

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

Processus de Markov et propriétés

Présenté par :
GUETTAF Abdelkader

Soutenu : Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.MEKKI Slimane	MCB	C-Univ Naâma	Président
Dr.LATTI Fethi	MCB	C-Univ Naâma	Examineur
Dr.BELAIDI Mohamed	MCA	C-Univ El-bayadh	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Remerciements

*J'aimerais en premier lieu remercier ALLAH qui m'a donné la volonté et le courage
pour achever ce travail*

*Je tiens à remercier tout d'abord à mon encadreur : Dr. Blaidi Mohamed qui m'a
proposé le sujet*

*Je le remercie pour son aide, sa patience, son soutien, ses conseils et pour tout
l'attention qu'il a portée à ce travail*

*Je tiens à remercier aussi les membres de jury : Dr. MEKKI Slimane et Dr. LATTI Fethi
d'avoir accepté l'évaluation de ce travail*

*J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'enai eu besoin,
en particulier à mon père, ma mère*

*Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de
ce travail.*

Abréviations et Notations

- EDS : Equations différentielles stochastiques.
- Ω : un ensemble.
- \mathcal{F} : une tribu de parties de Ω .
- \mathbb{P} : une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .
- T : Un espace des temps.
- E : Un espace des états.
- $\mathbb{P} - p.s$: Prèsque sûrement pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .
- $p.s$: Prèsque sûrement.
- $v.a.r$: variable aléatoire réel.
- L^1 : Espace des fonction intégrable.
- $L^2(\Omega)$: Espace carré de variables aléatoires définies sur Ω .
- B_t : Mouvement Brownien.
- $t \wedge \tau$: $\min(t, \tau)$.

Table des matières

Introduction	6
1 Généralités sur le calcul stochastiques	8
1.1 Filtration	8
1.2 Processus stochastiques	9
1.2.1 Processus croissant	10
1.2.2 Processus Gaussiens	10
1.3 Mouvement Brownien	10
1.4 Martingales	11
1.4.1 Martingale locale	11
1.4.2 Semimartingales	12
1.5 La formule d'Itô	13
2 Processus de Markov	15
2.1 Généralités	15
2.2 Chaînes de Markov à temps discret	17
2.2.1 Matrice de transition et graphe d'une chaîne de Markov	17
2.2.2 Classification des états	18
2.2.3 Distribution stationnaire	20
2.3 Processus de Markov continus	20
2.3.1 Régime transitoire	20
2.3.2 Régime permanent	22
2.4 propriété de Markov	23
2.5 Temps d'arrêt et Propriété de Markov forte	25

3	Processus de Markov et équations différentielles stochastiques	27
3.1	Solutions faibles et fortes	27
3.2	Coefficients lipschitziens	31
3.3	Propriété de Markov et diffusions	37
4	Application	40
4.1	Marche aléatoire sur \mathbb{Z}	40
4.2	Simulation d'un mouvement Brownien standard	42
4.3	Trajectoire moyenne des mouvements browniens	43
4.4	Le mouvement brownien arithmétique (avec un drift)	45
4.5	Le mouvement brownien géométrique	46
	Bibliographie	49

Table des figures

2.1	Représentation des transitions pour le temps qu'il fait d'un jour au suivant.	18
2.2	Représentation de chaîne irréductible.	19
2.3	Représentation du classes de chaîne	19
2.4	Propriété de Markov forte. Les états successifs de la chaîne $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ sont représentés par les \bullet et sont interpolés linéairement, et T est un temps d'arrêt	24
4.1	Trajectoire d'un échantillon d'événement Bernoullien	41
4.2	Trajectoire de marche aléatoire sur \mathbb{Z}	42
4.3	Trajectoire de mouvement brownien standard sur l'intervalle de temps $[0,1]$	43
4.4	Trajectoire de mouvement brownien	44
4.5	Trajectoire moyenne d'un échantillon de 15 Trajectoires	44
4.6	Trajectoire de mouvement brownien arithmétique	45
4.7	Trajectoire de mouvement brownien arithmétique	46
4.8	Trajectoire de mouvement brownien géométrique	47
4.9	Mouvement Brownien géométrique de 50 trajectoires	48

Liste des tableaux

2.1	Les catégories du processus de Markov	17
-----	---	----

Introduction

La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'est-à-dire non prévisible avec certitude.

Les processus de Markov sont largement utilisés dans l'ingénierie, la science et la modélisation, la prédiction des plusieurs domaines tels que la médecine météo, physique, biologique, commerciale etc, les processus de Markov portent le nom de leur découvreur, Andreï Markov, 1906.

En mathématiques, un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov, qui nécessite des études dans des domaines aléatoires, qui sont exprimé par des variables aléatoires $X_t, t \in I$, où l'ensemble des indices I peut-être $\mathbb{N}^d, \mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d$, un ensemble fini, etc.

Pour le cas des indices unidimensionnels $I = \mathbb{N}(\mathbb{Z})$ et $I = \mathbb{R}$ on utilise aussi le nom processus stochastiques (à temps discret. respectivement continu). Un domaine très vaste qui englobe de nombreuses situations en théorie des processus de Markov, la construction d'un processus. Notre étude consiste à donner une vue générale qui permette de synthétiser des différentes situations par des définitions, propriétés et des théorèmes.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres.

Le premier chapitre traite des concepts de base de calculs stochastiques pour voir quelques notions, et définitions des filtrations, processus stochastiques, mouvement brownien, martingales, et la formule d'Itô.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté les notions de base de processus de Markov, ainsi chaînes de Markov à temps discret et processus de Markov continus et ces propriétés.

La troisième partie de ce travail détermine les solutions d'équations différentielles

stochastiques par les processus de Markov.

La quatrième chapitre comporte les parties suivantes : les simulations du marche aléatoire, mouvement brownien standart et arithmétique et mouvement brownien géométrique que présenté un solution d'équations différentielles stochastiques.

CHAPITRE 1

Généralités sur le calcul stochastiques

Ce chapitre présente la notion générale de calcul stochastique. On décrit d'abord les processus stochastiques, leurs définitions, mouvement Brownien et la notion des martingales et la formule d'Itô.

Dans le chapitre, on considèrera un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, espace mesurable (E, \mathcal{E}) et un ensemble T de \mathbb{R}_+ .

1.1 Filtration

Définition 1.1.1 Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ de (Ω, \mathcal{F}) est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F} , pour $s \leq t$

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

la filtration canonique de processus X_t est donnée par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \quad t \in T,$$

c'est la plus petite σ -algèbre par rapport laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé filtré.

Remarque 1 La filtration est dite :

1. Continue droite si $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue droite et si \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles \mathbb{P} -négligeables de \mathcal{F} .

Définition 1.1.2 Une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un **temps d'arrêt** par rapport à \mathcal{F} si pour tout $t \geq 0$ $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

En d'autres termes, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $T(\omega) \leq t$ est un ensemble \mathcal{F}_t -mesurable.

1.2 Processus stochastiques

Un processus stochastique est un modèle mathématique qui permet de décrire le comportement, à tout moment après l'instant initial (par exemple $t_0 = 0$), d'un phénomène aléatoire. Nous précisons cette notion dans la définition suivante :

Définition 1.2.1 Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $X = (X_t)_{t \in T}$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à des valeurs dans l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) et est indexé par un paramètre t appartenant à l'ensemble T :

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Remarque 2 (i) $T = \mathbb{N}$ le processus est temps discret,

(ii) $T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continue.

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

- Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \rightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Définition 1.2.2 Le processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit adapté à la filtration $X = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ si pour tout $t \in T$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.2.3 Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est dit à accroissements indépendants si pour tous

$t_1 < \dots < t_k$ dans T les v.a. $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

Définition 1.2.4 Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est à accroissements stationnaires si la loi de $X_{\theta+t} - X_\theta$ ne dépend pas de θ , pour tous $t, \theta \in T$ t.q. $\theta + t \in T$.

1.2.1 Processus croissant

Définition 1.2.5 *Un processus $A = (A_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \rightarrow A_t$ est une fonction croissante, c'est-à-dire*

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega), \forall t \leq s, p.s.$$

Sauf mention du contraire, les processus croissants sont pris continus à droite.

Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0, T]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| \leq K,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie sur $[0, T]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| < \infty,$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$. Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie s'il est à variation finie sur $[0, T]$ pour tout t . Il est alors la différence de deux processus croissants (et réciproquement)

1.2.2 Processus Gaussiens

Définition 1.2.6 *Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si*

$$\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \text{ est une v.a.r. gaussienne.}$$

Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance. Un espace gaussien est un sous-espace (vecteur fermé) de $L^2(\Omega)$ formé par v.a.r. gaussien centré. L'espace gaussien généré par le processus gaussien est $L^2(\Omega)$ produit par v.a.r. centré $(X_t - \mathbb{E}(X_t), t \geq 0)$, soit le sous-espace est formé par une combinaison linéaire de ces variables centrales et de leurs limites moyennes quadratique.

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *Un processus $B = (0, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles est appelé mouvement brownien si :*

- (i) $B_0 = 0$, \mathbb{P} - *p.s.*
- (ii) $\forall 0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s .
- (iii) $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Autrement dit, le processus B part de 0, ses accroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps.

