour la fonction

$$u(x, t), dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t)gtdt.$$

- On calcule les dérivées partielles, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = aX_t \exp(at), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \exp(at), \quad \text{et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

- Alors,

$$dY_t = aX_t \exp(at)dt + \exp(at)dX_t.$$

- En remplaçant dX_t par $a(\theta - X_t)dt + dB_t$.

$$dY_t = a\theta \exp(at)dt + \exp(at)dB_t.$$

- En effectuant une intégration, on obtient

$$\int_0^t dY_t = a\theta \int_0^t \exp(as)ds + \int_0^t \exp(as)dB_s.$$

- Donc,

$$Y_t - Y_0 = \theta(\exp(at) - 1) + \int_0^t \exp(as)dB_s.$$

- En remplaçant Y_t par $X_t \exp(at)$, on obtient

$$X_t \exp(at) = X_0 + \theta(\exp(at) - 1) + \int_0^t \exp(as)dB_s.$$

- Alors,

$$X_t = \left[X_0 + \theta(\exp(at) - 1) + \int_0^t \exp(as)dB_s \right] \exp(-at).$$

- Pour calculer l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[\left(X_0 + \theta(\exp(at) - 1) + \int_0^t \exp(as)dB_s\right)\exp(-at)\right].$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0 + (\exp(-at) + \theta(1 - \exp(-at)) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \exp(a(s-t))dB_s\right]).$$

- Mais l'espérance d'une intégrale stochastique est nul. Alors

$$\mathbb{E}(X_t) = \exp(-at)X_0 + \theta(1 - \exp(-at)).$$

- Et la variance

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left[\left(X_0 + \theta(\exp(at) - 1) + \int_0^t \exp(as)dB_s\right)\exp(-at)\right].$$

- On sait que la variance de la constante est nul, alors

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}\left[\int_0^t \exp(a(s-t))dB_s\right].$$

Exemple 21 Soit l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = bX_t dt + dB_t, \forall t \in (0, T) \\ X_t(0) = X_0 = x. \end{cases}$$

- 1 On pose $Y_t = \exp(-t)X_t$, Quelle est l'EDS vérifiée par Y_t .
- 2 Mettre Y_t sous forme $Y_t = y + \int_0^t f(s)dB_s$.
- 3 trouver la solution X_t .

Solution

- 1 On a la fonction d'Itô $u(X_t, t) = Y_t = \exp(-t)X_t$. On rappelle la formule d'Itô pour la fonction

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t)dt.$$

On calcule les dérivées partielles, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = aX_t \exp(-t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \exp(-t), \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Alors

$$dY_t = -\exp(-t)X_t dt + \exp(-t)dX_t.$$

On remplace dX_t par $bX_t dt + dB_t$:

$$dY_t = -\exp(-t)X_t dt + \exp(-t)[bX_t dt + dB_t]$$

Donc

$$dY_t = -\exp(-t)X_t dt + \exp(-t)bX_t dt + \exp(-t)dB_t$$

2 En effectuant une intégration, on obtient

$$\int_0^t dY_t = b + \int_0^t \exp(-s)dB_s.$$

Alors

$$Y_t - Y_0 = b + \int_0^t \exp(-s)dB_s.$$

On remplace Y_t par $\exp(-t)X_t$ Donc

$$X_t = x + b \exp -t + \int_0^t \exp t + s dB_s.$$

Exemple 22 Soit a, α, b, β quatre constantes réelles, soit $x \in \mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = (a + \alpha X_t)dt + (b + \beta X_t)dB_t \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (4.20)$$

1 Montrer que (4.20) admet une solution unique.

2 On note $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et $M(t) = \mathbb{E}(X_t^2)$.

- Montrer que $m(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} y' - \alpha y = a \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (4.21)$$

- Ecrire la formule d'Itô pour X_t^2 où X_t est solution de (4.20).
- En déduire que $M(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} y' - (2\alpha + \beta^2)y = 2(a + b\beta)m + b^2 \\ y(0) = x^2 \end{cases} \quad (4.22)$$

où m est la solution de (4.21). (On admettra que l'intégrale stochastique qui intervient est une martingale)

- résoudre (4.21) et (4.22)

Solution

1 L'équation a une solution unique car

$b(t, x) = a + \alpha x$ et $\sigma(t, x) = b + \beta x$ sont lipschitziennes et ont une croissance linéaire on a :

$$X_t = x + \int_0^t (a + \alpha X_s)ds + \int_0^t (b + \beta X_s)dB_s.$$

2 L'intégrale stochastique est une martingale car :

•

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (b + \beta X_s)dB_s\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t 2(b^2 + \beta^2 X_s^2)ds\right)$$

et la solution de l'équation vérifié

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s \leq t} X_s\right) \leq \infty.$$

D'où en $m(t) = x + \int_0^t (a + \alpha m(s)) ds$.

