



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

Ministère de L'Enseignement Supérieur Et de La Recherche  
Scientifique

Centre universitaire Salhi Ahmed -Naàma-  
Institut des Sciences et technologies

Département de Mathématiques et Informatique



*Mémoire*

Présenté pour obtenir le diplôme de  
*Master En Mathématiques*

Spécialité : *Analyse fonctionnelle et EDPs*

Filière : *Mathématiques*

Par l'étudiant : *Belfekih Chahrazad*

*Thème :*

***Résolution numérique des  
équations aux dérivées  
partielles***

*Soutenu publiquement le : 10/06/2018*

*Devant le jury composé :*

Mr. Mekki Slimaine	Pr.	C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-	Encadreur
Mr. Kennouza Djamel	Pr.	C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-	Président
Mr. Belabed Zakaria	Pr.	C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-	Examineur

Année universitaire : 2017/2018

## *Remmercien*

Louange à Dieu qui ma donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire pour accomplir ce travail et surmonter l'ensemble des difficultés.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

Je tiens à remercier vivement, Mon encadreur Professeur

**\*Mr. Makki Slimaine\*** pour ces conseils et son suivi durant la réalisation de mon projet, et à **\*Mr. Ibrahim Taibi\*** et **\*Mr. Belabed Zakaria\*** pour m'aider pour le succès de ce travail, et merci spécial au professeur **\*Mr. Kennouza Djamel\*** ce qui était bien voulu faire partie du jury.

Nous souhaitant adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences et technologies des Maths et Informatiques, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Enfin, mes pensées vont à mes frères et ma soeur, qui m'ont toujours soutenu et encouragé, ainsi que je remercie aussi les personnes ( mes enseignantes et mes collègues) qui m'ont aidé et encouragé le long de ce travail

## *DEDICACE*

Ce travail est particulièrement dédié à :  
Mes parents, tout spécialement ma très chère mère  
et mon père.  
Mes frères et ma soeur.  
Toute ma famille.  
Tous mes amis, et à tous ceux qui aiment l'humanité  
qui en ce monde on se prive davantage.

**"C'est par la logique que nous prou-  
vons, c'est par l'intuition que nous  
inventons"**

# Sommaire

Table des figures	1
Introduction	2
<b>1 Quelques notions sur les équations aux dérivées partielles</b>	<b>3</b>
1.1 Généralisation	3
1.1.1 Notation	3
1.1.1.1 Dérivées partielles du premier ordre.	3
1.1.1.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur.	3
1.1.1.3 Dérivées totales.	3
1.1.2 Concepts de base et définitions	4
1.1.3 Classification des EDPs	6
1.2 Exemples	7
1.3 Équations aux dérivées partielles du premier ordre	7
1.4 Équations aux dérivées partielles du 2 <sup>ème</sup> ordre	11
1.5 Formulation variationnelle des EDPs	13
1.5.1 Quelques définitions	13
1.5.2 Le principe	13
1.5.3 Application	14
<b>2 Méthode Différences finies.</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction	18
2.2 Le développement limité de Taylor	18
2.3 La méthode des différences finies	18
2.3.1 Expression des dérivées premières par la méthode des différences finies	19
2.3.2 Expression des dérivées secondes par la méthode des différences finies	19
2.3.3 Expression des dérivées d'ordre supérieur par la méthode des différences finies	20
2.3.4 Expression des dérivées croisées par la méthode des différences finies	21

2.4	Résolution un EDP elliptique par la méthode des différences finies . . . . .	21
2.4.1	Le Problème de Dirichlet . . . . .	24
2.5	Résolution un EDP parabolique . . . . .	25
2.6	Résolution un EDP hyperbolique . . . . .	29
2.6.1	Les méthode de résolution . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Méthode volumes finis.</b>	<b>32</b>
3.1	volumes finis pour les problèmes de diffusion stationnaires . .	32
3.1.1	Cas de la dimension 1 . . . . .	32
3.2	Cas de la dimension 2 ou 3 . . . . .	33
3.3	Schéma volumes finis pour un problème elliptique en une dimension d'espace . . . . .	36
3.3.1	Schéma volumes finis . . . . .	36
3.3.2	Analyse mathématique du schéma . . . . .	37
	<b>application numérique</b>	<b>41</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>
	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	<b>45</b>

---

# Table des figures

2.1	Shémat DF de l'équation de Laplace . . . . .	23
2.2	Schéma DF de Laplace au conditon de Neumann . . . . .	24
2.3	Schéma explicite pour résoudre EDP parabolique . . . . .	26
2.4	Schéma implicite puor résoudre EDP parabolique . . . . .	27
2.5	le schéma numérique de Crank - Nicolson. . . . .	29
3.1	Exemple de volumes de contrôle pour la méthode des volumes finis en deux dimensions d'espace . . . . .	35
3.2	L'organigramme de résolution . . . . .	42
3.3	Programe de résolution en MatLab . . . . .	43

# Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines de physique, qui comprennent les problèmes de diffusion, les phénomènes de propagation. Ces équations différentielles n'ont généralement pas de solutions analytiques et une résolution numérique de ces équations est alors nécessaire.

Une équation aux dérivées partielles est une relation liant une fonction de  $n$  variables à ses dérivées partielles  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . L'ordre de l'équation est donné par l'ordre le plus élevé des dérivées partielles apparaissant dans l'équation.

Il s'agit ensuite de proposer des méthodes efficaces pour résoudre des *EDPs*, avec une précision relativement acceptable et suffisante, le problème posé. La résolution dite numérique, est généralement fournie des solutions approchées ou approximations basées sur la simplification du problème étudié. Notons que les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe une infinité des méthodes de discrétisation d'une équation. Nous ne pouvons jamais les énumérer toutes mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont :

1. la méthode de différences finies,
2. la méthode de volumes finies,
3. la méthode d'éléments finies,
4. la méthode des caractéristiques.

Mais dans cet mémoire, nous intéressons d'expliquer les deux méthodes (différences finies et volumes finies) après de donner quelques notions sur les équations aux dérivées partielles qui soit une rentrer à notre mémoire.

# Chapitre 1

## Quelque notions sur les équations aux dérivées partielles

### 1.1 Généralisation

#### 1.1.1 Notation

##### 1.1.1.1 Dérivées partielles du premier ordre.

Soit  $u \in C^1(\Omega)$ . On utilisera les notations suivantes pour la dérivée partielle de  $u$  en  $x \in \Omega$ .

Comme  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on note.

$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ ,  $\partial_{x_i} u(x)$ ,  $\partial_i u(x)$  ou  $u_{x_i}(x)$  la dérivée partielle de  $u$  par rapport à la composante  $x_i$ , où  $i = 1, 2, \dots, n$ .

##### 1.1.1.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Pour les dérivées partielles d'ordre supérieure d'une fonction  $u \in C^k(\Omega)$  on utilisera les multi-indices. Un multi-indice est un élément  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Pour tout multi-indice  $\alpha$  on définit

$$D^\alpha u(x) := \partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq K$  est la longueur de  $\alpha$

##### 1.1.1.3 Dérivées totales.

La dérivée totale ou simplement la dérivée d'une fonction  $u \in C^1(\Omega)$  en un point  $x \in \Omega$  est notée  $Du(x)$  Par définition, la dérivée totale est

une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Cette application linéaire peut être identifiée à un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  qu'on appelle aussi le gradient de  $u$  en  $x$ , noté  $\nabla u(x)$ . On a

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n}$$

### 1.1.2 Concepts de base et définitions

**Définition 1.1.1.** Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue  $u$  définie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , les variables  $x, y, \dots$ , avec ses dérivées partielles  $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$ . Donnent une écriture de façon générale de l'équation différentielle :

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) est considérée dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles (1.1) sont les fonctions qui vérifient cette équation dans  $\Omega$

**Exemples :**

$$u^2 u_{xy} + u_x = y \quad (1.2)$$

$$u_{xx} + 2y^2 u_{xy} + 3x u_{yy} = 1 \quad (1.3)$$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1 \quad (1.4)$$

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (1.5)$$

Les équations  $u(x, y) = (x + y)^3$  et  $u(x, y) = \sin(x - y)$  sont toutes les deux des solutions de (1.5)

**Définition 1.1.2.** L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.

**Exemples :**

\* Les équations (1.2), (1.3), (1.5) sont d'ordre 2.

\* L'équation (1.4) est d'ordre 1.

**Définition 1.1.3.** Une EDP est linéaire si l'équation est linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue  $u$ .

**Exemples :**

\* Les équations (1.3), (1.5) sont linéaires.

\* L'équation (1.2), (1.4) sont non linéaires.