Définition 1.3.2 Lorsque $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t \geq 0}$, on dit que B est un mouvement brownien naturel.

De plus, on appelle B un \mathcal{F}_t -mouvement brownien si $B \in L^0(\mathcal{F}_t)$ et pour tout $0 \leq s < t \leq T$, la variable $B_{s,t}$ est indépendante de la tribu du passé avant s , soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.

Définition 1.3.3 Soit B un mouvement Brownien, b et σ deux constantes. Le processus

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\}$$

est appelé **Brownien géométrique**. Ce processus est aussi appelé processus "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \left\{ b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right\} t + \sigma B_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

1.4 Martingales

Pour $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{N} on considère $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.4.1 Une famille $M_t, t \in T$, est une martingale si $M_t \in L^1$, (M_t) est adapté et

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s, \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t.$$

1.4.1 Martingale locale

Définition 1.4.2 Un processus adapté continu $M = (M_t)_{t \geq 0}$ tel que $M_0 = 0$ est une martingale locale (continue) si il existe une suite croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ et, pour tout n , le processus arrêté M^{T_n} soit une martingale. On dit que (T_n) réduit M .

Si M est un processus adapté non nul en 0, on dit que c'est une martingale locale si $M_t - M_0$ l'est.

Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que M est une martingale locale si $M_t = M_0 + N_t$, où le processus N est une martingale locale issue de 0.

On sait que si (X^1, \dots, X^n) est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^n , alors $\langle X^i, X^j \rangle_t = \mathbf{1}_{\{i=j\}}t$. Le théorème suivant, dû à P. Lévy, dit que la réciproque est également vraie, ce qui fournit une caractérisation importante et simple du mouvement brownien.

Théorème 1.4.1 (Lévy). *Soient M^1, \dots, M^n des martingales locales continues nulles en 0 telles que*

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \mathbf{1}_{\{i=j\}}t, \quad 1 \leq i, j \leq n, t \geq 0.$$

Alors (M^1, \dots, M^n) est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^n .

En particulier, si M est une martingale locale continue nulle en 0 telle que $\langle M \rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$, alors M est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien.

Le théorème suivant (de Dambis-Dubins-Schwarz) nous dit que toute martingale locale continue peut s'écrire comme mouvement brownien "changé de temps".

Théorème 1.4.2 (Dambis-Dubins-Schwarz). *Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$.*

Il existe alors un mouvement brownien B tel que $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$.

Les inégalités suivantes relient une martingale locale continue avec sa variation quadratique. Pour tout processus X , on note $X_t^* = \sup_{s \in [0, t]} |X_s|$.

Théorème 1.4.3 (Burkholder-Davis-Gundy). *Soit $p > 0$ un réel. Il existe des constantes $0 < c_p \leq C_p < \infty$ telles que pour toute martingale locale continue M nulle en 0,*

$$c_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Par conséquent, pour tout temps d'arrêt T et toute martingale locale continue M nulle en 0,

$$c_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[(M_T^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

Démonstration Soit $p > 0$ et soit M une martingale locale continue nulle en 0. D'après le théorème de Dambis-Dubins-Schwarz (théorème 1.4.2), il existe un mouvement brownien B tel que $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$. De plus, B est un (\mathcal{G}_T) -mouvement brownien pour une nouvelle filtration (\mathcal{G}_t) qui est continue à droite et complète, et pour tout t , $\langle M \rangle_t$ est un (\mathcal{G}_T) -temps d'arrêt (car pour tout $T \geq 0$, $\{\langle M \rangle_t \leq T\} = \{\mathcal{T}_T \geq t\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}_T} = \mathcal{G}_T$). \square

1.4.2 Semimartingales

On se fixe $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ espace de probabilité filtré.

Définition 1.4.3 On appelle semimartingale (continue) un processus adapté X_t s'écrivant

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où M est une martingale locale et V un processus à variation finie, nuls en 0, continus adaptés.

Théorème 1.4.4 Soit X une semimartingale continue. Il existe une unique semimartingale continue Z telle que

$$Z_t = e^{X_0} + \int_0^t Z_s dX_s. \quad (1.1)$$

Cette unique solution est $Z = \mathcal{E}(X)$, où

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t\right). \quad (1.2)$$

On se met dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ dont la filtration est continue à droite et complète.

Théorème 1.4.5 (Girsanov). Soit $(L_t, t \geq 0)$ une martingale locale continue telle que $L_0 = 0$ et que $\mathbb{E}(\mathcal{E}(L)_\infty) = 1$. Supposons que \mathbb{Q} est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que $\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty \bullet \mathbb{P}$. Alors pour toute \mathbb{P} -martingale locale continue M , le processus $M - \langle M, L \rangle$ est une \mathbb{Q} -martingale locale continue.

1.5 La formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique, qui montre que la fonction de type \mathcal{C}^2 de p semi-martingales continues est toujours une semi-martingale continue, et exprime explicitement la décomposition de cette semi-martingale.

Théorème 1.5.1 (formule d'Itô) Cas multidimensionnel : Soient X^1, \dots, X^N des semi-martingales continues, et soit $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s,$$

où $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N), \forall t \geq 0$.

Démonstration Dans le cas où N est quelconque, la formule de Taylor donne

$$F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F}{\partial x^k}(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k)$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N g_{n,i}^{k,l} (X_{t_{i+1}^n}^k - X_{t_i^n}^k)(X_{t_{i+1}^n}^l - X_{t_i^n}^l),$$

avec

$$\inf_{x \in I_{n,i}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^l}(X) \leq g_{n,i}^{k,l} \leq \sup_{x \in I_{n,i}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^l}(X),$$

où $I_{n,i} = [X_{t_i^n}^1, X_{t_{i+1}^n}^1] \times \dots \times [X_{t_i^n}^N, X_{t_{i+1}^n}^N]$ (bien sûr, il faut remplacer $[X_{t_i^n}^k, X_{t_{i+1}^n}^k]$ par $[X_{t_{i+1}^n}^k, X_{t_i^n}^k]$ si $X_{t_i^n}^k > X_{t_{i+1}^n}^k$). On utilise le même argument pour conclure. \square

Démonstration de théorème 1.4.4 Soit $\mathcal{E}(X)$ le processus défini dans (1.2). Par la formule d'Itô

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_t dX_t - \frac{1}{2} \mathcal{E}(X)_t d\langle X \rangle_t + \frac{1}{2} \mathcal{E}(X)_t d\langle X \rangle_t = \mathcal{E}(X)_t dX_t.$$

Comme $\mathcal{E}(X)_0 = e^{X_0}$, on voit que $\mathcal{E}(X)$ est une solution de (1.1). Pour montrer l'unicité, on pose $Y_t = \exp(-X_t + \frac{1}{2}\langle X \rangle_t)$. Par la formule d'Itô, Y est une semimartingale continue telle que

$$dY_t = -Y_t dX_t + \frac{1}{2} Y_t d\langle X \rangle_t + \frac{1}{2} Y_t d\langle X \rangle_t = -Y_t dX_t + Y_t d\langle X \rangle_t.$$

D'autre part, soit Z une semimartingale continue vérifiant (1.1), alors par la formule d'intégration par parties (qui est en fait un cas spécial de la formule d'Itô),

$$\begin{aligned} d(Y_t Z_t) &= Y_t dZ_t + Z_t dY_t + d\langle Y, Z \rangle_t \\ &= Y_t Z_t dX_t - Z_t Y_t dX_t + Z_t Y_t d\langle X \rangle_t - Y_t Z_t d\langle X \rangle_t = 0. \end{aligned}$$

Donc $Y_t Z_t = Y_0 Z_0 = 1$, autrement dit, $Z_t = \frac{1}{Y_t} = \mathcal{E}(X)_t$. \square

2.1 Généralités

Les processus de Markov sont des processus stochastiques intéressants pour simuler de nombreux phénomènes de notre vie quotidienne et sont donc un outil simple pour simuler des systèmes d'espace d'états discrets où la probabilité de tout comportement futur, qui est actuellement connu, ne peut être déterminée par tout ce qui concerne le passé dépend uniquement sur t (et non sur les instants s et $t+s$)

Définition 2.1.1 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est markovienne, si*

$$1. \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}, \quad \text{et } \forall x_1, \dots, x_{n+1} :$$

$$P([X_{t_{n+1}} = x_{n+1}] / [X_{t_1} = x_1] \cap \dots \cap [X_{t_n} = x_n]) = P([X_{t_{n+1}} = x_{n+1}] / [X_{t_1} = x_1])$$

$$2. \forall s, t, \text{ et pour tous } x, y \in E, P([X_{t+s} = y] / [X_s = x]) \text{ ne dépend que de } t \text{ (et non des instants } s \text{ et } t + s).$$

Notation 1 *Nous posons $\mathcal{P}_{x,y} = P([X_{t+s} = y] / [X_s = x]) = P([X_t = y] / [X_0 = x])$ et $P(t) = (\mathcal{P}_{x,y}(t))_{x,y \in E}$.*