La fonction m est dérivable et vérifié $m'(t) = a + \alpha m(t)$. Compte tenu de la condition initiale $m(0) = x$, la solution est :

$$m(t) = \left(x + \frac{a}{\alpha}\right) \exp \alpha t - \frac{a}{\alpha}.$$

- La formule d'Itô conduit à

$$d(X_t^2) = 2X_t(a + \alpha X_t)dt + 2X_t(b + \beta X_t)dB_t + (b + \beta X_t)dX_t.$$

- En admettant que l'intégrale stochastique est une martingale et en posant $M(t) = \mathbb{E}(X_t^2)$

$$M(t) = x^2 + 2 \int_0^t (am(s) + \alpha M(s)) ds + \int_0^t (b^2 + \beta^2 + 2b\beta m(s)) ds.$$

•

$$\begin{cases} M'(t) - (2\alpha + \beta^2)M(t) = 2(a + b\beta)m(t) = b^2 \\ M(0) = x^2. \end{cases} \quad (4.23)$$

La solution est :

$$\begin{cases} M(t) = C \exp(2\alpha + \beta^2)t + k \exp \alpha t + c \\ k(-\alpha - \beta^2) = 2(a + b\beta)(x + \frac{a}{\alpha}) \\ c = (b^2 - 2(a + b\beta)\frac{a}{\alpha}) \frac{1}{2\alpha + \beta^2} \\ K + k + c = x^2. \end{cases} \quad (4.24)$$

Exemple 23 On considère l'équation

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t,$$

où $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des processus adaptés. Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire

- 1 Soit $\alpha(t) = \int_0^t a(s) ds$. Vérifier que $X_0 \exp(\alpha(t))$ est la solution de l'équation homogène, c-à-d avec $b = c = 0$.
- 2 Poser $Y_t = \exp \alpha(t) X_t$ et calculer dY_t à l'aide de la formule d'Itô.
- 3 En déduire Y_t puis X_t sous forme intégrale.
- 4 Résoudre l'EDS

$$dX_t = \frac{-1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t, X_0 = 0.$$

Solution

- 1 On a $dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t$ et $\alpha(t) = \int_0^t a(s) ds$ avec $b = c = 0$ Donc

$$dX_t = a(t)X_t dt$$

D'où

$$\frac{dX_t}{X_t} = a(t)dt$$

par l'intégrale

$$\int_0^t \frac{dX_t}{X_t} = \int_0^t a(t)dt.$$

Alors

$$\ln \frac{X_t}{X_0} = \alpha(t).$$

Donc la solution est :

$$X_t = X_0 \exp \alpha(t).$$

- 2 Pose $Y_t = \exp -\alpha(t)X_t$
La formule d'Itô :

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t)b_t dt$$

On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t} = -a(t)\exp -\alpha(t)X_t$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \exp -\alpha(t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
Donc

$$dY_t = -a(t)\exp -\alpha(t)X_t dt + \exp -\alpha(t)dX_t.$$

En replace dX_t par $a(t)X_t dt$

$$dY_t = -a(t)\exp -\alpha(t)X_t dt + \exp -\alpha(t)(a(t)X_t dt).$$

Alors

$$dY_t = \exp -\alpha(t)b(t)dt + \exp -\alpha(t)c(t)dB_t.$$

- 3 on a

$$dY_t = \exp -\alpha(t)b(t)dt + \exp -\alpha(t)c(t)dB_t.$$

Donc

$$\int_0^t dY_t = \int_0^t \exp -\alpha(s)b(s)ds + \int_0^t \exp -\alpha(s)c(s)dB_s.$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \exp -\alpha(s)b(s)ds + \int_0^t \exp -\alpha(s)c(s)dB_s.$$

et X_t

$$X_t = X_0 + \int_0^t \exp \alpha(t) - \alpha(s)b(s)ds + \int_0^t \exp \alpha(t) - \alpha(s)c(s)dB_s.$$

- 4 Dans ce cas, $\alpha(t) = -\log(1+t)$, donc
 $\exp \alpha(t) = (1+t)^{-1}$ et $X_t = \int_0^t \frac{1+s}{1+t} \frac{1}{1+s} dB_s = \frac{B_t}{1+t}$.