**Définition 1.1.4.** Une équation aux dérivées partielles quasilineaire est lineaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction  $u$ .

**Exemples :**

\* L'équation (1.2) est quasilineaire.

**Définition 1.1.5.** Une équation aux dérivées partielles lineaire homogene est verifiee pour  $u = 0$  (si elle est ecrite de facon usuelle, le second membre, ne contenant ni  $u$  ni ses dérivées partielles, est identiquement nul).

**Exemples :**

\* L'équation (1.5) est lineaire et homogene.

On étudiera essentiellement les équations aux dérivées partielles lineaires du second ordre car ce sont les équations les plus fréquemment rencontrées dans les problèmes de la physique mathématique.

On sait bien que la solution générale d'une équation différentielle lineaire d'ordre  $n$  dépend de  $n$  constantes arbitraires. Dans le cas des équations aux dérivées partielles lineaires d'ordre  $n$  on a la propriété suivante :

**Théorème 1.** [1] *La solution générale d'une équation différentielle lineaire d'ordre  $n$  dépend lineairement de  $n$  fonctions arbitraires.*

Considérons par exemple, l'équation lineaire homogene

$$u_{xy} = 0 \tag{1.6}$$

En intégrant par rapport à  $y$ , on obtient :

$$u_x(x, y) = f(x) \tag{1.7}$$

En intégrant ensuite par rapport à  $x$  et en notant  $g$  est une primitive de la fonction arbitraire  $f$ , on obtient :

$$u(x, y) = g(x) + h(y) \tag{1.8}$$

Les fonctions  $g$  et  $h$  sont deux fonctions quelconques.

En pratique, parmi toutes les solutions possibles, on en cherche une qui vérifie des conditions supplémentaires.

Dans les problèmes issus de la physique, ces conditions sont, en général, imposées sur le bord du domaine  $\Omega$  et s'appellent **conditions aux bords**. On utilise aussi le terme de **conditions aux limites**.

### 1.1.3 Classification des EDPs

On distingue trois grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

1. Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson donnée par

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x)$$

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée.

L'inconnue est la fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

2. Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \Delta T(x, t) = 0$$

Pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , et  $t > 0$ . L'inconnue est la fonction  $T : \Omega \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

3. Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont :
  - l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ , tout  $t > 0$  et où  $a \in \mathbb{R}$

- l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ , tout  $t > 0$

Pourquoi les appellations elliptique, parabolique et hyperbolique ?

Au départ, elles proviennent du fait que si l'on considère une E.D.P. exactement d'ordre 2 (c'est à dire faisant intervenir des dérivées partielles d'ordre 2 et 1) à coefficients constants, du type

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda(x, y)u = \varphi(x, y)$$

avec A, B, C, D, E et  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  donnés. Alors cette E.D.P. se fait avec la manière suivante :

$$\Delta = B^2 + 4AC$$

si :

$\Delta < 0 \rightarrow$  EDP elliptique,

$\Delta = 0 \rightarrow$  EDP parabolique,

$\Delta > 0 \rightarrow$  EDP hyperbolique.

## 1.2 Exemples

**Exemple 1.2.1.** *l'équation de Laplace :*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

**Exemple 1.2.2.** *l'équation de Poisson :*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

**Exemple 1.2.3.** *l'équation de la Chaleur :*

$$\begin{cases} u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in \Omega \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

**Exemple 1.2.4.** *l'équation des Ondes :*

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = g(x), & x \in \Omega \\ u_t(0, x) = h(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

## 1.3 Équations aux dérivées partielles du premier ordre

**Définition 1.3.1.** Une équation dans laquelle figure une fonction  $f$  de plusieurs variables indépendantes  $x_1, \dots, x_n$  et des dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre de  $f$  par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme

$$F\left(x_1, \dots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\right)$$

est dite une équation aux dérivées partielles (en abrégé : *EDP*) du 1<sup>er</sup> ordre. Toute fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci

Dans le cas de deux variables  $x, y$ , on a :

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$$

**Exemple 1.3.1.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff f(x, y) = \varphi(y)$$

**Exemple 1.3.2.**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff f(x, y) = \varphi(x)$$

**Exemple 1.3.3.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x)$$

Si  $g$  est intégrable et  $G$  est l'une de ses primitives, alors  $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - G(x)) = 0$ , d'où  $f(x, y) = G(x) + \varphi(y)$ .

**Remarque 1.3.1.** *La solution générale d'une équation aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre dépend d'une fonction arbitraire.*

Soit le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

de solution générale

$$y_1 = f_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, y_n = f_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n) :$$

Si ces équations peuvent être résolues par rapport à  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ \Phi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= c_n \end{aligned}$$

Les fonctions  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  constantes si l'on remplace  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , par les solutions du système sont dites intégrales premières du système. En général, on appelle intégrale première d'un système différentiel toute fonction de  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  qui se réduit à une constante si l'on remplace  $y_1, y_2, \dots, y_n$  par une solution du système. Si  $\Phi$  est une telle intégrale première, on a donc

$$\Phi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \text{constante}$$

Si le système différentiel :

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

admet  $n$  intégrales premières indépendantes, alors la solution générale est définie implicitement en égalant ces intégrales premières à  $n$  constantes arbitraires.

Soit le système différentiel :

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z)$$

,

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction  $\Phi$  soit une intégrale première de ce système est

$$\Phi(x, y(x), z(x)) = \text{constante}$$

donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

ou encore

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot f_1(x, y, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot f_2(x, y, z) = 0$$

c'est l'équation aux dérivées partielles associée au système différentiel. Par conséquent, on a

**proposition 1.3.1.** [1] Une fonction  $\Phi(x, y, z)$  est une intégrale première d'un système différentiel si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles associée.

**Définition 1.3.2.** Soit  $f$  une fonction de deux variables. Une équation aux dérivées partielles linéaire du 1<sup>er</sup> ordre est une relation de la forme

$$P(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} = R(x, y, z)$$

où  $P, Q, R$  sont des fonctions de  $x, y, z$  définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $z = f(x, y)$  une solution de l'équation précédente. Posons

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y) - z$$

. On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -1$$

L'équation précédente s'écrit

$$P(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = R(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être considérée d'après ce qui précède, comme associée au système différentiel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)}$$

,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)}$$

ou sous forme plus symétrique

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

Ce système est appelé système caractéristique de l'équation aux dérivées partielles. Dès lors, on a

**proposition 1.3.2.** [1] *Les solutions de l'équation aux dérivées partielles :*

$$P(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} = R(x, y, z)$$

sont définies par

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

où  $\Phi$  représente l'intégrale première la plus générale du système caractéristique :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

**Remarque 1.3.2.** *Comme  $\Phi$  s'exprime au moyen de deux intégrales premières indépendantes  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  donc l'intégration de l'équation aux dérivées partielles se trouve ramenée à la recherche de deux intégrales premières de son système caractéristique.*

## 1.4 Équations aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre

**Définition 1.4.1.** Soit  $f$  une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ . On appelle équation aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre, une relation de la forme

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\right)$$

**Exemple 1.4.1.**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = g(y)$$

d'où

$$f(x, y) = xg(y) + h(y)$$

où  $g$  et  $h$  sont des fonctions arbitraires.

**Remarque 1.4.1.** La solution d'une équation aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre dépend de deux fonctions arbitraires.

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad (1.9)$$

où  $z = f(x, y)$  est la fonction inconnue et  $a, b, c, F$  sont des fonctions données dans un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ . On cherche une solution  $z$  de l'équation ci-dessus en supposant que la valeur de  $z$  sur une courbe ainsi que celle de ses dérivées  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  sont connues. Autrement dit, (PROBLÈME DE CAUCHY) on cherche une solution  $z$  de cette équation connaissant  $z$  et la dérivée normale  $\frac{\partial z}{\partial n}$  (c-à-d., le produit scalaire du gradient de  $z$  par le vecteur normal unitaire). Une caractéristique pour l'équation ci-dessus est une courbe dans  $D$  satisfaisant à l'équation différentielle :

$$a \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 2b \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) + c = 0 \quad (1.10)$$

L'équation (1.9) est dite du type :

- (i) hyperbolique dans  $D$  si en tout point de  $D$ ,  $b^2 - ac > 0$ . Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (1.10) localement ce qui montre que par tout point passent deux caractéristiques réelles. On montre que la transformation

$$\xi = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + y$$

$$\eta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}x + y$$

où  $a \neq 0$ , ramène l'équation (1.9) à une équation du type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

**Exemple 1.4.2.** *L'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

où  $z(x, t)$  est le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . C'est une équation hyperbolique ( $a = 1, b = 0, c = -k^2$ ). Elle se généralise à trois dimensions spatiales en l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(ii) parabolique si  $b^2 - ac = 0$ . Dans ce cas, les deux caractéristiques sont confondues. Supposons que  $a \neq 0$  et posons

$$\xi = \frac{b}{a}x + y$$

,

$$\eta = -\frac{b}{a}x + y$$

L'équation (1.9) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

et s'appelle forme canonique de type parabolique.