Nous posons aussi $\vec{\pi}(t) = P_{X_t}$ (vecteur ligne de composantes

$$\pi_x(t) = P([X_t = x]).$$

Propriété 2.1.1

$$1. P(t) \text{ est une matrice stochastique, i.e } \mathcal{P}_{x,y}(t) \geq 0 \text{ et } \sum_y \mathcal{P}_{x,y}(t) = 1 \forall x.$$

$$2. \forall s \text{ et } \forall t, \quad P(s+t) = P(s)P(t).$$

$$3. \forall s \text{ et } \forall t, \quad \bar{\pi}(s+t) = \bar{\pi}(s)P(t).$$

Preuve 2.1.1

1. $\mathcal{P}_{x,y}(t) \in [0, 1]$ car c'est une probabilité. En plus de la ligne x correspondant à la loi

$P_{X_t}^{[X_0=x]}$ et on a :

$$\sum_y \mathcal{P}_{x,y}(t) = \sum_y P^{[X_0=x]}([X_t = y]) = 1$$

2. Pour calculer $\mathcal{P}_{x,y}(t+s) = P^{[X_0=x]}([X_{t+s} = y])$, on va utiliser la différence il indique qu'il peut être occupé à le temps t :

$$\begin{aligned} P^{[X_0=x]}([X_{t+s} = y]) &= \frac{P([X_0 = x] \cap [X_{t+s} = y])}{P([X_0 = x])} \\ &= \sum_{z \in E} \frac{P([X_0 = x] \cap [X_t = z] \cap [X_{t+s} = y])}{P([X_0 = x])} \\ &= \sum_{z \in E} \frac{P([X_{t+s} = y]/[X_0 = x] \cap [X_t = z])P([X_0 = x] \cap [X_t = z])}{P([X_0 = x])} \\ &= \sum_{z \in E} P([X_{t+s} = y]/[X_t = z])P([X_t = z]/[X_0 = x]) \end{aligned}$$

d'après la définition 2.1.1, on a

$$\mathcal{P}_{x,y}(t+s) = \sum_{z \in E} \mathcal{P}_{x,z}(t)\mathcal{P}_{z,y}(s)$$

qui est le coefficient (x, y) de la matrice produit $P(t) \times P(s)$.

$$3. \pi_y(t+s) = P([X_{t+s} = y]) = \sum_{x \in E} P([X_{t+s} = y]/[X_t = x])P([X_t = x])$$

c'est-à-dire

$$\pi_y(t+s) = \sum_{x \in E} \mathcal{P}_x(t)\mathcal{P}_{x,y}(s)$$

□

Suivant la nature de l'espace des états et l'espace du temps, les processus de Markov se divisent en quatre catégories comme indiqué dans le tableau en-bas :

Espace de temps	Espace des états	
	Discret	Continu
Discret	Chaîne de Markov discrete	Processus de Markov discret
Continu	Chaîne de Markov continue	Processus de Markov continu

TABLE 2.1 – Les catégories du processus de Markov

2.2 Chaînes de Markov à temps discret

Définition 2.2.1 on appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c-à-d : Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, \mathcal{E}) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états i_0, \dots, i_{n-1}, i pour lesquels la probabilité conditionnelle à un sens . On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vers un état j , par \mathcal{P}_{ij}

$$\mathcal{P}_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La matrice de transition $P = [\mathcal{P}_{ij}]_{i,j \in E}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.

2.2.1 Matrice de transition et graphe d'une chaîne de Markov

Définition 2.2.2 on appelle matrice de transition, la matrice $P = (\mathcal{P}_{i,j})_{i,j \in E}$

$$P = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{i_0,j_0} & \mathcal{P}_{i_0,j_1} & \mathcal{P}_{i_0,j_2} & \dots \\ \mathcal{P}_{i_1,j_0} & \mathcal{P}_{i_1,j_1} & \mathcal{P}_{i_1,j_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

la matrice de transition P de la chaîne discret (X_n) est une matrice carrée, constituée par les probabilités de transition . elle vérifie les propriétés : pour tout couple (i, j) de E :

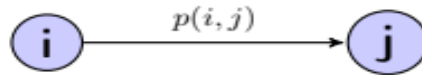
$$0 \leq \mathcal{P}_{ij} \leq 1$$

pour tout $i \in E$ ona

$$\sum_{j \in E} \mathcal{P}_{i,j} = 1$$

Lien avec les graphes.

La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène finie peut être associée à un graphe dont les sommets sont les états. Deux états i et j sont reliés par un arc



Exemple 1 On dispose de statistiques, de tableaux de chires, indiquant qu'il fait beau 50 façon naive de prédire le temps est la suivante

$$P(\text{beau}) = P(\text{mauvais}) = 0.5$$

La justification est la loi des grands nombres : l'hypothèse de base est que le climat du lendemain est indépendant du climat des autres jours. Malheureusement, on constate en examinant les chiffres qu'il y a 3 fois plus de chances que le climat du lendemain reste le même que celui d'aujourd'hui (plutôt qu'il ne change). On représente ce modèle par le diagramme

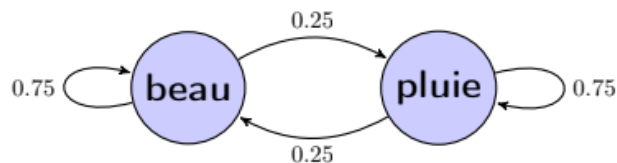


FIGURE 2.1 – Représentation des transitions pour le temps qu'il fait d'un jour au suivant.

ou encore par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Classification des états

On dit qu'un état j est accessible de l'état i s'il existe un $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_{ij}^{(n)} > 0$. Cela veut dire que si on est dans l'état i , la probabilité d'atteindre j éventuellement n'est pas nulle. Notez que i est toujours accessible de i .

Deux états i et j communiquent si chacun est accessible de l'autre. On note cela $i \leftrightarrow j$.

La communication est une relation d'équivalence : c'est réflexif et symétrique, et aussi transitif.

Les classes d'équivalence forment une partition de l'espace d'états E .

On les appelle les classes de communication.

La chaîne est irréductible si tous les états communiquent (une seule classe d'équivalence).

On peut représenter une chaîne de Markov à espace d'états discret par un graphe orienté.

Les états sont les sommets, les transitions de probabilité positive sont les arcs, et on peut aller de i à j en n étapes s'il y a un chemin de i à j de longueur n .

Exemple 2

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

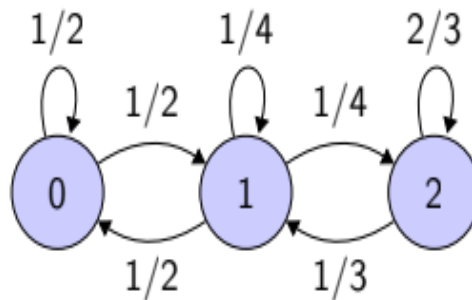


FIGURE 2.2 – Représentation de chaîne irréductible.

Ici, tous les états communiquent. La chaîne est irréductible.

Exemple 3

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

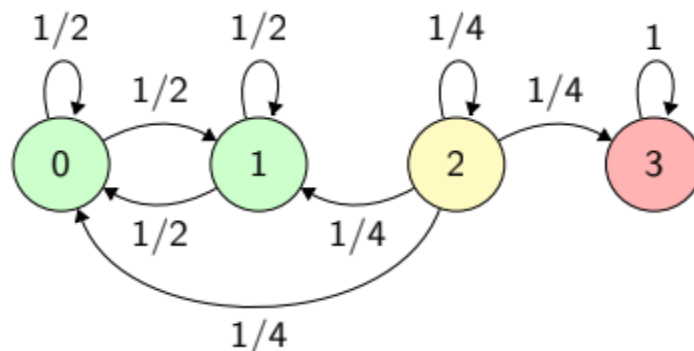


FIGURE 2.3 – Représentation du classes de chaîne .

Ici, on a trois classes : $\{0, 1\}$, $\{2\}$, et $\{3\}$. L'état 2 est transitoire et l'état 3 est absorbant.

Définition 2.2.3 Pour chaque état i , soit f_i la probabilité que si on part de i , on va y revenir ultérieurement. L'état i est dit **récurrent** si $f_i = 1$ (on est certain d'y revenir) et **transitoire** si $f_i < 1$.

2.2.3 Distribution stationnaire

Définition 2.2.4 Une distribution (vecteur stochastique) $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ est dite stationnaire par rapport à la matrice stochastique P si et seulement si elle est constante dans le temps i.e.

$$\pi = \pi P \tag{2.1}$$

Cette condition s'écrit de manière équivalente $\pi(P - Id) = 0$. Elle traduit le fait que si la chaîne de Markov est initialisée avec la distribution $\pi(0) = \pi$, alors le vecteur stochastique $\pi(t)$ est constant pour $t = 0, 1, 2, \dots$

Exemple 4 Soit la matrice stochastique

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul se fait en résolvant le système linéaire (2.1). Les équations linéaires de ce système ne sont pas linéairement indépendantes car en les additionnant membre à membre, on obtient l'identité triviale $1 = 1$. Il faut donc compléter ces équations par la condition $\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_n = 1$, ce qui donne sur l'exemple 4

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0 + \pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Les calculs donnent $\pi = (4/9, 1/9, 4/9)$.