Application sur le modèle de Black-Scholes

Introduction

Les mathématiciens [6] ont longtemps tenté de résoudre les questions qu'il soulevait Le monde de l'argent. L'une des caractéristiques de ces questions - il suffit de penser à la bourse S'en convaincre - c'est qu'il fait émerger des dynamiques apparemment turbulentes et c'est Pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement adaptés à cette situation.

Louis Bachelier a proposé le premier modèle de développement des actifs financiers dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle porte le nom de modèle de Black et Scholes. En effet, en 1973 [?], Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle log-normal. Ils ont obtenu le prix Nobel d'économie en 1997 pour ces travaux ce qui n'a pas empêché, leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998. Il a été supposé que l'actif risqué est gaussien et peut donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à cet inconvénient, le modèle adopté plus tard est celui qui normalise le registre des actifs risqués, afin de s'assurer qu'il reste toujours positif. Ce modèle est appelé le modèle de Black et Scholes. En effet, en 1973 [?], Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes ont proposé l'idée de déterminer le prix du produit dérivé comme le prix de son portefeuille de couverture et l'ont appliqué à ce modèle logarithmique normal.

0.1 Hypothèses sur le marché

Quelques hypothèses de départ que le modèle prend en compte et que nous listerons ci-dessous :

- 1 Les actifs sont divisibles à l'infini .
- 2 Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant.
- 3 On peut emprunter et vendre à découvert.
- 4 Les échanges ont lieu sans coûts de transaction. probabilitiiee of nawal expononsall ok by
- 5 On peut emprunter et prêter au même taux constant r .

0.2 Modélisation probabiliste du marché

Pour modéliser l'incertitude sur le marché, nous considérons un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien standard B . Nous supposons que notre marché est constitué d'un actif sans risque S_0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$.

- **Actif sans risque** : Dans le modèle discret à n périodes, lorsque l'on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles de longueur $\frac{T}{n}$ que l'on considère un taux sans risque r_n de la forme $\frac{rT}{n}$, la valeur de l'actif sans risque à l'instant $\frac{pT}{n}$ a la forme suivante : $(1 + \frac{rT}{n})^p$. Donc, lorsque n tend vers l'infini, S_0 se comporte comme $\exp(rt)$. La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actif sans risque en temps continu est donc naturellement :

$$dS_0^t = rS_0^t dt \quad \text{et} \quad S_0^0 = 1 \Rightarrow S_0^t = \exp(rt), \quad t \in [0, T]$$

- **Actif risqué** : Il suit la dynamique donnée par l'EDS de Black & Scholes

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), & t \in [0, T], \\ S_0 = x. \end{cases} \quad (5.1)$$

où S_0, μ et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$ et $S_0 > 0$. Ce modèle est le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué en temps continu tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements de l'actif sont normaux. Les coefficients μ et σ sont respectivement appelés tendance et volatilité de l'actif S .

Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu \mathcal{F}_t représente l'information disponible à la date t , l'aléatoire provient seulement de S , donc

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_r, r \leq t)$$

La mesure de probabilité \mathbb{P} est alors appelée **probabilité historique**.

Pour s'assurer qu'un tel modèle est bien défini, il nous faut résoudre l'EDS de Black & Scholes.

Théorème 0.9

L'EDS (5.1) admet une unique solution qui est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \int_0^t B_s\right]$$

Démonstration :

On a l'équation de modèle de Black-Scholes est :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), & t \in [0, T], \\ S_0 = x. \end{cases}$$

où

- S_t est le prix de l'action sous-jacente,
- μ (constant) est le taux de dérive (en) du prix de l'action,
- σ (constante) est la volatilité du prix de l'action,
- B_t est un mouvement brownien.