**Exemple 1.4.3.** *L'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

où  $t$  est le temps,  $z$  est la température d'un corps et  $\alpha$  une constante. C'est une équation parabolique ( $a = \alpha^2, b = c = 0$ ).

(iii) elliptique si  $b^2 - ac < 0$ . Dans ce cas, les caractéristiques sont imaginaires. Si  $a \neq 0$ , la transformation

$$\xi = -\frac{b}{a}x + y$$

,

$$\eta = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}x$$

## 1.5 Formulation variationnelle des EDPs

Dans cette section on va chercher l'existence et la solution unique du problème aux limite suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

### 1.5.1 Quelques définition

1.  $H^1(\Omega)$  est un espaces de Sobolev. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $H^1(\Omega)$  comme :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ pour } i = 1, \dots, n \right\}$$

2. On appelle  $H_0^1(\Omega)$  l'adhérence de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  , ce qu'on note aussi :  $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ .
3.  $C_c^\infty(\Omega)$  est un espace des fonction tests à support compact inclus dans  $\Omega$ .

### 1.5.2 Le principe

Le principe de l'approche (Méthode) variationnelle pour la résolution des EDPs est de remplacer l'équation par une formulation équivalente dite **variationnelle** obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque dite **fonction teste**. Comme est les nécessaire du procède à des intégrations par partie dans l'établissement de formulation variationnelle, nous commençons par donner quelque resultat essentielle

**Formule de Green :** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord (ou la frontière) est noté  $\partial\Omega$ . On suppose aussi que  $\Omega$  est un ouvert **régulière** de classe  $C^1$  ,  $u \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  et  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot v(x)ds$$

où  $\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \text{grad } u$ , est la dérivée normale de  $u$  sur  $\partial\Omega$  , c-à-d.,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = n(x) \cdot \nabla u(x), \quad x \in \partial\Omega$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions aux problèmes (1.11), on utilise le théorème de **Lax-Milgram** suivant :

**Théorème 2.** [2] Soit  $\mathbf{E}$  un espace de Hilbert réel et  $a : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ , une forme bilinéaire continue, c-à-d.,

$$\exists M > 0, \forall u, v \in \mathbf{E}, |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|,$$

et coercive, c-à-d.,

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in \mathbf{E}, |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2,$$

Si  $l : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire continue c-à-d.,  $v \longmapsto l(v)$  est linéaire et  $\exists C > 0, \forall v \in \mathbf{E}, |l(v)| \leq C \|v\|$ , alors la formulation variationnelle :

$$\text{trouver } u \in \mathbf{E} \text{ tel que } \forall v \in \mathbf{E}, a(u, v) = l(v)$$

admet une solution unique dans  $\mathbf{E}$ . En outre, cette solution dépend continûment de la forme linéaire  $l$ .

Par ailleurs, lorsque les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites et si en outre la forme bilinéaire  $a$  est symétrique ( $a(u; v) = a(v; u)$ ), alors  $u$  est l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\text{trouver } u \in \mathbf{E} \text{ tel que } J(u) \leq J(v),$$

où  $J$  est définie pour  $v \in \mathbf{E}$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v).$$

La solution  $u$  est caractérisée par

$$J(u) = \min_{v \in \mathbf{E}} J(v).$$

Réciproquement, si  $u \in \mathbf{E}$  est un point de minimum de  $J(v)$ , alors  $u$  est l'unique solution de la formulation variationnelle ci-dessus.

### 1.5.3 Application

#### **Problèmes de Dirichlet**

Etant donné un ouvert  $\Omega$  borné de classe  $\mathcal{C}^1$ , de frontière  $\partial\Omega$ , on cherche

une solution au problème de Dirichlet avec conditions aux limites homogènes,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  une fonction donnée.

1<sup>ère</sup> étape : Construction la formulation variationnelle

On utilisons la formule de Green ; on multiplie l'équation  $-\Delta u = f$  par une fonction test ( $v$ ) et on intègre sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Puis on effectue une intégration par parties (formule de Green), ce calcul est formel pour le moment et sera justifié ci-dessous,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\Omega} f v dx$$

où  $ds$  est la mesure superficielle du bord  $\partial\Omega$ . On souhaite que  $u$  et  $v$  soient dans un même espace de Hilbert  $\mathbf{E}$  et que  $v = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$ , d'où

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Une condition suffisante pour que  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$  ait un sens est  $\nabla u, \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  il suffit de considérer composante par composante. Par hypothèse,  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  donc pour que  $\int_{\Omega} f v dx$  ait un sens, il suffit que  $v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . L'idée est de choisir l'espace  $\mathbf{E} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et celui-ci va en outre nous permettre de faire disparaître l'intégrale sur le bord ci-dessus. Dès lors, la formulation variationnelle de ce problème est

$$\text{trouver } u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (1.13)$$

2<sup>ème</sup> étapes :

Pour montrer que cette formulation variationnelle admet une solution unique, on applique le théorème de Lax-Milgram avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

\* l'espace  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  est de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

\*  $a$  est une forme bilinéaire sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

\* La continuité de  $a$  résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

\*  $a$  est coercive. En effet

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante  $C > 0$  tel que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

c-à-d.,

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Comme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \leq (C_1 + 1) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

alors il existe une constante  $C = \frac{1}{1+C_1}$  tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

\*  $l$  est linéaire sur  $H_0^1(\Omega)$  et sa continuité résulte aussi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \int_{\Omega} |f| |v| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Puisque  $H_0^1 \hookrightarrow (inject)L^2(\Omega)$ , on a :

$$\|v\|_{L^2} \leq C_1 \|v\|_{H_0^1} \quad \text{avec } C_1 > 0$$

Alors

$$|l(v)| \leq C_1 \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$$

D'ou :

$$|l(v)| \leq C \|v\|_{H_0^1}$$

\*  $a$  est symétrique :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx \\ &= a(v, u) \end{aligned}$$

Par le théorème Lax-Milgram, il existe une solution unique  $u$  de pb (1.11), et de plus, on a (grâce la symétrie de  $a$ )

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1} J(v)$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 dx - \int f v dx$$

## Chapitre 2

# Méthode Différences finies.

### 2.1 Introduction

La méthode des différences finies est une méthode d'approximation des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles. Sa formulation est basée sur le calcul approché de fonctions dérivées apparaissant dans les équations différentielles. Comme les fonctions dérivées sont exprimées par le développement limité de Taylor, la méthode des différences finies est développée à partir de cette formule. La méthode trouve son champ d'application principalement dans la résolution des différents types d'équations de type elliptique, parabolique et hyperbolique et qui constituent l'objet de ce chapitre.

### 2.2 Le développement limité de Taylor

La série de Taylor est basée sur le résultat mathématique suivant : toute fonction  $u(x)$  peut être exprimée à l'aide d'un polynôme ayant un nombre infini de termes. C'est le développement en série de cette fonction autour d'un point connu  $x_0$  voisin de  $x$  :

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0)u'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}u''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}u^{(n)}(x_0) + \theta((x - x_0)^n).$$

### 2.3 La méthode des différences finies

Soit  $u(x)$  une fonction continue et dérivable de classe  $C^\infty$ , Par définition de la dérivée de  $u$ , on a :

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Si  $\Delta x$  est petit, le développement de Taylor de  $u(x + \Delta x)$  donne :

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \frac{\Delta x^3}{6} u'''(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} u^{(n)}(x) + \theta(\Delta x).$$

### 2.3.1 Expression des dérivées premières par la méthode des différences finies

#### a) différences finies en avant :

Le développement de Taylor de  $u(x + \Delta x)$  donne comme suite :  
 $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \theta(\Delta x)$  Alors

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

#### b) différences finies en arrière :

Le développement de Taylor  $u(x - \Delta x)$ , donne :  
 $u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x u'(x) + \theta(\Delta x)$

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

#### c) différences finies centré :

La somme de ces deux schémas présidantes, nous donne le schéma centré suivant :

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

### 2.3.2 Expression des dérivées secondes par la méthode des différences finies

Les schémas aux différences finies de seconde ordre peuvent être construits en manipulant des développement de Taylor

#### a) Différences finies centrée :

On pose :  $x - \Delta x, x, x + \Delta x$

Le développement de Taylor pour  $x - \Delta x$  et  $x + \Delta x$  est

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \theta(\Delta x^2) \dots \dots \dots (1)$$