2.3 Processus de Markov continu

2.3.1 Régime transitoire

Contrairement à ce qui se passe avec les chaînes de Markov à temps discret, nous n'avons pas ici un historique complet du processus : nous l'observons à un moment donné, nous pouvons en choisir autant que nous voulons, et en attribuer autant que nous voulons, mais la notion « d'unité de temps » n'a plus de sens ici, et la matrice $P = P(1)$ ne permet pas de déterminer $P(t)$ pour tout t .

L'idée est alors de considérer $P(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Grâce à $P(t+h) = P(t)P(h) = P(h)P(t)$ et à $P(0) = I$, on a :

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t) \frac{P(h) - I}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t)$$

Sous réserve d'existence des limites, si on pose $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = P'(h)$, on a alors :

$$P'(t) = P(t)A = AP(t) \text{ et } P(0) = I.$$

Cette équation différentielle matricielle admet l'unique solution :

$$P(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

On détermine donc A à partir de la famille $(P(t))_{t \geq 0}$, ($A = P'(0)$), mais à son tour, seule la connaissance de A permet de trouver tous les $P(t)$ ($P(t) = e^{At}$). La matrice A est appelée **le générateur infinitésimal** du processus.

On pose $A = (a_{x,y})_{x,y \in E}$. Ainsi, $a_{x,y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_{x,y}(h) - \delta_{x,y}}{h}$.

- Si $x \neq y$, $a_{x,y} \geq 0$ et $\mathcal{P}_{x,y}(h) = a_{x,y}h + o(h)$.
- Si $x=y$, $a_{x,y} \leq 0$ et $\mathcal{P}_{x,y}(h) = 1 + a_{x,y}h + o(h)$.

On a ici, pour tout $x \in E$, $\sum_{x \in E} a_{x,y} = 0$ (la somme sur chaque ligne de A vaut 0).

Propriété 2.3.1 Pour tout état $x \in E$, le temps passé dans x avant de le quitter suit une distribution exponentielle $\varepsilon(\lambda_x)$ avec $\lambda_x = -a_{x,x} = \sum_{y \neq x} a_{x,y}$.

Preuve 2.3.1 Si T_x désigne ici le temps passé en x avant de le quitter, on a :

$$P([T_x > t+h]) = P([T_x > t+h]/[T_x > t])P([T_x > t]).$$

On a dans le temps d'après l'homogénéité :

$$P([T_x > t+h]/[T_x > t]) = P([T_x > h]).$$

Ainsi, si on pose $G_x(t) = P([T_x > t])$, on obtient :

$$G_x(t+h) = G_x(t)G_x(h) \text{ avec } G_x(h) = \mathcal{P}_{x,x}(h) + o(h) = 1 + a_{x,x}h + o(h).$$

donc

$$\frac{G_x(t+h) - G_x(t)}{h} = G_x(t) \left(a_{x,x} + \frac{o(h)}{h} \right) \text{ et, en faisant } h \rightarrow 0, \text{ il vient :}$$

$$G'_x(t) = a_{x,x} \times G_x(t) \text{ avec } G_x(0) = 1,$$

soit $G_x(t) = e^{a_x, x^t}$ et $P([T_x \leq t]) = 1 - e^{a_x, x^t}$. \square

L'évolution d'un processus de Markov en temps continu peut être vue comme la répétition de deux étapes :

une étape (distribution exponentielle) est maintenue pendant un certain temps ; quand on quitte cet état, on choisit l'état qu'on quitte, cette destination ne dépend pas du le temps passé dans cet état ne dépend pas non plus de notre cheminement vers cet état. On notera la probabilité que $\mathcal{P}_{x,y}$ quitte l'état x et entre dans l'état y .

Propriété 2.3.2 : Pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq y$, $\mathcal{P}_{x,y} = \frac{a_{x,y}}{\sum_{z \neq x} a_{x,z}}$ (et $p_{x,x} = 0$).

Preuve 2.3.2 On a, si $\lambda_x = -a_{x,x} = \sum_{z \neq x} a_{x,z}$,

$$P([X_{t+h} \neq x] / [X_t = x]) = \lambda_x h + o(h).$$

et, pour $y \neq z$:

$$P([X_{t+h} = y] / [X_t = x]) = a_{x,y} h + o(h) = \mathcal{P}_{x,y} \lambda_x h + o(h).$$

d'après la définition de $\mathcal{P}_{x,y}$. C'est donc bien que $\mathcal{P}_{x,y} = \frac{a_{x,y}}{\lambda_x} = \sum_{z \neq x} a_{x,z}$. \square

2.3.2 Régime permanent

Rappelle que, si $\vec{\pi}(t)$ est la loi de X_t , c'est-à-dire $\vec{\pi}(t) = (\pi_x(t))_{x \in E}$ telle que $\pi_x(t) = P([X_t = x])$, on a :

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)P(t).$$

On a alors $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)$, $\forall t \geq 0$ et en dérivant l'équation précédente, on obtient :

$$\vec{\pi}(0)P'(t) = \vec{\pi}(0)P(t)A = \vec{\pi}(t)A = \vec{\pi}(0)A = 0.$$

Si (X_t) converge en loi et si $\vec{\pi}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{\pi}(t)$, alors $\vec{\pi}^\infty$ est distribution stationnaire du processus.

On a $(\vec{\pi}A)_y = \sum_{x \in E} \vec{\pi}_x a_{x,y} = \sum_{x \neq y} \vec{\pi}_x a_{x,y}$ avec $a_{y,y} = -\sum_{x \neq y} a_{y,x}$ ainsi :

$$\vec{\pi}A = \vec{0} \text{ équivaut à } \sum_{x \neq y} \vec{\pi}_x a_{x,y} = \sum_{x \neq y} \vec{\pi}_y a_{y,x}$$

Cette relation transforme l'équilibre du flux en $y \left(\sum_{x \neq y} \vec{\pi}_x a_{x,y} \right)$ en régime permanent

et sortie $y \left(\sum_{x \neq y} \vec{\pi}_y a_{y,x} \right)$.

2.4 propriété de Markov

Définition 2.4.1 Soit E un espace d'états discret. Une matrice $P = (P(x, y))_{x, y \in E}$ est une matrice de transition sur E (on dit aussi markovienne ou stochastique) si

$$P(x, y) \geq 0, \sum_{y \in E} P(x, y) = 1$$

Une suite de v.a $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur E de matrice P et de loi initiale π_0 si, pour tous n dans \mathbb{N} et $X_0 \dots, X_n$ dans E , on a

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n)$$

Par récurrence, $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur E de matrice P si et seulement

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = y) = \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)P(x_n, y).$$

La Définition 2.4.1 équivaut à la Propriété de Markov suivante, qui indique l'indépendance du passé et du futur d'une chaîne de Markov sachant son état présent.

Théorème 2.4.1 (Propriété de Markov) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice P .

Pour $n \geq 0$ et $B \in \mathcal{F}_n$ et $x \in E$ et $A \in \mathcal{F}_\infty$ on a

$$\mathbb{P}(B, X_n = x, \theta_n A) = \mathbb{P}(B, X_n = x)\mathbb{P}_x(A).$$

Ceci donne les formulations conditionnelles

$$\mathbb{P}(B, \theta_n A | X_n = x) = \mathbb{P}(B | X_n = x)\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(\theta_n A | B, X_n = x)\mathbb{P}_x(A).$$

La chaîne translatée $(X_k)_{k \geq 0} = (X_{n+k})_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice P et de loi initiale $\pi_n = \mathcal{L}(X_n)$ et conditionnellement à $X_n = x$ c'est une chaîne de Markov de matrice P issue de x et indépendante de \mathcal{F}_n , C'est à dire de (X_0, \dots, X_n) .

Démonstration : La théorie de la mesure permet de se limiter à considérer A dans $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$.

On peut alors écrire :

$$A = \{(X_0, \dots, X_k) \in E\}, B = \{(X_0, \dots, X_n) \in F\}$$

La définition 2.4.1 donne :

$$\mathbb{P}(B, X_n = x) = \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}, x) \in F} \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x),$$

$$\mathbb{P}_x(A) = \sum_{(x, x_1, \dots, x_k) \in E} P(x, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{k-1}, x_k),$$

$$\mathbb{P}(B, X_n = x, \theta_n A) = \sum_{\substack{(x_0, \dots, x_{n-1}, x) \in F \\ (x, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \in E}} \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x) \\ \times P(x, x_{n+1}) \dots P(x_{n+k-1}, x_{n+k}),$$

et un changement d indices évident donne la formule, qui exprime que (X_0, \dots, X_n) et $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ sont indépendants sachant $X_n = x$. En particulier

$$\mathbb{P}(X_n = x_0, \dots, X_{n+k} = x_k, X_{n+k+1} = y) = \mathbb{P}(X_n = x_0, \dots, X_{n+k} = x_k) P(x_k, y)$$

et $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice P issue de π_n

Ainsi, conditionnellement à $X_n = x$, le futur de la chaîne après n est donnée par une régénération depuis x indépendante du passé avant n . Passé et futur sont ici pris au sens large : B et $\theta_n A$ peuvent contenir des informations sur x_n dépassées par le fait que $X_n = x$