Si $\sigma = 0$, alors nous sommes face à une équation différentielle ordinaire dont la solution est

$$S_t = S_0 \exp(\mu t)$$

On pose la fonction d'Itô $u(S_t, t) = Y_t = \ln S_t$

On rappelle la formule d'Itô

$$dY_t = \frac{\partial Y}{\partial t}(S_t, t)dt + \frac{\partial Y}{\partial x}(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(S_t, t)dS_t^2.$$

En calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{1}{S_t^2}.$$

Alors

$$dY_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} dS_t^2.$$

telque $dS_t^2 = S_t^2 \sigma^2 dt$.

Donc

$$dY_t = \frac{1}{S_t} dS_t + -\frac{1}{2S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt.$$

En remplace dS_t par $S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$, on obtient :

$$dY_t = \frac{1}{S_t} [S_t(\mu dt + \sigma dB_t)] - \frac{1}{2S_t^2} S_t^2 \sigma^2 dt.$$

D'où

$$dY_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t.$$

par intégration

$$\int_0^t Y_t = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Alors

$$Y_t - Y_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s.$$

En remplace Y_t par $\ln S_t$,

$$\ln S_t - \ln S_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s.$$

En utilise les propriétés de la fonction $\ln(x)$,

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Donc

$$\frac{S_t}{S_0} = \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] + \int_0^t \sigma dB_s.$$

D'où

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Donc la solution de l'équation (5.1) est

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] + \sigma \int_0^t dB_s.$$

est appelé brownien géométrique.

corollaire 3. • l'espérance de la solution S_t est :

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t].$$

• La variance de la solution S_t est :

$$Var\left(\int_0^t \sigma dB_s\right) = 0.$$

Démonstration

$$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}\left(S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \int_0^t \sigma dB_s\right]\right).$$

par l'inéairité d'espérance on a,

$$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}\left(S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right]\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^t \sigma dB_s\right).$$

On sait que l'espérance de l'intégrale stochastique est null, donc

$$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}\left(S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right]\right).$$

Alors

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right].$$

Et la variance est :

$$\text{Var}(S_t) = \text{Var}\left(S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dB_s\right]\right).$$

$$\text{Var}(S_t) = \mathbb{E}\left[S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dB_s\right]\right]^2 - \left[\mathbb{E}\left(S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dB_s\right]\right)\right]^2.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dB_s\right]\right]^2 = \mathbb{E}\left[S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \int_0^t dB_s\right]\right]$$

Et comme

$$\mathbb{E}\left[S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + 2\sigma \int_0^t dB_s\right]\right] = S_0^2 \mathbb{E}\left[\exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\right] \mathbb{E}\left[\exp\left[2\sigma \int_0^t dB_s\right]\right]$$

$$S_0^2 \mathbb{E}\left[\exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\right] \mathbb{E}\left[\exp\left[2\sigma \int_0^t dB_s\right]\right] = S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]$$

Car l'espérance de l'intégrale stochastique est null.

$$\left[\mathbb{E}\left(S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dB_s\right]\right)\right]^2 = \left[S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right]\right]^2.$$

$$\left[S_0 \exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right]\right]^2 = S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right].$$

Donc

$$\text{Var}(S_T) = S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] - S_0^2 \exp\left[2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right].$$

D'où

$$\text{Var}(S_T) = 0.$$

1

Simulation du modèle de Black-Scholes

1.1

Simulation de la solution de l'équation de Black-Scholes

Nous voulons simuler la solution de l'équation de Black-sholes (le mouvement brownien géométrique) :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \forall t \in [0, T] \\ S_0 = x. \end{cases}$$

Avec la solution explicite :

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right].$$

Le programme de simulation est le suivant :

```
1 %Programme:simulation du la trajectoire de la solution
2 %de l'equation de Black-Scholes
3 clear all;
4 clc;
5 rng('default')
6 %%%%Initialisation des parametres %%%
7 mu=1;
8 sigma=0.3;
9 S0=100;
10 T=1;
11 n=1000;
12 dt=T/n;
13 %%%%resultat%%%%%%%%%%
14 dW=sqrt(dt)*randn(1,n);
15 W=cumsum(dW);
16 St=S0*exp(mu-0/5*sigma^2)*([dt:dt:T]+sigma*W);
17 plot(0:dt:T,[S0,St],'b')
18 xlabel('t')
19 ylabel('s(t)')
```

La figure suivante représente la tajoctoire de la solution de l'équation de Black-Sholes pour $S_0 = 100$; $\mu = 1$; $\sigma = 0.3$ simulée par le code Matlab.