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \theta(\Delta x^2) \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) + (2) \implies u(x - \Delta x) + u(x + \Delta x) = 2u(x) + \Delta x^2 u''(x) + \theta(\Delta x^2)$$

$$\implies u''(x) = \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

b) *Différences finies en avant :*

pour  $x, x + \Delta x, x + 2\Delta x$

Le développement de Taylor est écrit :

$$u(x+2\Delta x) = u(x) + 2\Delta x u'(x) + 2\Delta x^2 u''(x) + \dots + \frac{2\Delta x^n}{n!} u^{(n)}(x) \dots \dots (3)$$

$$(2) \times -2 + (3) \implies u(x+2\Delta x) - 2u(x+\Delta x) = -u(x) + \Delta x^2 u''(x) + \theta(\Delta x^2)$$

$$u''(x) = \frac{u(x + 2\Delta x) - 2u(x + \Delta x) + u(x)}{\Delta x^2}$$

c) *Différences finies en arrière :*

pour  $x - \Delta x, x - 2\Delta x$

On considère le développement de Taylor :

$$u''(x) = \frac{u(x) - 2u(x - \Delta x) + u(x - 2\Delta x)}{\Delta x^2} + \theta(\Delta x^2)$$

### 2.3.3 Expression des dérivées d'ordre supérieur par la méthode des différences finies

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de  $x$ . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première :

Pour  $x + \Delta x, x - \Delta x, x + 2\Delta x$

$$1) u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \frac{\Delta x^3}{6} u'''(x) + \theta(\Delta x^3)$$

$$2) u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) - \frac{\Delta x^3}{6} u'''(x) + \theta(\Delta x^3)$$

$$3) u(x + 2\Delta x) = u(x) + 2\Delta x u'(x) + \frac{4\Delta x^2}{2} u''(x) + \frac{8\Delta x^3}{6} u'''(x) + \theta(\Delta x^3)$$

$\implies$

$$u'(x) = \frac{-u(x + 2\Delta x) + 6u(x + \Delta x) - 3u(x) - 2u(x - \Delta x)}{6\Delta x} + \theta(\Delta x^3)$$

### 2.3.4 Expression des dérivées croisées par la méthode des différences finies

Déterminons une approximation de la dérivée croisée  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  de la fonction  $u(x, y)$ .

La principe est toujours basé sur les développements de Taylor :

$$1) \quad \begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) = & u(x, y) + \Delta x u'(x) + \Delta y u'(y) + \\ & \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \frac{\Delta y^2}{2} u''(y) + \theta(\Delta x^2) + \theta(\Delta y^2) \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} u(x - \Delta x, y - \Delta y) = & u(x, y) - \Delta x u'(x) - \Delta y u'(y) + \\ & \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) + \frac{\Delta y^2}{2} u''(y) + \theta(\Delta x^2) + \theta(\Delta y^2) \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} u(x - \Delta x, y + \Delta y) = & u(x, y) - \Delta x u'(x) + \Delta y u'(y) + \\ & \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) - \frac{\Delta y^2}{2} u''(y) + \theta(\Delta x^2) + \theta(\Delta y^2) \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} u(x + \Delta x, y - \Delta y) = & u(x, y) + \Delta x u'(x) - \Delta y u'(y) - \\ & \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x) - \frac{\Delta y^2}{2} u''(y) + \theta(\Delta x^2) + \theta(\Delta y^2) \end{aligned}$$

En effectuant une combinaison linéaire des quatre équations précédentes  $(1) + 2) - 3) - 4)$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x - \Delta x, y - \Delta y) - u(x - \Delta x, y + \Delta y) + u(x + \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y}$$

## 2.4 Résolution un EDP elliptique par la méthode des différences finies

soit  $\Omega$  un domaine bornée de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction aussi régulière que nécessaire de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Nous cherchons  $u$  solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

Utilisant l'équation de différences finies centrées, les dérivées secondes s'écrivent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} \dots (2)$$

Posons  $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

$$2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta y^2}$$

Substituant les équation (1) et (2) dans l'équation (2.1) on obtient :

$$\Delta u = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta y^2} = 0 \dots \dots \dots (*)$$

$$(*) \times \Delta x^2 \Rightarrow u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta y^2} \Delta x^2$$

On pose  $r = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$ , d'ou

$$(*) \Rightarrow (2 + 2r)u_i^j = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + r(u_i^{j+1} + u_i^{j-1})$$

$$u_i^j = \frac{1}{2(1+r)} [u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + r(u_i^{j+1} + u_i^{j-1})]$$

On peut être représentée le schéma DF pour l'équation de Laplace

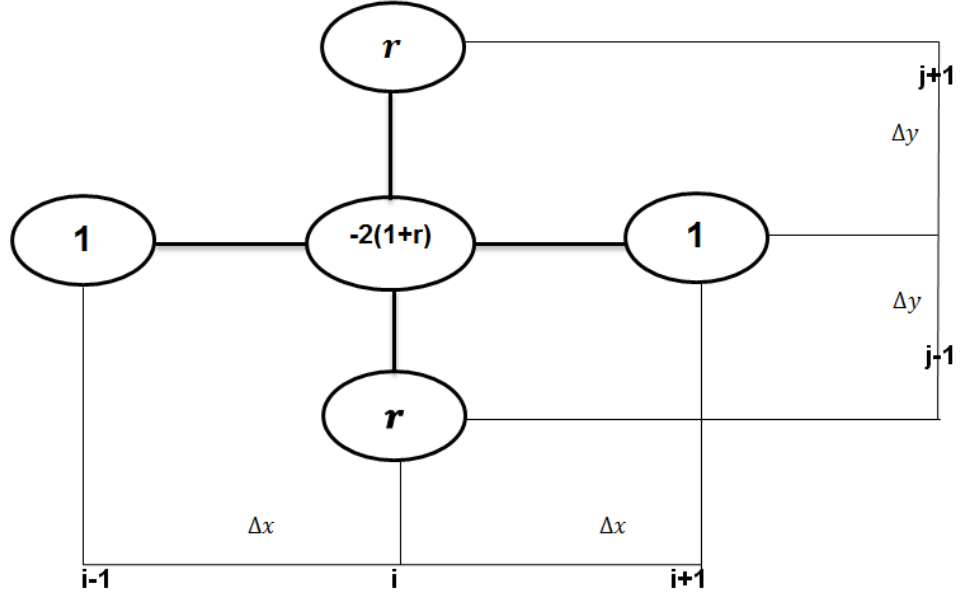


FIGURE 2.1 – Shémat DF de l'équation de Laplace

1. **Conditions aux limites de frontière**

suivant les valeurs composés sur les frontières du domaine de la fonction recherchée, il existe les conditions aux limites suivantes :

- (a) **Type de Dirichlet** : Les valeurs de la fonction sont connues sur les frontières
- (b) **Type de Neuman** : Les valeurs de la dérivée de la fonction sont connues sur les frontières

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta y} = \alpha \Rightarrow u_i^{j+1} = 2\alpha\Delta y + u_i^{j-1}$$

où

$$u_i^j = \frac{1}{2(1+r)} [u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + r(u_i^{j+1}u_i^{j-1})]$$

On remplace la valeur de la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial y}$  dans l'équation  $u_i^j$ , on obtient

$$u_i^j = \frac{1}{2(1+r)} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j + 2ru_i^{j-1} + 2r\alpha\Delta y)$$

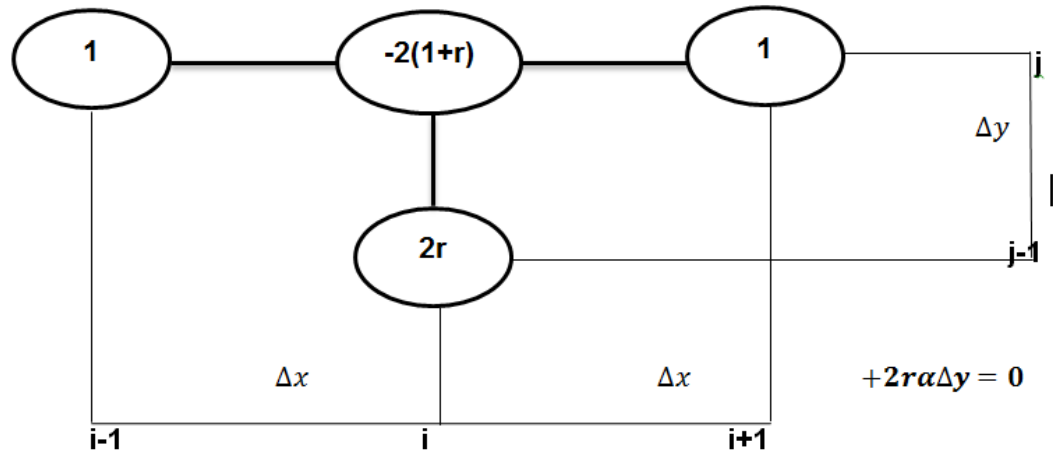


FIGURE 2.2 – Schéma DF de Laplace au conditon de Neumann

### 2.4.1 Le Problème de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & , x \in [0, 1] \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction continue.