Tout ceci est illustré dans la figure 2.4 pour $T = n$ □

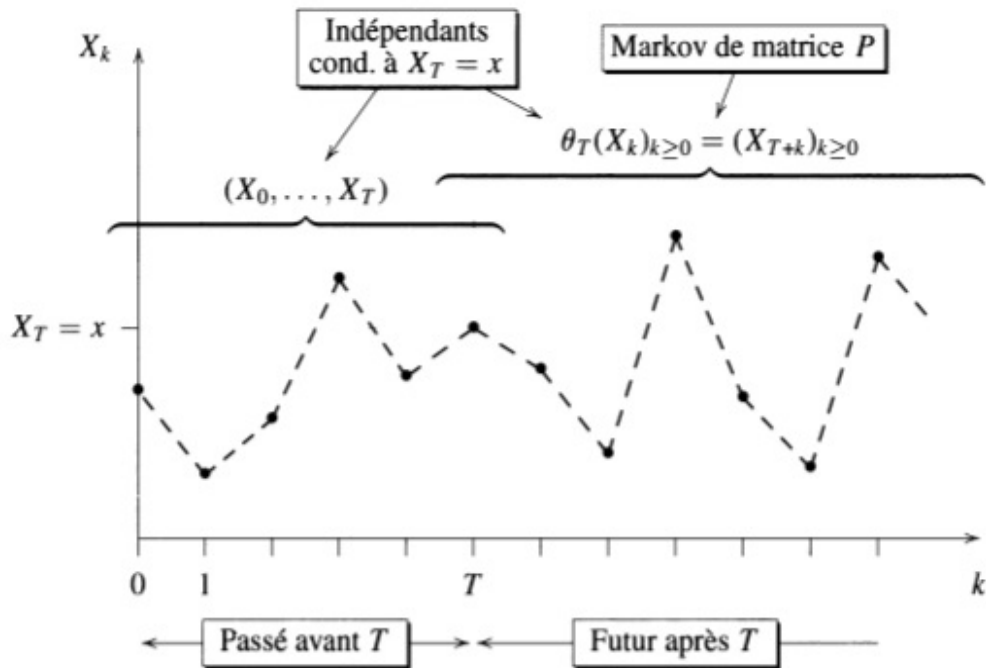


FIGURE 2.4 – Propriété de Markov forte. Les états successifs de la chaîne $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ sont représentés par les \bullet et sont interpolés linéairement, et T est un temps d'arrêt

Ces formules sont compactes, ont des interprétations riches, et s'étendent facilement, par exemple pour f et g positives ou bornées on a

$$\mathbb{E}(f(X_0, \dots, X_{n-1}, X_n)g(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) | X_n = x)$$

$$= \mathbb{E}(f(X_0, \dots, X_{n-1}, x) | X_n = x) \mathbb{E}_x(g(x, X_1, X_2, \dots)). \quad (2.2)$$

Nous allons les étendre en remplaçant $n \in \mathbb{N}$ par un certain type d'instant aléatoire.

2.5 Temps d'arrêt et Propriété de Markov forte

Un temps d'arrêt est un instant aleatoire que I on peut voir arriver en temps réel en observant la chaîne, et donc où l'on pourrait prendre une décision (telle que de s'arrêter de jouer) sans connaître le futur.

La notion de temps d'arrêt intervient de façon essentielle dans l'étude des processus stochastiques. Nous donnons ici les principaux résultats les concernant, du moins pour les temps d'arrêt à valeurs entières. Donnons en une définition précise

Définition 2.5.1 (Temps d'arrêt et son passé) Une v.a.T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} \{T = n\} &\in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ \{T \leq n\} &\in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ \{T > n\} &\in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

La tribu des événements du passé d'un temps d'arrêt T est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T &= \{B \in \mathcal{F}_\infty : B \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \geq 0\} \\ \mathcal{F}_T &= \{B \in \mathcal{F}_\infty : B \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \geq 0\} \end{aligned}$$

L'équivalence des définitions utilisant $\{T = n\}$ avec celles utilisant $T \leq n$ découle aisément de

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \{T = k\}, \quad \{T = n\} = \{T \leq n\} - \{T \leq n-1\},$$

et la définition de temps d'arrêt utilisant $\{T \leq n\}$ est bien équivalente à celle utilisant son complémentaire $\{T > n\} = \Omega - \{T \leq n\}$.

Sur $\{T = n\}$ on pose $X_T = X_n$, et $\theta_T = \theta_n$, et sur $\{T < \infty\}$ on a

$$\theta_T(X_n)_{n \geq 0} = (X_{T+n})_{n \geq 0}$$

$$A = \{(X_0, X_1, \dots) \in E\} \implies \theta_T A = \{(X_T, X_{T+1}, \dots) \in E\}.$$

Donc

$$X_T : \omega \in \{T < \infty\} \mapsto X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

et pour tout $B \in \mathcal{F}_T$ on peut déterminer si cet ω est dans B uniquement en considérant $X_0(\omega), \dots, X_T(\omega)$.

Exemple 5 Si T est un temps déterministe, C'est à dire si

$$\exists n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \mathbb{P}\{T = n\} = 1$$

, alors T est un temps d'arrêt, et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$.

Nous donnerons d'autres exemples, non triviaux, de temps d'arrêt après le théorème fondamental suivant, illustré dans la figure 2.4 .Il signifie que les enoncés du théorème 2.4.1 et de ses corollaires, tele (2.2) Sont encore vrais remplaçant n par un temps d'arrêt T , conditionnellement à $\{T < \infty\}$.

Théorème 2.5.1 (Propriété de Markov forte) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice P . Pour tout temps d'arrêt T et $B \in \mathcal{F}_T$ et $x \in E$ et $A \in \mathcal{F}_\infty$ on a

$$\mathbb{P}(T < \infty, B, X_T = x, \theta_T A) = \mathbb{P}(T < \infty, B, X_T = x, \theta_T A) \mathbb{P}_x(A)$$

. Ceci donne les formulations conditionnelles

$$\mathbb{P}(B, X_T = x, \theta_T A | T < \infty) = \mathbb{P}(B, X_T = x, \theta_T A | T < \infty) \mathbb{P}_x(A),$$

$$\mathbb{P}(B, \theta_T | T < \infty, X_T = x) = \mathbb{P}(B, | T < \infty, X_T = x) \mathbb{P}_x(A),$$

$$\mathbb{P}(\theta_T A | T < \infty, B, X_n = x) = \mathbb{P}(A).$$

Conditionnellement à $T < \infty$, la chaîne translatée $\theta_T(X_k)_{k \geq 0} = (X_{T+k})_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale $\mathcal{L}(X_T | T < \infty)$ et de matrice P , et conditionnellement à $T < \infty$ et $X_T = x$, C'est une chaîne de Markov de matrice P issue de x indépendante de \mathcal{F}_T , et en particulier de (T, X_0, \dots, X_T) .

Démonstration : On a

$$\mathbb{P}(T < \infty, B, X_T = x, \theta_T A) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n, B, X_n = x, \theta_n A)$$

et comme $B \in \mathcal{F}_T$ et donc par définition

$$\{T = n\} \cap B \in \mathcal{F}_n$$

le théorème implique

$$\mathbb{P}(T = n, B, X_n = x, \theta_n A) = \mathbb{P}(T = n, B, X_n = x, \theta_n A) \mathbb{P}_x(A)$$

et on conclut en sommant la série ainsi obteue. □

Remarque 3 Ainsi, un dernier temps d'atemie. un temps d'obtention d'un maximum, etc,... ne sont typiquement pas des temps d'arrêt, car la connaissance du futur qu'ils impliquent fait qu'ils ne conviennent pas pour appliquer la Propriete de Markov forte.

Processus de Markov et équations différentielles stochastiques

Ce chapitre consiste à une introduction à la théorie des équations différentielles stochastiques. On étudie seulement les ingrédients essentiels de la théorie, à savoir la notion des solutions fortes et faibles, existence et unicité de solution d'une équation différentielle à coefficients lipschitziens, ainsi que la propriété de Markov forte de cette solution.

3.1 Solutions faibles et fortes

Les équations différentielles stochastiques (EDS) peuvent être vues comme des équations différentielles, ou comme des équations intégrales dans lesquelles interviennent des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien. Elles ont été d'abord étudiées par Itô, dans le but de construire les diffusions (c'est-à-dire, processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). C'est d'ailleurs dans ce but qu'il avait introduit le calcul stochastique.

Un point de vue plus moderne consiste à voir les EDS comme des équations différentielles ordinaires, perturbées par un bruit aléatoire. Typiquement, on considère une équation différentielle de la forme $y'(t) = b(t, y(t))$, que l'on écrit sous forme différentielle $dy_t = b(t, y_t)dt$. On la perturbe en ajoutant un bruit de la forme σB , où B est un mouvement brownien, et $\sigma > 0$ est une constante (qui représente l'intensité du bruit).