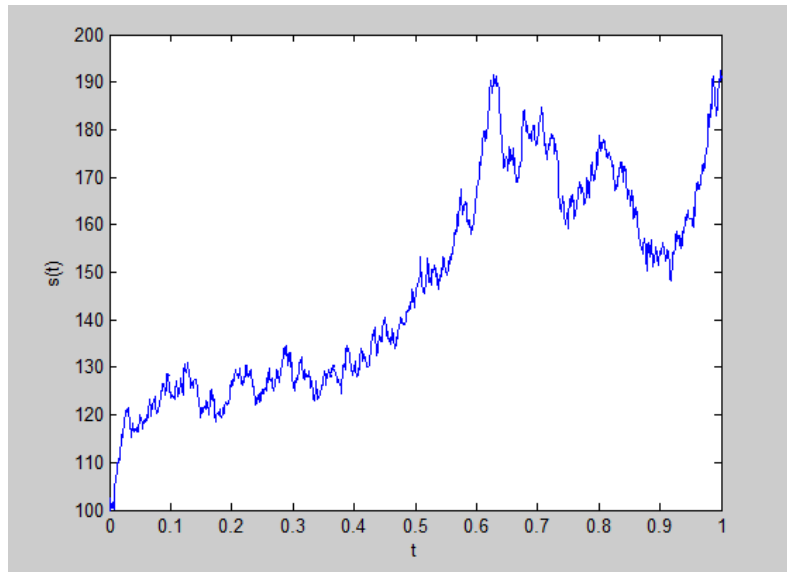


FIGURE 5.1 – Trajectoire de mouvement Brownien géométrique.

2 Simulation des options européennes

La formule de Black-Scholes sert à calculer la valeur théorique d'une option européenne à partir des cinq données suivantes :

- S_0 la valeur actuelle de l'action sous-jacente,
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années),
- K le prix d'exercice fixé par l'option,
- r le taux d'intérêt sans risque,
- σ la volatilité du prix de l'action.

Si les quatre premières données sont évidentes, la volatilité σ de l'actif est complexe à évaluer. Deux analystes pourront avoir une opinion différente sur la valeur de σ à choisir.

Le prix théorique d'une option d'achat, qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T , est caractérisé par son pay off : $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$

Il est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du pay off terminal actualisé

$$C = \mathbb{E}(\text{payoff} \times \exp(-rT)),$$

soit la formule de Black-Scholes :

$$C(S_0, Kr, t, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - k \exp(-rt) \mathcal{N}(d_2)$$

De même, le prix théorique d'une option de vente, de pay off $(K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$ est donné par :

$$P(S_0, Kr, t, \sigma) = -S_0 \mathcal{N}(-d_1) + k \exp(-rt) \mathcal{N}(-d_2)$$

avec

- \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}u^2} du$
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

option d'un call

La valeur d'une option d'achat pour une action sous-jacente ne versant pas de dividendes en termes de paramètres Black-Scholes est :

$$C(S_t, t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K \exp(-r(T-t)) \mathcal{N}(d_2).$$

Avec : d_1 et d_2 données précédemment $\mathcal{N}(\cdot)$ est la distribution cumulative de la loi normale.

option d'un put

Le prix d'une option de vente correspondante basée sur la parité put-call est :

$$P(S_0, Kr, t, \sigma) = -S_0 \mathcal{N}(-d_1) + K \exp(-rt) \mathcal{N}(-d_2)$$

On peut facilement obtenir le prix des options européennes en R en appliquant la formule de Black-Scholes.