Le maillage est construit en introduisant  $N + 1$  noeuds  $x_i$  avec  $i = 0, 1, \dots, N$ , régulièrement espacés avec un pas  $\Delta x$ . La quantité  $u_i$  désignera la valeur de la fonction  $u(x)$  au noeud  $x_i$ .

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud  $x_i$  :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de  $u$  au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x_i) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x_i)}{\Delta x_i^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{2u(x_i) - u(x_i + \Delta x_i) - u(x_i - \Delta x_i)}{\Delta x_i^2} = f_i, \quad \text{pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \beta/\Delta x \end{bmatrix}$$

Il ne reste alors plus qu'à résoudre ce système linéaire par des techniques standard de factorisation ( méthodes de Gauss  $LU$  ou méthode de Choleski  $LL^T$  )

## 2.5 Résolution un EDP parabolique

Soit à résoudre l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixe .

A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre  $u(0, t) = u_a, u(1, t) = u_b$ , ainsi qu'une condition initiale  $u(x, 0) = u_0$

Pour résoudre le problème en utilise les méthodes suivantes :

### 1. Méthode explicite

est une méthode direct permet d'évaluer les dérivées de la fonction  $u$  à l'instant  $t(j)$  et  $t(j + 1)$  On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} \dots\dots\dots(II) \end{aligned}$$

On remplace (I) et (II) dans l'équation (2.2) et on trouve le schéma :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

Donc

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$$

On pose  $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ , l'équation c'est écrit :

$$u_i^{j+1} - u_i^j = ru_{i+1}^j - 2ru_i^j + ru_{i-1}^j$$

D'où

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= ru_{i+1}^j - 2ru_i^j + ru_{i-1}^j + u_i^j \\ &= ru_{i+1}^j + (1 - 2r)u_i^j + ru_{i-1}^j \end{aligned}$$

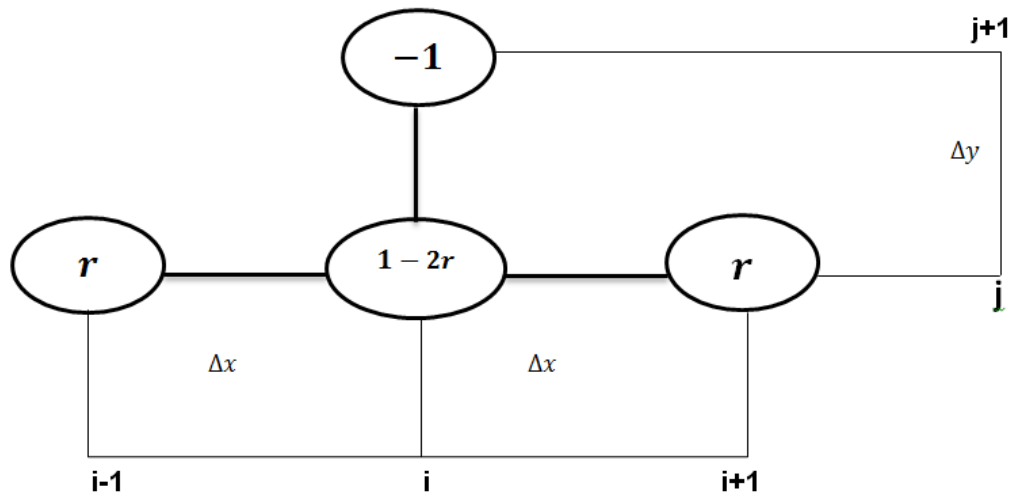


FIGURE 2.3 – Schéma explicite pour résoudre EDP parabolique

2. **Méthode implicite** Cette méthode est basée sur l'évaluation des dérivées partielles de la fonction  $u(x, t)$  à  $(t = j)$  et  $(t = j + 1)$ , on a :

Pour l'évaluation de  $(j, j + 1)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

On remplace les deux égalités dans l'équation (2.2), on obtient :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2}$$

On pose  $r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ , donc

$$u_i^{j+1} - u_i^j = ru_{i+1}^{j+1} - 2ru_i^{j+1} + ru_{i-1}^{j+1}$$

D'où

$$(1 + 2r)u_i^{j+1} = r(u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + u_i^j$$

Le schéma de cette méthode est comme suite :

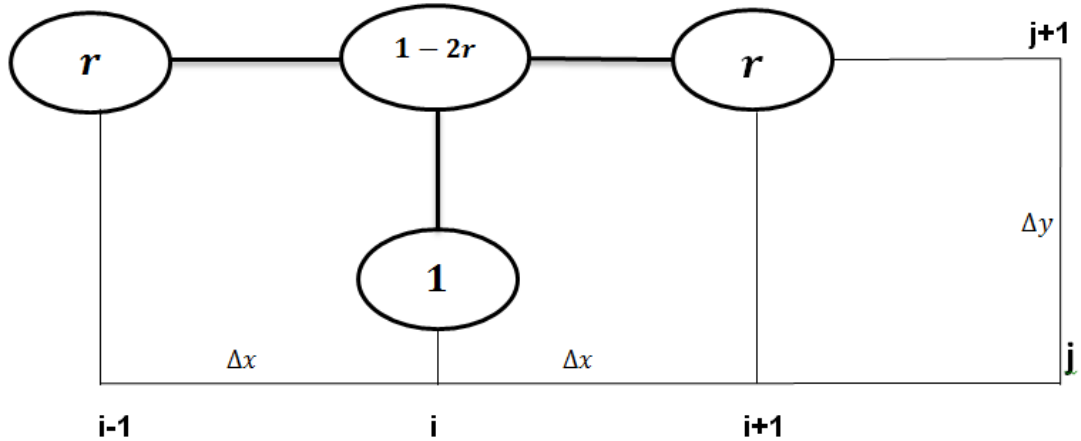


FIGURE 2.4 – Schéma implicite pour résoudre EDP parabolique

Les valeurs numérique de la fonction  $u(x, t)$  sont obtenues à travers la résolution d'un système d'équation linéaire établier par le schéma implicite, la méthode adaptée généralement pour résoudre ce système d'équation est méthode itérative

(a) **la méthode de Gauss -Siedel**

On a

$$u_i^{j+1})^{(k+1)} = \frac{1}{1 + 2r} [r(u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + u_i^j]^{(k)}$$

3. **Méthode Crank - Nicolson :**

La méthode de Crank-Nicolson est un algorithme simple permettant de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode permet d'évaluer les valeurs numériques de  $u(x, t)$  par la moyenne à l'instant  $(j)$ ,  $(j + 1)$ , c'est à dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j + 1) \right]$$

On remplace les dérivées partielles par leurs approximations déjà établies pour avoir l'équation numérique suivante :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right]$$

Posons  $r = \frac{\alpha \Delta t}{2 \Delta x^2}$ , on trouve l'équation :

$$(1 + 2r)u_i^j = (1 - 2r)u_i^{j+1} - ru_{i+1}^{j+1} + ru_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^j + ru_{i-1}^j$$

Le schéma de cette méthode est :

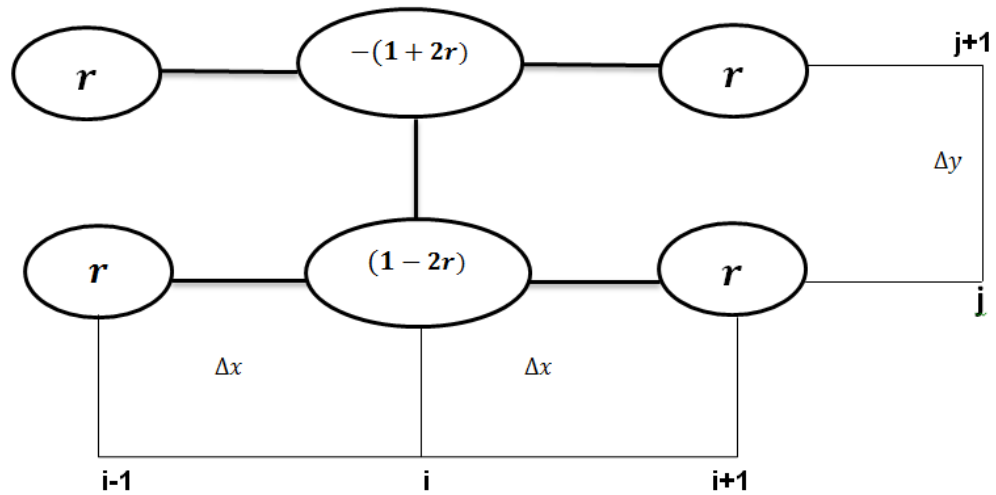


FIGURE 2.5 – le schéma numérique de Crank - Nicolson.