On obtient l'EDS $dy_t = b(t, y_t)dt + \sigma dB_t$, c'est-à-dire sous forme intégrale

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(s, y_s)ds + \sigma B_t$$

Plus généralement, on peut autoriser à dépendre du temps t et de l'état au temps t , c'est-à-dire $\sigma = \sigma(t, y_t)$, de sorte que l'EDS devienne

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(s, y_s)dB_s + \int_0^t b(s, y_s)ds.$$

On se donne une définition formelle (et multidimensionnelle).

Définition 3.1.1 Soient $d \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mesurables et localement bornées¹. On écrit $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$. On considère l'EDS suivante que l'on appelle $E(\sigma, b)$:

$$dX_t = (t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt.$$

On dit que $E(\sigma, b)$ admet une **solution** s'il existe :

- un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ dont la filtration est continue à droite et complète ;
- sur cet espace, un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien $B = (B^1, \dots, B^m)$
- un processus $X = (X^1, \dots, X^d)$ qui est (\mathcal{F}_t) -adapté et continu, tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t (s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds;$$

c'est-à-dire pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)ds.$$

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B, X)$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$.

Définition 3.1.2

(i) On dit qu'il y a **existence faible** pour $E(\sigma, b)$, si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.

1. La condition que σ et b soient localement bornées assure que les intégrales $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ et $\int_0^t b(s, X_s)ds$ sont bien définies. Il arrive, par un abus de notation, que l'on s'intéresse à des EDS dont les coefficients et b ne sont pas localement bornés, mais pour lesquelles ces intégrales sont encore bien définies.

(ii) On dit qu'il y a **unicité faible** pour $E(\sigma, b)$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont la même loi.

Exemple 6 On s'intéresse à l'EDS

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)dB_t,$$

où $\operatorname{sgn}(u) = \mathbf{1}_{\{u>0\}} - \mathbf{1}_{\{u\leq 0\}}$ pour $u \in \mathbb{R}$.

On se donne un espace de probabilité filtré² $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ sur lequel est défini un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien β avec $\beta_0 = x \in \mathbb{R}$. On pos

$$B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s)ds.$$

Le théorème de Lévy nous dit que B est un mouvement brownien issu de 0. Comme $\beta_t = x + \int_0^t \operatorname{sgn}(\beta_s)ds$, on voit qu'il y a existence faible pour notre EDS, qui possède la propriété d'unicité faible, car d'après le théorème de Lévy (théorème 1.4.1 du chapitre 1), toute solution de $E_x(\sigma, b)$ est un mouvement brownien issu de x .

Exemple 7 (Résolution par le théorème de Girsanov). On s'intéresse à l'EDS

$$dX_t = dB_t + b(t, X_t)dt,$$

où $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée.

Soit X un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Soit Q la mesure de probabilité sur F_∞ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t b(s, X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s, X_s)ds\right) \bullet \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}.$$

la probabilité \mathbb{Q} est bien définie, au moins sur l'espace canonique du mouvement brownien]. On pose $B_t = X_t - \int_0^t b(s, X_s)ds$. D'après le théorème de Girsanov, (B_t) est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} . Donc $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{Q}, B, X)$ est une solution.

Exemple 8 (Résolution par changement de temps). On s'intéresse à l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t,$$

où $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ est une fonction continue.

2. Rappelons que la filtration est toujours supposée d'être complète et continue à droite.

On se donne un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien (β_t) avec $\beta_0 = x \in \mathbb{R}$. On pose $M_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(\beta_s)} d\beta_s$. Ainsi, $\langle M \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(\beta_s)} ds$, qui est continu et strictement croissant. Comme est récurrent, on voit que $\langle M \rangle_\infty = \infty$ p.s.

Soit $\tau(t) = \inf\{s : \langle M \rangle_s > t\}$. Donc $\langle M \rangle_{\tau(t)} = \tau(\langle M \rangle_t) = t$. D'après le théorème de Dambis-Dubins-Schwarz (théorème 1.4.2 du chapitre 1), $B_t = M_{\tau(t)}$ est un $(\mathcal{F}_{\tau(t)})$ -mouvement brownien.

si H est un processus continu adapté, alors

$$\int_0^{\tau(t)} H_s dM_s = \int_0^t H_{\tau(s)} dM_{\tau(s)}.$$

On pose

$$X_t = \beta_{\tau(t)} = x + \int_0^{\tau(t)} d\beta_s = x + \int_0^{\tau(t)} \sigma(\beta_s) dM_s = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s.$$

Donc $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{\tau(t)}), \mathbb{P}, B, X)$ est une solution.

Définition 3.1.3 (i) On dit que l'EDS $E(\sigma, b)$ a la propriété d'**unicité trajectorielle** si, deux solutions X et \tilde{X} associées au même espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et au même mouvement brownien B telles que $X_0 = \tilde{X}_0$ p.s., sont indistinguables, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t, \forall t \geq 0) = 1$

(ii) Fixons un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ (dont la filtration est continue à droite et complète) et un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien B . On dit que X est une **solution forte** de $E(\sigma, b)$ si elle est adaptée par rapport à la filtration canonique de B .

Exemple 9 Considérons l'EDS suivante :

$$dX_t = \text{sgn}(X_t) dB_t,$$

On a vu existence et unicité au sens faible pour cette EDS dans l'exemple 6. Il n'y a, en revanche, pas d'unicité trajectorielle pour cette EDS. En effet, si X est une solution de l'EDS avec $X_0 = 0$, alors $-X$ est aussi une solution (en rappelant que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{x_s=0\}} dB_s = 0$).

[Cette EDS n'a pas de solution forte. Si X est une solution issue d'une valeur déterministe, il est connu que la filtration canonique de B coïncide avec celle de $|X|$, qui est strictement plus petite que celle de X .]

Exemple 10 *Considérons l'EDS suivante :*

$$dX_t = \lambda X_t dB_t$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait d'après le théorème 1.4.4 du chapitre 1 qu'il y a unicité trajectorielle pour cette EDS, et que pour tout x , l'unique solution forte de $E_x(\sigma, b)$ est $X_t = xe^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$.

On verra que les coefficients de cette EDS satisfont les conditions du théorème 3.2.1 pour unicité trajectorielle d'une EDS.

Le théorème suivant, que l'on admettra sans preuve, relie les différentes notions d'existence et d'unicité.

Théorème 3.1.1 (Yamada-Watanabe) *S'il y a existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a aussi unicité faible. De plus, dans ce cas, pour tout espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et tout (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien B , il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution $E_x(\sigma, b)$, qui est forte.*

3.2 Coefficients lipschitziens

On établit dans cette section existence forte et unicité trajectorielle pour une famille importante de coefficients. Durant toute la section, on émet l'hypothèse suivante sur les coefficients.

Hypothèse 3.2.1 *Les fonctions σ et b sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, et lipschitziennes en la variable x :*

il existe une constante $K \in]0, \infty[$ telle que

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_1|x - y|$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K_2|x - y|, \quad \forall t \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Théorème 3.2.1 *Sous l'hypothèse 3.2.1, il y a unicité trajectorielle pour $E(\sigma, b)$. De plus, pour tout espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et tout (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien B , il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une (unique) solution de $E_x(\sigma, b)$, qui est forte.*

Remarque 4 (i) *Le théorème entraîne en particulier qu'il y a existence faible pour $E(\sigma, b)$. La propriété d'unicité faible découlera de l'unicité trajectorielle et du théorème de Yamada-Watanabe.*

(ii) *Il est possible d'affaiblir l'hypothèse 3.2.1. Par exemple, l'hypothèse de continuité en la variable t n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup_{t \in [0, T]} |\sigma(t, x)|$ et*

$\sup_{t \in [0, T]} |b(t, x)|$ pour x et T fixés. On peut aussi "localiser" l'hypothèse sur le caractère lipschitzien de b (la constante K dépendra du compact sur lequel on considère t et x, y), à condition de conserver une condition de croissance linéaire

$$|\sigma(t, x)| \leq K_3(1 + |x|), \quad |b(t, x)| \leq K_4(1 + |x|).$$

Lemme 3.2.1 Soit E un espace de Banach, et $\Phi : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est-à-dire pour tous $x, y \in E$, $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \rho \|x - y\|$, où $\rho < 1$. Alors il existe un unique point fixe de Φ , c'est-à-dire, un unique élément $x^* \in E$ tel que $x^* = \Phi(x^*)$. De plus, pour tout $x \in E$, $\Phi^n(x) \rightarrow x^*$.

preuve du lemme 3.2.1. L'unicité est évidente, car si y^* est aussi un point fixe, alors

$$\|x^* - y^*\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(y^*)\| \leq \rho \|x^* - y^*\|, \text{ et donc } x^* = y^*.$$

Pour l'existence, soit $x_0 \in E$ quelconque, et on pose $x_n = \Phi^n(x_0)$. Par hypothèse, pour tous $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|\Phi^n(x) - \Phi^n(y)\| &\leq \rho \|\Phi^{n-1}(x) - \Phi^{n-1}(y)\| \\ &\leq \rho^2 \|\Phi^{n-2}(x) - \Phi^{n-2}(y)\| \\ &\leq \dots \leq \rho^n \|x - y\|, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\| &\leq \sum_{i=1}^k \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \\ &= \sum_{i=1}^k \|\Phi^{n+i}(x_0) - \Phi^{n+i-1}(x_0)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \rho^{n+i-1} \|\Phi(x_0) - x_0\| \\ &\leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|\Phi(x_0) - x_0\|, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 (quand $n \rightarrow \infty$), uniformément pour tout k . Donc (x_n) est une suite de Cauchy, qui converge vers une limite, notée $x_\infty \in E$.