Supposons que nous voulons calculer le prix de l'option d'achat et de vente avec :

- K : Le prix d'exercice est égal à 100
- r : Le taux annuel sans risque est de 2
- sigma : la volatilité σ est de 20
- T : le temps jusqu'à l'échéance en années est de 0,5
- S_0 : Le prix actuel est égal à 102

```
1 K = 100
2 r = 0.02
3 sigma = 0.2
4 T = 0.5
5 S0 = 102
6
7 # call option
8
9 d1 <- (log(S0/K) + (r + sigma^2/2) * T)/(sigma * sqrt(T))
10 d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)
11 phid1 <- pnorm(d1)
12 call_price <- S0 * phid1 - K * exp(-r * T) * pnorm(d2)
13
14 # put option
15 d1 <- (log(S0/K) + (r + sigma^2/2) * T)/(sigma * sqrt(T))
16 d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)
17 phimd1 <- pnorm(-d1)
18 put_price <- -S0 * phimd1 + K * exp(-r * T) * pnorm(-d2)
19
20 c(call_price, put_price)
21 [1] 7.288151 4.293135
```

Ainsi, le prix de l'option d'achat et de vente est respectivement de 7,288151 et 4,293135.

2.1 Tarification des options européennes avec la simulation de Monte Carlo simple

Étant donné que le prix actuel de l'actif au temps 0 est S_0 , alors le prix de l'actif au temps T peut être exprimé comme suit :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

où B_T suit la distribution normale avec une moyenne de 0 et une variance T. Le gain de l'option d'achat est $\max(ST - K, 0)$ et pour l'option de vente est $\max(K - ST)$.

```

1 # call put option monte carlo
2 call_put_mc<-function(nSim=1000000, tau, r, sigma, S0, K) {
3
4   Z <- rnorm(nSim, mean=0, sd=1)
5   WT <- sqrt(tau) * Z
6   ST = S0*exp((r - 0.5*sigma^2)*tau + sigma*WT)
7
8   # price and standard error of call option
9   simulated_call_payoffs <- exp(-r*tau)*pmax(ST-K,0)
10  price_call <- mean(simulated_call_payoffs)
11  sterr_call <- sd(simulated_call_payoffs)/sqrt(nSim)
12
13  # price and standard error of put option
14  simulated_put_payoffs <- exp(-r*tau)*pmax(K-ST,0)
15  price_put <- mean(simulated_put_payoffs)
16  sterr_put <- sd(simulated_put_payoffs)/sqrt(nSim)
17
18
19  output<-list(price_call=price_call, sterr_call=sterr_call,
20              price_put=price_put, sterr_put=sterr_put)
21  return(output)
22
23 }
24
25
26 set.seed(1)
27 results<-call_put_mc(n=1000000, tau=0.5, r=0.02, sigma=0.2, S0=102, K=100)
28
29 results

```

Et on obtient :

```

price_call
[1] 7.290738

sterr_call
[1] 0.01013476

price_put
[1] 4.294683

sterr_put
[1] 0.006700902

```

Comme on peut le voir, les prix estimés à partir de la simulation de Monte Carlo sont très proches de ceux obtenus à partir de la formule de Black-Scholes (7,290738 vs 7,288151 et 4,294683 vs 4,293135)

Tarifcation des options européennes avec méthode des antithétiques variables

La méthode des variables antithétiques tente de réduire la variance en introduisant une dépendance négative entre les paires de répétitions

Notez que la paire pour call sera :