## 2.6 Résolution un EDP hyperbolique

On a le problème différentielle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

avec :

- les condition aux limites :

- \*  $u(x = 0, t) = f_1(t)$
- \*  $u(x = x_f, t) = f_2(t)$

- les condition initiale

- \*  $u(x, t = 0) = g_1(x)$
- \*  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = g_2(x)$

### 2.6.1 Les méthode de résolution

#### 1. La méthode explicite

On fait l'évaluation des dérivées partielles à l'aide des différence

finies d'ordre(2).  
à l'instant ( $j$ ) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

On remplace les deux équations dans (2.3), on obtient,

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = r \left( u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right)$$

avec  $r = \left( \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)^2$

D'où

$$u_i^{j+1} = ru_{i+1}^j + (2 - 2r)u_i^j + ru_{i-1}^j - u_i^{j-1}$$

Ceci le schémat explicite de l'équation EDP hyperbolique  
à l'instant  $j = 1$  :

Le problème remarqué dans ce schéma est l'évaluation de  $u$  qui  
fait l'apparaissant des termes ( $u_i^0$ ) .

Pour éliminer ce problème, on fait l'aproximation de la dérivée de  
la condition initiale à l'instant ( $j + 1$ ) et ( $j - 1$ ) à l'aide de schéma  
DF de 1<sup>ère</sup> order centré

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_2(x) \rightarrow \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} = g_2(x_i)$$

Pour  $j = 1$ , on a

$$\frac{u_i^2 - u_i^0}{2\Delta t} = g_2(x_i) \Rightarrow u_i^0 = u_i^2 - 2\Delta t g_2(x_i)$$

et

$$u_i^2 = ru_{i+1}^1 + (2 - 2r)u_i^1 + ru_{i-1}^1 - u_i^0$$

On fait remplacer l'aproximation de la condition initiale dans  
l'équation précédente, on trouve :

$$u_i^2 = ru_{i+1}^1 + (2 - 2r)u_i^1 + ru_{i-1}^1 - u_i^2 - 2\Delta t g_2(x_i)$$

donc

$$u_i^2 = \frac{r}{2}u_{i+1}^1 + (1 - r)u_i^1 + \frac{r}{2}u_{i-1}^1 - \Delta t g_2(x_i)$$

Pour  $j > 0$ , on utilise le schéma explicite de l'EDP hyperbolique

## 2. La méthode Grank-Nicolson

On fait l'évaluation de la dérivée  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$  à la moyenne entre l'instant  $(j+1)$  et l'instant  $(j)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(j)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(j+1)} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(j)} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(j+1)} \right)\end{aligned}$$

à l'aide des différence finies d'ordre(2) :

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} = \frac{C^2}{2} \left( \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right)$$

On pose  $r = \frac{C^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}$ , on obtient

$$(1 + 2r)u_{i+1}^{j+1} = r \left( u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + u_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} \right) + (2 - 2r)u_i^j - u_i^{j-1}$$

Ceci le schéma de Grank-Nicolson de l'équation EDP hyperbolique

## Chapitre 3

# Méthode volumes finis.

Les méthodes de volumes finis (VF) sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique des fluides depuis plusieurs décennies. Le principe consiste à découper le domaine  $\Omega$  en des volumes de contrôle, on intègre ensuite l'équation de conservation sur les volumes de contrôle, on approche alors les flux sur les bords du volume de contrôle.

### 3.1 volumes finis pour les problèmes de diffusion stationnaires

#### 3.1.1 Cas de la dimension 1

On considère le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \forall x \in ]0, 1[ \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $f \in C([0, 1])$ . Les conditions aux limites considérées ici sont dites de type Dirichlet homogène (le terme homogène désigne les conditions nulles).

On ne se donne plus des points mais des volumes de contrôle  $(k_i), i = 1, N$  avec  $k_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ , et on note  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ . Pour chaque volume de contrôle  $k_i$ , on se donne un point  $x_i \in k_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ .

On pourra considérer par exemple (mais ce n'est pas le seul point possible) :  $x_i = 1/2(x_{i+1/2} + x_{i-1/2})$

On intègre l'équation (3.1) sur  $K_i$  :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

et On pose  $f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx$  on obtient :

$$-u'(x_{i+1/2}) - u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Cette équation est un bilan de flux. La quantité  $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$  est le flux de diffusion en  $x_{i+1/2}$ . Pour la première maille ( $i = 1$ ), on obtient plus particulièrement :

$$-u'(x_{3/2}) + u'(0) = h_1 f_1 \quad (3.3)$$

et pour la dernière ( $i = N$ ), :

$$-u'(1) + u'(x_{N-1/2}) = h_N f_N \quad (3.4)$$

On cherche donc à approcher les flux  $-u'(x_{i+1/2})$  aux interfaces  $x_{i+1/2}$  des mailles. Notons que l'opérateur à approcher est ici d'ordre 1, alors qu'il était d'ordre 2 en différences finies pour la même équation.

On se donne une inconnue par maille (ou volume de contrôle  $i$ ), qu'on note  $u_i$ , et on espère approcher ainsi la valeur  $u(x_i)$ . On approche  $u'(x_{i+1/2})$  par le quotient différentiel

$$\frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

Le schéma numérique s'écrit donc :

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (3.5)$$

Pour la première et  $N - i$ ème equations, on tient compte des conditions aux limites de l'équation(3.1), et on  $u'(0)$  (resp.  $u'(1)$ ) par  $\frac{u(x_1)}{h_{1/2}}$  (resp.  $\frac{u(x_N)}{h_{N+1/2}}$ ), ce qui donne comme première et dernière équations du schéma numérique :

$$-\frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} + \frac{u_1}{h_{1/2}} = h_1 f_1 \quad (3.6)$$

$$-\frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} + \frac{u_N}{h_{N+1/2}} = h_N f_N \quad (3.7)$$

## 3.2 Cas de la dimension 2 ou 3

On considère maintenant le problème de Laplace en dimension 2 ou 3, sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 2$  ou 3, avec conditions aux

limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad , \quad \text{sur } \Omega \\ u(x) &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $f$  est une fonction de  $\Omega$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $\partial\Omega$  désigne la frontière de  $\Omega$ . On suppose maintenant que  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ , et on se donne un maillage  $\Gamma$  de  $\Omega$ , c.à.dire, en gros, un découpage de  $\Omega$  en volumes de contrôle polygonaux  $K$ . En intégrant l'équation(3.1) sur  $K$ , on obtient :

$$\int_K -\Delta u dx = \int_K f dx.$$

Par la formule de Stokes, on peut réécrire cette équation :

$$- \int_{\partial K} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_K d\gamma(x) = \int_K f(x) dx.$$

où  $d\gamma(x)$  désigne l'intégrale par rapport à la mesure uni-dimensionnelle sur le bord de l'ouvert  $\Omega$ , et où  $\mathbf{n}_K$  désigne le vecteur normal unitaire à  $\partial K$  extérieur à  $K$ . Comme  $K$  est polygonal, on peut décomposer  $\partial K$  en arêtes  $\sigma$  qui sont des segments de droite, et en appelant  $\xi_K$  l'ensemble des arêtes de  $\partial K$ , on a donc :

$$- \sum_{\sigma \in \xi_K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\gamma(x) = \int_K f(x) dx$$

où  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  désigne le vecteur normal unitaire à  $\sigma$  extérieur à  $K$  (noter que ce vecteur est constant sur  $\sigma$ ).