Dans l'identité $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, on fait $n \rightarrow \infty$: comme est de toute évidence continue, on obtient $x_\infty = \Phi(x_\infty)$. Par unicité, on a $x_\infty = x^*$. \square

On fixe maintenant des réels $a > 0$ et $T > 0$. Soit $E_{a,T}$ l'espace des processus U adaptés et continus sur $[0, T]$ tels que $\mathbb{E}[(U_T^*)^2] < \infty$, où $U_t^* = \sup_{s \in [0,t]} |U_s|$. Soit

$$\| U \| = \sup_{t \in [0,T]} (e^{at} \sqrt{\mathbb{E}[(U_t^*)^2]}). \quad (3.1)$$

On vérifie facilement que $(E_{a,T}, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.

Lemme 3.2.2 Soit $U \in E_{a,T}$, et soit B un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien issu de 0. Posons $M_t = \int_0^t U_s dB_s$ et $V_t = \int_0^t U_s ds$. Alors

$$\| M \| \leq \frac{c}{\sqrt{a}} \| U \|,$$

où $c \in]0, \infty[$ est une constante numérique.

preuve du lemme 3.2.2. D'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (théorème 1.4.3 du chapitre 1), il existe une constante numérique $0 < c < \infty$ telle que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}[(M_t^*)^2] \leq c \mathbb{E}[\langle M \rangle_t] = c \int_0^t \mathbb{E}[|U_s|^2] ds \leq c \int_0^t \mathbb{E}[(U_s^*)^2] ds,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} e^{-2at} \mathbb{E}[(M_t^*)^2] &\leq c \int_0^t e^{-2a(t-s)} e^{-2as} \mathbb{E}[(U_s^*)^2] ds \\ &\leq c \int_0^t e^{-2a(t-s)} \| U \|^2 ds \\ &= \frac{c}{2a} (1 - e^{-2at}) \| U \|^2 \\ &\leq \frac{c}{2a} \| U \|^2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'inégalité pour $\| U \|$ (en élargissant la valeur de la constante c si nécessaire). Pour montrer la deuxième inégalité, on remarque que

$$V_t^2 \leq 2 \int_0^t |U_s| \left| \int_0^s d_r U_r \right| ds = 2 \int_0^t |U_s| |V_s| ds,$$

et donc pour tout $\lambda > 0$,

$$(V_t^*)^2 \leq 2 \int_0^t |U_s| |V_s| ds \leq \lambda \int_0^t U_s^2 ds + \frac{1}{\lambda} \int_0^t V_s^2 ds.$$

On tire comme plus haut,

$$e^{-2at}\mathbb{E}[(V_t^*)^2] \leq \frac{\lambda}{2a}\|U\|^2 + \frac{1}{2a\lambda}\|V\|^2.$$

En prenant $\lambda = \frac{\|V\|}{\|U\|}$ (remarquons que $\|V\| \leq T\|U\| < \infty$), ceci implique que $\|V\|^2 \leq \frac{\|U\|\|V\|}{a}$, et donc $\|V\| \leq \frac{\|U\|}{a}$. \square

Lemme 3.2.3 (Lemme de Gronwall). Soient $N > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ des réels. Soit $h : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et bornée telle que $h(t) \leq a + b \int_0^t h(s)ds$, $t \in [0, N]$. Alors $h(t) \leq ae^{bt}$ pour tout $t \in [0, N]$.

preuve du lemme 3.2.3. Posons $H(t) = a + b \int_0^t h(s)ds$ et $G(t) = a + b \int_0^t H(s)ds$, $t \in [0, N]$. Par hypothèse, on a, pour $t \in [0, N]$,

$$h(t) \leq H(t) \leq G(t).$$

On constate que G est de classe C^1 , avec

$$(e^{-bt}G(t))' = -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}G'(t) = -be^{-bt}G(t) + be^{-bt}H(t) \leq 0,$$

on voit que $e^{bt}G(t) \leq G(0) = a$, c'est-à-dire que $G(t) \leq ae^{bt}$. Il sut alors de rappeler que $h \leq G$. \square

preuve du théorème 3.2.1. Pour simplifier l'écriture, on ne traite que le cas où $d = m = 1$.

Unicité trajectorielle : Soient X et \tilde{X} deux solutions (sur le même espace, avec le même mouvement brownien), telles que $X_0 = \tilde{X}_0$. Fixons $M > 0$.

Posons :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \mid |X_t| \geq M \text{ ou } |\tilde{X}_t| \geq M\}, \quad \inf \phi = \infty.$$

Pour tout t ,

$$X_{t \wedge \tau} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X_s)ds,$$

et on a une équation similaire pour \tilde{X} à la place de X . En faisant la différence entre ces deux équations, et à l'aide de l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|X_{t \wedge \tau} - \tilde{X}_{t \wedge \tau}|^2 \right] \\ & \leq 2\mathbb{E} \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau} [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \tilde{X}_s)]dB_s \right|^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau} [b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)]ds \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Par inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (théorème 1.4.3 du chapitre 1), il existe une constante numérique c telle que $\mathbb{E}[|X_{t \wedge \tau} - \tilde{X}_{t \wedge \tau}|^2]$ est majorée par

$$c \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, \tilde{X}_s)|^2 ds \right] + 2\mathbb{E} \left[t \int_0^{t \wedge \tau} |b(s, X_s) - b(s, \tilde{X}_s)|^2 ds \right],$$

(on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le deuxième terme.)

À l'aide de l'hypothèse 3.2.1, pour tout $N > 0$ et tout $t \in [0, N]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|X_{t \wedge \tau} - \tilde{X}_{t \wedge \tau}|^2 \right] &\leq c \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_s - \tilde{X}_s|^2 ds \right] + 2N \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_s - \tilde{X}_s|^2 ds \right] \\ &= (c + 2N) K^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s - \tilde{X}_s|^2 \mathbf{1}_{[0, \tau]}(s) ds \right] \\ &\leq (c + 2N) K^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_{s \wedge \tau} - \tilde{X}_{s \wedge \tau}|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Donc si $h(t) = \mathbb{E}[|X_{t \wedge \tau} - \tilde{X}_{t \wedge \tau}|^2]$, alors pour tout $t \leq N$, $h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds$, où $C = (c + 2N)K^2$. Comme h est bornée (majorée par $4M^2$), il résulte du lemme de Gronwall que $h = 0$ sur $[0, N]$.

Donc $X_{t \wedge \tau} = \tilde{X}_{t \wedge \tau}$ pour $t \in [0, N]$. En faisant $M \rightarrow \infty$ et ensuite $N \rightarrow \infty$, on obtient $X_t = \tilde{X}_t$ p.s. Les deux processus étant continus, ils sont indistinguables.

Existence : On construit la solution par la méthode de Picard. Soient $T > 0$ et $a > 0$. On se met dans l'espace $E_{a,T}$ muni de la norme $\| \cdot \|$ qui est définie dans (3.1). Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'application : $E_{a,T} \rightarrow E_{a,T}$ définie par

$$\Phi(X) = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds.$$

[Le fait que Φ est une application à valeurs dans $E_{a,T}$ est une conséquence du lemme 3.2.2] Par définition,

$$\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t = \int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)] dB_s + \int_0^t [b(s, X_s) - b(s, Y_s)] ds.$$

On applique le lemme 3.2.2 aux deux intégrales à droite de l'identité. Pour la première intégrale, on prend $U_t = \sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)$ et par l'hypothèse 3.2.1,

$$\mathbb{E}[(U_t^*)^2] \leq K^2 \mathbb{E}\{[(X - Y)_t^*]^2\},$$

ou encore $\|U\| \leq K\|X - Y\|$. Pour la seconde intégrale, on prend $U_t = b(t, X_t) - b(t, Y_t)$, alors $\mathbb{E}[(U_t^*)^2] \leq K^2 \mathbb{E}\{[(X - Y)_t^*]^2\}$ et donc $\|U\| \leq K\|X - Y\|$. Par conséquent,

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \frac{c}{\sqrt{a}} K \|X - Y\| + \frac{1}{a} K \|X - Y\| = K \left(\frac{c}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a} \right) \|X - Y\|.$$

Prenons a suffisamment grand pour que $K \left(\frac{c}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a} \right) < 1$, et donc Φ est une application contractante sur $E_{a,T}$. D'après le lemme 3.2.1, elle a un unique point fixe, qui selon l'unicité trajectorielle (démontrée ci-dessus) est la seule solution sur $[0, T]$ de $E_x(\sigma, b)$, qui est forte. Comme T est quelconque, on a prouvé l'existence d'une solution forte de $E_x(\sigma, b)$, en s'appuyant sur le fait que la restriction sur $[0, T]$ de l'unique solution sur $[0, T']$ (avec $T' > T$) est nécessairement l'unique solution sur $[0, T]$. \square

La preuve du théorème 3.2.1 permet également d'établir la continuité de la solution par rapport aux conditions initiales.