$$(\exp(-rt)\max(S_{BT} - K, 0), \exp(-rt)\max(S_{-BT} - K, 0))$$

et le prix estimé sera la moyenne de la paire pour chaque étape de simulation.

```
1 antithetic_call_put_mc<-function(nSim, tau, r, sigma, S0, K) {
2
3   Z <- rnorm(nSim, mean=0, sd=1)
4
5   WT <- sqrt(tau) * Z
6   # ST1 and ST2 and the antithetic variates
7   ST1 = (S0*exp((r - 0.5*sigma^2)*tau + sigma*WT))
8   ST2 = (S0*exp((r - 0.5*sigma^2)*tau + sigma*(-WT)))
9
10  # call option price and standard error
11  simulated_call_payoffs1 <- exp(-r*tau)*pmax(ST1-K,0)
12  simulated_call_payoffs2 <- exp(-r*tau)*pmax(ST2-K,0)
13  # get the average
14  simulated_call_payoffs <- ( simulated_call_payoffs1 +
15  simulated_call_payoffs2)/2
16  price_call <- mean(simulated_call_payoffs)
17  sterr_call <- sd(simulated_call_payoffs)/sqrt(nSim)
18
19
20  # put option price and standard error
21  simulated_put_payoffs1 <- exp(-r*tau)*pmax(K-ST1,0)
22  simulated_put_payoffs2 <- exp(-r*tau)*pmax(K-ST2,0)
23  # get the average
24  simulated_put_payoffs <- (simulated_put_payoffs1+simulated_put_payoffs2)/2
25  price_put <- mean(simulated_put_payoffs)
26  sterr_put <- sd(simulated_put_payoffs)/sqrt(nSim)
27
28  output<-list(price_call=price_call, sterr_call=sterr_call,
29              price_put=price_put, sterr_put=sterr_put )
30  return(output)
31
32 }
33
34 set.seed(1)
35 results<-antithetic_call_put_mc(n=1000000, tau=0.5, r=0.02,
36 sigma=0.2, S0=102, K=100)
37
38 results
```

Et on obtient :

```
price_call
[1] 7.290193

sterr_call
[1] 0.004993403

price_put
[1] 4.294812

sterr_put
[1] 0.003636479
```

On voit que les prix estimés sont à nouveau très proches mais l'erreur type est beaucoup plus faible avec la méthode des variables antithétiques par rapport au Monte Carlo simple (0,004993403

vs 0,01013476 et 0,003636479 vs 0,006700902). nous pouvons relancer la simulation une demi-fois, juste à titre de comparaison.

```
set.seed(1)
results<-antithetic_call_put_mc(n=1000000/2, tau=0.5, r=0.02,
sigma=0.2, S0=102, K=100)
results
```

On obtient

```
price_call
[1] 7.28989

sterr_call
[1] 0.007057805

price_put
[1] 4.294863

sterr_put
[1] 0.005140888
```

Méthode d'échantillonnage d'importance

C'est l'idée de l'échantillonnage d'importance, c'est d'essayer de donner plus de poids à « l'important » afin d'augmenter l'efficacité de l'échantillonnage et par conséquent de réduire l'erreur type de la simulation. Nous allons changer la mesure en considérant la fonction identique $I[S_T > K]$ pour les options d'achat et $I[St]$

```
1 importance_call_put_mc<-function(nSim, tau, r, sigma, S0, K) {
2
3   Z <- rnorm(nSim, mean=0, sd=1)
4   WT <- sqrt(tau) * Z
5   ST = S0*exp((r - 0.5*sigma^2)*tau + sigma*WT)
6
7   # call option price and standard error
8   simulated_call_payoffs <- (exp(-r*tau)*pmax(ST-K,0))[ST>K]
9   price_call <- mean(simulated_call_payoffs*mean(ST>K))
10  sterr_call <- sd(simulated_call_payoffs*mean(ST>K))/sqrt(nSim)
11
12
13  # put option price and standard error
14  simulated_put_payoffs <- (exp(-r*tau)*pmax(K-ST,0))[ST<K]
15  price_put <- mean(simulated_put_payoffs*mean(ST<K))
16  sterr_put <- sd(simulated_put_payoffs*mean(ST<K))/sqrt(nSim)
17
18
19  output<-list(price_call=price_call, sterr_call=sterr_call,
20              price_put=price_put, sterr_put=sterr_put )
21  return(output)
22
23 }
24
25 set.seed(1)
26
27 importance_call_put_mc<-antithetic_call_put_mc
```

```
28 (n=1000000, tau=0.5, r=0.02, sigma=0.2, S0=102, K=100)
29
30 results
```

Et on obtient :

```
price_call
[1] 7.28989

sterr_call
[1] 0.007057805

price_put
[1] 4.294863

sterr_put
[1] 0.005140888
```

Encore une fois, nous voyons qu'en appliquant la technique d'échantillonnage d'importance, nous avons obtenu une estimation très proche du prix et une erreur type beaucoup plus faible par rapport à la simple méthode de Monte Carlo.

Discussion

Nous avons montré comment calculer explicitement le prix des options européennes en appliquant la formule de Black-Scholes et nous avons montré comment estimer les prix en appliquant la simulation de Monte Carlo. Enfin, nous avons fourni des exemples de techniques avancées de Monte Carlo telles que les variables antithétiques et l'échantillonnage d'importance qui ont pour résultat une simulation plus efficace avec une erreur standard plus faible.