On cherche donc maintenant à approcher la dérivée normale  $\nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$  de manière consistante sur chaque arête  $\sigma$ . On se donne donc des inconnues discrètes notées  $(u_K)_{K \in \Gamma}$ , qui, on l'espère vont s'avérer être des approximations de  $u(x_K)$ . Pour une arête  $\sigma = K|L$  séparant les volumes de contrôle  $K$  et  $L$ , il est tentant d'approcher la dérivée normale  $\nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$  par le quotient différentiel

$$\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{K,L}}$$

où  $d_{K,L}$  est la distance entre les points  $x_K$  et  $x_L$ . Cependant, cette approximation ne pourra être justifiée que si la direction du vecteur défini par les deux points  $x_K$  et  $x_L$  est la même que celle de la normale  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  c.à.d. si le segment de droite  $x_K x_L$  est orthogonal à l'arête  $K|L$ . Pour un maillage triangulaire à angles strictement inférieurs à  $\pi/2$  ceci

est facile à obtenir en choisissant les points  $x_K$  comme intersection des médiatrices du triangle  $K$ , voir Figure 3.1

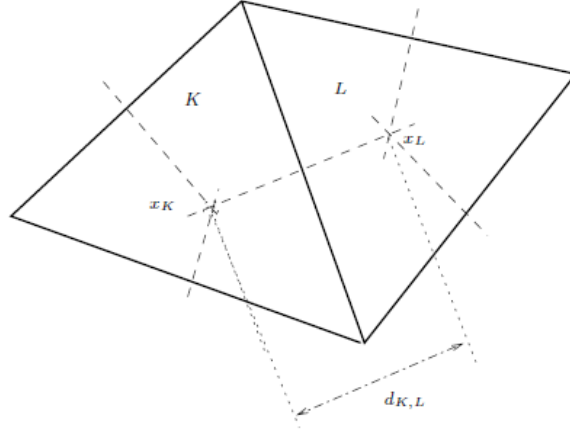


FIGURE 3.1 – Exemple de volumes de contrôle pour la méthode des volumes finis en deux dimensions d'espace

On se placera ici dans ce cas, et on verra plus loin d'autres possibilités. on approche donc  $\nabla u \cdot \mathbf{n}_K|_\sigma$  par  $\frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_{K,L}}$  et en notant  $|\sigma|$  la longueur de l'arête  $\sigma$ , on approche :

$\int_\sigma \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}_K d\gamma(x)$  par  $F_{K,\sigma} = |\sigma| \frac{u_L - u_K}{d_{K,L}}$ , pour tout  $\sigma \in \xi_K$  et pour tout  $K \in \Gamma$

Le schéma volumes finis s'écrit donc

$$\sum_{\sigma \in \xi_K} F_{K,\sigma} = |K| f_K \quad (3.9)$$

où  $|K|$  est la mesure de  $K$ , et  $f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) dx$ , et où les flux numériques  $F_{K,\sigma}$  sont définis (en tenant compte des conditions limites pour les arêtes du bord) par :

$$F_{K,\sigma} = \begin{cases} -|\sigma| \frac{u_L - u_K}{d_{K,L}} & \text{si } \sigma = K|L \\ -|\sigma| \frac{u_K}{d_{K,\sigma}} & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega \text{ et } \sigma \in \xi_K \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $d_{K,\sigma} =$  distance entre  $x_K$  et  $\sigma$

### 3.3 Schéma volumes finis pour un problème elliptique en une dimension d'espace

On considère le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \quad , ]0, 1[ \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Définition 3.3.1.** On appelle maillage volume finis de l'intervalle  $[0, 1]$  un ensemble de  $N$  mailles  $(k_i)_{i=1,N}$  telles que  $k_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ , avec  $x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$ , et on note  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ . On se donne également  $N$  points  $(x_i)_{i=1,N}$  situés dans les mailles  $K_i$ . On a donc

$$0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1.$$

On notera  $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ ; et  $h = \max_{i=1,N} h_{i+1/2}$  et pour des questions de notations on posera également  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ .

#### 3.3.1 Schéma volumes finis

On intègre l'équation (3.1) sur  $K_i$ , et on obtient :

$$-u'(x_{i+1/2}) - u'(x_{i-1/2}) = \int_{K_i} f(x) dx$$

On pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx$$

On introduit les variables discrètes  $(u_i)_{i=1,N}$ , une par maille qui devraient être de bonnes approximations de  $u(x_i)$ .

On a le schéma suivante :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i, \quad i = 1, N \quad (3.12)$$

où  $F_{i+1/2}$  appelé le flux numérique en  $x_{i+1/2}$  devrait être une bonne approximation de  $-u'(x_{i+1/2})$ .

Le principe de la méthode des volumes finis est d'arriver à écrire les flux numériques en fonctions des variables discrètes  $(u_i)$ .

On pose alors

$$\begin{aligned} F_{i+1/2} &= -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \quad i = 1, \dots, N \\ F_{1/2} &= -\frac{u_1}{h_{1/2}} \quad F_{N+1/2} = -\frac{u_N}{h_{N+1/2}} \end{aligned}$$

pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes  $u(0) = u(1) = 0$ . On peut aussi écrire :

$$F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \quad i = 0, \dots, N + 1 \quad (3.13)$$

en posant

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (3.14)$$

On peut écrire le schéma sous forme matricielle

$$AU = b \quad (3.15)$$

avec

$$(AU)_i = \frac{1}{h_i} \left[ \frac{-1}{h_{i+1/2}} (u_{i+1} - u_i) + \frac{1}{h_{i-1/2}} (u_i - u_{i-1}) \right], \quad b_i = f_i, i = 1, \dots, N$$

### 3.3.2 Analyse mathématique du schéma

**proposition 3.3.1.** [6] Si  $f \in C([0, 1])$  et la solution exacte  $u \in C^2([0, 1])$  alors le schéma volume finis (3.12) a une unique solution  $(u_i)$ .

*Preuve :* Si  $f_i = 0$ , le schéma peut s'écrire

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \quad i = 1, \dots, N$$

avec  $u_0 = u_{N+1} = 0$ . En multipliant par  $u_i$  et en sommant de  $i = 1, \dots, N$  on obtient :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \sum_{i=1}^N \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = 0$$

En effectuant un changement d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = 0$$

En regroupant les termes, on a donc

$$\sum_{i=1}^N \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+1/2}} + \frac{u_1^2}{h_{1/2}} + \frac{u_N^2}{h_{N+1/2}} = 0$$

Ceci démontre l'unicité de  $(u_i)$  et donc l'existence puisque le système est carré d'ordre  $N$ . On rappelle qu'une matrice  $A$  est inversible ssi son noyau est réduit au vecteur nul.

**Définition 3.3.2. (Erreur de consistance sur le flux)** Soit  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  solution du problème (3.11). On se donne une subdivision de  $[0, 1]$ . On appelle  $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$  le flux exact en  $x_{i+1/2}$ , et  $\tilde{F}_{i+1/2} = -\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1/2}}$  l'approximation du flux exact utilisée pour construire le flux numérique  $F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}$

On dit que le flux numérique est consistant d'ordre  $p$  s'il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  ne dépendant que de  $u$  telle que l'erreur de consistance sur le flux, définie par :

$$R_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i+1/2} \quad (3.16)$$

vérifie

$$|R_{i+1/2}| \leq Ch^p \quad (3.17)$$

*Preuve* : utiliser des développements de Taylor.

**Lemme 1. [6] (Consistance des flux)** Soit  $u \in C^2([0, 1])$  solution du problème (3.11). Le flux numérique  $F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}$  est consistant d'ordre 1. Plus précisément il existe  $C$  ne dépendant que de  $u$  telle que l'erreur de consistance sur le flux définie par (3.16) vérifie :

$$|R_{i+1/2}| = | -u'(x_{i+1/2}) + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}} | \leq Ch \quad (3.18)$$

*Preuve* : utiliser des développements de Taylor.

**Définition 3.3.3. (Conservativité des flux).** On dit que le schéma volumes finis est conservatif si lorsque l'on considère une interface  $x_{i+1/2}$  entre les 2 mailles  $K_i$  et  $K_{i+1}$  le flux numérique entrant dans une maille est égal à celui sortant de l'autre

C'est grâce à la conservativité et à la consistance des flux qu'on va montrer la convergence du schéma volumes finis.

**Théorème 3. [7] (Convergence du schéma volumes finis)** Soit  $u \in C^2([0, 1])$  solution du problème (3.11). On pose  $e_i = u(x_i) - u_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  et  $e_0 = e_{N+1} = 0$ . Il existe  $C \geq 0$  ne dépendant que de  $u$  telle que

1.

$$\sum_{i=1}^N \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h} \leq Ch^2 \quad (3.19)$$

2.

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 \leq Ch \quad (3.20)$$

3.

$$\max_{i=1,\dots,N} |e_i| \leq Ch \quad (3.21)$$

(On rappelle que  $h = \sup_{i=1,\dots,N} h_i$ .)

**Preuve** :Ecrivons le schéma volumes finis :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i$$

et l'équation exacte intégrée sur la maille  $K_i$

$$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} = h_i f_i$$

En les soustrayant on a :

$$\bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + F_{i-1/2} = 0$$

En introduisant  $R_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i+1/2}$  on obtient :

$$\tilde{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2} + F_{i-1/2} = -R_{i+1/2} + R_{i-1/2}$$

ce qui s'écrit encore, au vu de la définition de  $e_i$ ,

$$-\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i) + \frac{1}{h_{i-1/2}}(e_i - e_{i-1}) = -R_{i+1/2} + R_{i-1/2}$$

On multiplie cette dernière égalité par  $e_i$  et on somme de 1 à  $N$  :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{h_{i-1/2}}(e_i - e_{i-1})e_i = \sum_{i=1}^N -R_{i+1/2}e_i + \sum_{i=1}^N R_{i-1/2}e_i$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i)e_{i+1} = \sum_{i=1}^N -R_{i+1/2}e_i + \sum_{i=0}^{N-1} R_{i+1/2}e_{i+1}$$

En réordonnant les termes, on obtient, en remarquant que  $e_0 = 0$  et  $e_{N+1} = 0$  :

$$\sum_{i=0}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=0}^N R_{i+1/2}(e_{i+1} - e_i)$$

Mais

$$\sum_{i=0}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \left( \frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right)^2$$

De plus,  $R_{i+1/2} \leq Ch$  (par le lemme 1). On a donc

$$\sum_{i=0}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{\sqrt{h_{i+1/2}}} \sqrt{h_{i+1/2}}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \left( \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \right)^{1/2}$$

Or  $\left( \sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \right)^{1/2} = 1$ , on en déduit que :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2}$$

et donc

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+1/2}} \leq Ch$$

On a ainsi démontré (1).

pour(3)

$$|e_i| = \left| \sum_{j=1}^i e_j - e_{j-1} \right| \leq \sum_{j=0}^N |e_j - e_{j-1}|$$

Donc

$$|e_i| \leq \left( \sum_{j=0}^N \frac{(e_j - e_{j-1})^2}{h_{j+1/2}} \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{j=0}^N h_{j+1/2} \right)^{1/2}$$

d'où (3), et (2) s'en déduit immédiatement.

## Comparaison des méthodes

On remarque que les différences finies sont particulièrement bien adaptées dans le cas de domaines rectangulaires ou parallélépipédiques, pour lesquels on peut facilement définir des maillages structurés (cartésiens dans le cas présent) c.à.d. dont on peut indexer les mailles par un ordre (i,j) naturel.

Dans le cas de domaines plus complexes, on maille souvent à l'aide de triangles (ou tétraèdres) et dans ce cas la méthode des différences finies ne se généralise pas facilement. On a alors recours soit aux volumes finis, dont on vient de donner le principe, que nous aborderons ultérieurement.

# application numérique

L'objectif de cet exemple est d'appliquer la méthode de différences finies pour résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec } x \in [0, 1], y \in [0, 1] \quad (3.22)$$

avec les conditions limites de frontière :

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = 4x(1 - x)$$

Nous utilisons l'approximation suivante de la dérivée par rapport ( $x$ ) et basant sur les différences centrées de  $u(x, y)$  :

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} \quad (3.23)$$

Même étape pour la dérivée par rapport ( $y$ ) :

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (3.24)$$

Pour programmer cette méthode, nous optons cette notation :

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.25)$$

Alors l'expression finale de l'équation (3.22) avec la notion précédente s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u_i^j = \frac{1}{2(1+r)} \left( u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + r u_i^{j+1} + r u_i^{j-1} \right) \quad \text{avec } r = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$$

Pour résoudre cette équation, on introduit le processus itératif suivant :

$$[u_i^j]^{(k+1)} = \left[ \frac{1}{2(1+r)} \left( u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + r u_i^{j+1} + r u_i^{j-1} \right) \right]^{(k)}$$

L'organigramme correspondant à résolution générale

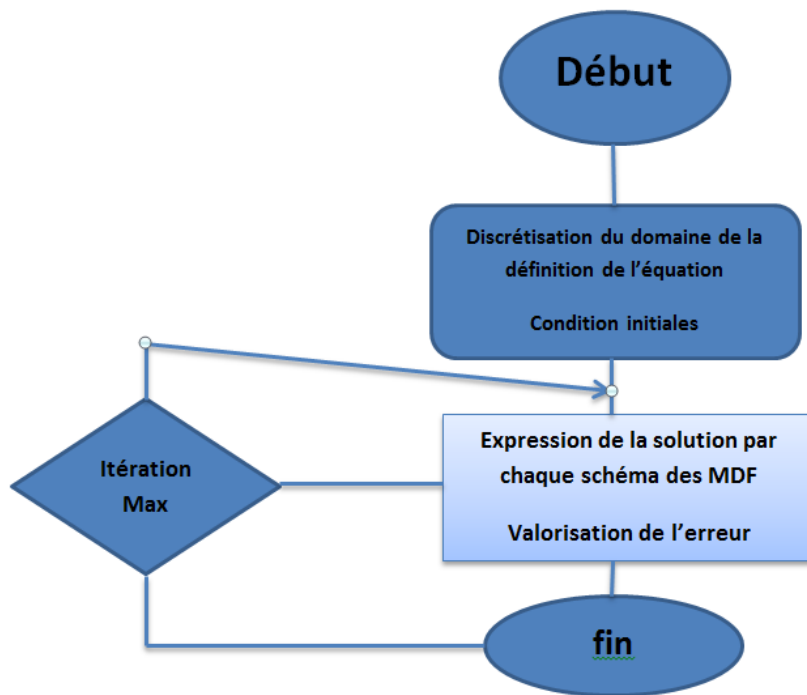


FIGURE 3.2 – L'organigramme de résolution

Donc on va programmer cette méthode itérative sous MatLab

```

k1c
clear all
h=1/3;
x0=0;
xf=1;
y0=0;
yf=1;
eps=0.01
x=0:h:xf;
y=0:h:yf
nx=xf/h+1;
ny=yf/h+1;
dx=0:nx:1;
dy=0:ny:1;
r=(dx/dy)^2;
npx=nx+1;
npy=ny+1;
u=zeros(npy,npx);
Err=1;
for i=1:npy
    u(i,1)=4*x(i)*(1-x(i));
    u(i,npx)=0;
end
for i=1:npx
    u(1,i)=cos(2*x(i));
    u(npy,i)=cos(2*x(i))*sin(2);
end
for i=2:npy-1
    for j=2:npx-1
        u(i,j)=1.0;
    end
end
u0=u;
k=0
while(Err>eps)
    k=k+1
    for i=2:npy-1
        for j=2:npx-1
            u0(i,j)=0.25*(u(i-1,j)+u(i+1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1));
        end
    end
    Err=sqrt(sum(sum(u0-u).^2));
    u=u0
end
Uexact=zeros(npx,npy);
for i=1:npx
    for j=1:npy
        Uexact(i,j)=cos(2*x(i))+sin(2*y(j));
    end
end
zak=Uexact'-u
mesh(x,y,u)

```

FIGURE 3.3 – Programme de résolution en MatLab

# Conclusion

Se trouve dans cet mémoire des méthodes numériques utilisant pour la résolution des équations aux dérivées partielles si les méthodes ordinaires sa marches pas comme sa sefait dans les intégrations numériques. Alors nous detaons trois méthodes pour se finomène (EDP).

La méthode de différences finies est la plus ancienne et peut être la base des méthodes numériques d'approximation des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, alors l'apprentissage d'une telle méthode va permettre l'étudiant de comprendre la base mathématique des méthodes numériques.

La méthode de volumes finis est parmi les méthodes les plus universelles. D'un autre cotée, y'a beaucoup de groupes de recherche a travers le monde qui travaillent dans cette méthode riche.

L'avantage de cette technique sur les différences finies est qu'elle s'adapte facilement à des géométries complexes qui interviennent dans de nombreux problèmes industriels. La difficulté essentielle réside dans l'estimation des flux aux frontières de chaque volume de contrôle lors de la mise en oeuvre de cette technique



# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. Lesfari :Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP).Département de Mathématiques Faculté des Sciences. Université Chouaïb Doukkali,2014
- [2] Allaire, G. : Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. École polytechnique 2004 ou Éditions Ellipses, Paris, 2005.
- [3] Reinhard, R. : Équations aux dérivées partielles : introduction. Dunod, Paris, 1991.
- [4] J. Rappaz, M. Picasso, Introduction à l'analyse numérique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.
- [5] S. Nicaise Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Dunod, 2000.
- [6] P. A. Raviart, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, *Masson, 1992.*
- [7] A. Le Pourhiet, Résolution des équations aux dérivées partielles, *Cepadues Editions, 1988.*