3 Décision

Nous avons étudié ici le modèle classique de Black-Scholes pour le pricing des options européennes. De manière générale, ce modèle reste l'outil fondamental de l'ingénierie financière moderne. Cependant il présente beaucoup de faiblesses puisqu'il n'est pas conforme à la réalité, en effet le temps n'est pas continu et il peut y avoir des coûts de transaction supplémentaires suites aux échanges économiques. La volatilité n'est pas observable dans le marché donc on ne peut pas l'estimer juste avec une constante. Par conséquent, de nombreux modèles ont été proposés au fil du temps, tous tentent d'inclure les caractéristiques du marché «réel».

Conclusion

Dans ce travail, nous avons commencé en prélude à l'arithmétique des probabilités et ses caractéristiques générales, puis nous sommes passés à l'arithmétique différentielle, où nous avons mis en lumière les équations différentielles ordinaires, leurs formes et les méthodes pour les résoudre. Enfin et surtout, Nous nous sommes concentrés sur les équations différentielles stochastiques, leurs types et leurs solutions en détails, puis nous avons terminé ce travail en appliquant le modèle Black-Scholes et la simulation avec le programme R en finance.

Bibliographie

- [1] Mao, X. "Stochastic differential equations and applications". Elsevier, 2007 Dec .
- [2] Velenik. Y. "Probabilités et Statistique", université de Genève (2011).
- [3] Evans, L.C. "An introduction to stochastic differential equations version 1.2." Lecture Notes, UC Berkeley (2006).
- [4] Oksendal. B. "Stochastic differential equations : an introduction with applications". Springer Science et Business Media, 2013.
- [5] IREM de Lyon. A. Perrut. Cours de probabilités et statistiques, Département de mathématiques, Stage ATSM - Août 2010, Anne.Perrut-univ-lyon1.fr
- [6] Philippe Briand, Le modèle de Black-Scholes , Mars 2003
- [7] R Durrett, Probability : theory and examples, Duxbury Press, Belmont, CA 1996.
- [8] BRIAND, P. (Mars 2003). Le modèle de Black & Scholes.
- [9] Cours de probabilités-MDI 104. P. Bianchi, T. Banald, L. Decreusefond 31 août 2021.
- [10] Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Damien LAMBERTON Bernard LAPEYRE, ISBN 978-2-7298-71987, Ellipses, édition Marketing S.A, 2012.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons traité le sujet des équations différentielles stochastiques et leurs applications. Premièrement, on a rappelé quelques outils sur : théorie des probabilités, calcul stochastique, équation différentielle ordinaires. Deuxièmement, on a traité le cas où l'EDS est linéaire (l'existence et l'unicité). Finalement on a donné une application réelle sur les EDS linéaire de type Black-Scholes et on a essayé interpréter les résultats.

Mots clés :- Stochastique, equation différentielle stochastique, Black-Scholes.

Abstract

In this thesis, we have dealt with the subject of stochastic differential equations and their apps. First, we recalled some tools on : probability theory, stochastic calculus, ordinary differential equation. Second, we have treated the case where the EDS is linear (existence and uniqueness). Finally we gave a real application on the linear EDS of the Black-Scholes type and we tried to interpret the results.

Keywords :- Stochastic, stochastic differential equation, Black-Scholes.

المخلص

في هذه المذكرة، تناولنا موضوع المعادلات التفاضلية العشوائية ومعادلاتها تطبيقاتاً أولاً ، تذكرنا بعض الأدوات حول : نظرية الاحتمالات ، حساب التفاضل والتكامل العشوائي ، المعادلة التفاضلية العادية. ثانياً ، لقد تعاملنا مع الحالة التي تكون فيه المعادلة التفاضلية العشوائية خطي (الوجود و التفرد) . أخيراً ، قدمنا تطبيقاً حقيقياً على المعادلة التفاضلية العشوائية الخطي لنوع بلاكسكول وحاولنا تفسير النتائج.

الكلمات المفتاحية : العشوائية ، المعادلة التفاضلية العشوائية ، بلاك سكولز.