Théorème 3.2.2 *Supposons que l'hypothèse 3.2.1 est satisfaite. Pour tout x , notons $X^x = (X_t^x, t \geq 0)$ l'unique solution (nécessairement forte) de $E_x(\sigma, b)$. Alors lorsque a est suffisamment grand, on a*

$$\sup_{t \geq 0} \left(e^{-at} \sqrt{\mathbb{E}\{[(X^x - X^y)_t^*]^2\}} \right) \leq C(a, K) |x - y|,$$

où $C(a, K)$ est une constante ne dépendant que de (a, K) . En particulier, si a est grand et $T > 0$ est quelconque, l'application $x \rightarrow X^x$ définie sur \mathbb{R}^d à valeurs dans $E_{a,T}$ est continue (et même lipschitzienne).

Démonstration : Fixons pour l'instant $a > 0$ et $T > 0$. Soient $X^{(0)} = x, Y^{(0)} = y$, et

$$X_t^{(n+1)} = x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds,$$

$$Y_t^{(n+1)} = y + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s + \int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds.$$

D'après (la preuve du) théorème 3.2.1, $X^{(n)} \rightarrow X^x$ et $Y^{(n)} \rightarrow X^y$ (dans $E_{a,T}$).

D'autre part,

$$\begin{aligned} X_t^{(n+1)} - Y_t^{(n+1)} &= x - y + \int_0^t [\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, Y_s^{(n)})] dB_s \\ &\quad + \int_0^t [b(s, X_s^{(n)}) - b(s, Y_s^{(n)})] ds, \end{aligned}$$

de sorte que, d'après le lemme 3.2.2,

$$\|X^{(n+1)} - Y^{(n+1)}\| \leq |x - y|K\left(\frac{c}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a}\right)\|X^{(n)} - Y^{(n)}\|.$$

Quand a est suffisamment grand, $k = +K\left(\frac{c}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a}\right) < 1$. Soit $a_n = \|X^{(n)} - Y^{(n)}\|$, alors $a_{n+1} \leq |x - y| + ka_n$. Par itération, cela nous donne

$$a_{n+1} \leq |x - y| + k|x - y| + k^2a_{n+1} \leq \dots \leq |x - y|\sum_{j=0}^n k^j + k^{n+1}a_0.$$

Or, $a_0 = |x - y|$, et on tire $\|X^{(n)} - Y^{(n)}\| \leq \frac{|x-y|}{1-k}$. D'où le théorème, avec $C(a, K) = \frac{1}{1-k}$.

□

Exemple 11 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ des réels. Considérons l'EDS sur \mathbb{R} :

$$dX_t = \alpha X_t dB_t + \beta X_t dt.$$

Le théorème 3.2.1 garantit unicité trajectorielle de l'EDS. On s'intéresse à l'unique solution de cette EDS avec condition initiale $X_0 = x \in \mathbb{R}$. Dans le cas particulier où $\beta = 0$, la solution de $dX_t = \alpha X_t dB_t$ (avec $X_0 = x$) est la martingale exponentielle $X_t = xe^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$.

Dans le cas général, la solution est $X_t = xe^{\alpha B_t + (\beta - \frac{\alpha^2}{2})t}$ (un prix bien doté a été décerné à cette solution). Ce processus, souvent utilisé pour modéliser le cours d'une action en mathématiques financières, porte le nom du "**mouvement brownien géométrique**".

3.3 Propriété de Markov et diffusions

On ne s'intéresse désormais qu'au cas homogène, à savoir que lorsque les coefficients dépendent seulement du paramètre espace :

$$\sigma(t, x) = \sigma(x), \quad b(t, x) = b(x). \quad (3.2)$$

On fixe un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ dont la filtration est continue à droite et complète, et un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien B . Comme dans le théorème 3.2.2, on note $X^x = (X_t^x, t \geq 0)$ l'unique solution de $E_x(\sigma, b)$ si l'hypothèse 3.2.1 est satisfaite.

Théorème 3.3.1 (Propriété de Markov forte). *Sous l'hypothèse 3.2.1, la famille $(X^x, x \in \mathbb{R}^d)$ est fortement markovienne : si T est un temps d'arrêt fini p.s., et si $F : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors*

$$\mathbb{E}[F(X_{T+t}^x, t \geq 0) | \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[F(X_t^y, t \geq 0)] \quad \text{avec } y = X_T^x.$$

Remarque 5 *Le théorème nous dit que pour tout temps d'arrêt fini T , la loi conditionnelle du "futur" ($X_{T+t}^x, t \geq 0$) connaissant le passé (et le présent) \mathcal{F}_T est la loi de X partant de X_T , qui ne dépend que du présent à l'instant T . Dans le cas particulier $\sigma = Id$, $b = 0$, le théorème se réduit à la propriété de Markov forte du mouvement brownien, formulée de manière légèrement différente.*

Démonstration : Par définition,

$$X_{T+t}^x - X_T^x = \int_T^{T+t} \sigma(X_s^x) dB_s + \int_T^{T+t} b(X_s^x) ds, \quad t \geq 0.$$

Notons $Y_t = X_{T+t}^x$ et $y = X_T^x$. Alors

$$Y_t = y + \int_T^{T+t} \sigma(X_s^x) dB_s + \int_0^t b(Y_s) ds, \quad t \geq 0.$$

Soit $B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T, t \geq 0$, qui est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T . Pour tout processus continu adapté H , on a

$$\int_T^{T+t} H_s dB_s = \int_0^t H_{T+s} dB_s^{(T)}.$$

Donc $Y_t = y + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s^{(T)} + \int_0^t b(Y_s) ds$. Ceci implique que conditionnellement à la tribu \mathcal{F}_T , $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{T+t}), \mathbb{P}, B^{(T)}, Y)$ est une solution pour l'EDS $E_y(\sigma, b)$. D'autre part, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B, X^y)$ est également une solution de $E_y(\sigma, b)$. Par unicité faible (qui est une conséquence du théorème de Yamada-Watanabe), la loi conditionnelle de Y sachant \mathcal{F}_T , est identique à celle de X^y . \square

On s'intéresse aux processus fortement markoviens et à trajectoires continues, du type considéré dans le théorème 3.3.1. Il est important de pouvoir attacher des martingales locales à ces processus.

Théorème 3.3.2 *Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Soit*

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad (3.3)$$

où σ^* désigne la transposée de la matrice. Si X est une solution de $E(\sigma, b)$, et si σ et b

sont continues, alors

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)ds, \quad t \geq 0,$$

est une martingale locale continue.

Démonstration : Par la formule d'Itô,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \text{martingale locale continue} + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_s) b_i(X_s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(X_s) \sigma_{jk}(X_s) ds \\ &= \text{martingale locale continue} + \int_0^t \mathcal{L}f(X_s) ds. \end{aligned}$$

D'où le résultat cherché. □

Remarque 6 (i) Dans le théorème 3.3.2, si $f \in \mathcal{C}_c^2$ (de classe \mathcal{C}^2 à support compact), alors

$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)ds$ est une martingale (car une martingale locale continue M telle que $\mathbb{E}(\sup_{s \in [0,t]} |M_s|) < \infty, \forall t \geq 0$, est une martingale).

(ii) Sous l'hypothèse 3.2.1, X est un processus de Markov fort. On traduit alors le théorème 3.3.2 en disant que \mathcal{L} est le générateur infinitésimal (qui est un opérateur différentiel du second ordre) du processus de Markov X . Le processus X permet de donner une approche ou une interprétation probabiliste de nombreux résultats analytiques concernant l'opérateur \mathcal{L} . Ces liens entre probabilités et analyse ont été une motivation importante pour l'étude des équations différentielles stochastiques.

(iii) Sous l'hypothèse 3.2.1, X est un processus fortement markovien et continu tel que pour toute $f \in \mathcal{C}_c^2$, $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)ds$ soit une vraie martingale, où \mathcal{L} est l'opérateur différentiel du second ordre défini dans (3.3). On dira que X est une diffusion (homogène), de coefficient de diffusion σ et de coefficient de drift b . Les EDS apportent une construction explicite de diffusion.

4.1 Marche aléatoire sur \mathbb{Z}

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient la suite $(\epsilon_t)_{t \in I}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes telles que

$$P(\epsilon_t = 1) = p = 1 - p = P(\epsilon_t = -1), \forall t$$

et où I est un ensemble dénombrable.

Soient maintenant la suite $(X_t)_{t \in I}$ des variables aléatoires indépendantes. On définit la relation

$$X_{t+1} = X_t + \epsilon_{t+1}, X_0 = 0 = \epsilon_0$$

La marche aléatoire sur \mathbb{Z} c'est la suite de variables aléatoires $(X_t)_{t \in I}$ lorsque $I = \mathbb{N}$ et quand $X_t \in \mathbb{Z}, \forall t$.

La marche aléatoire sur \mathbb{Z} est un processus de Markov.

Le figure 4.2 représente une trajectoire possible pour une marche aléatoire où $n = 100$: nombre des étapes et le nombre de pas de la marche est $t = 1$

•Code R

```
## Marche aléatoire
n<-100 #nombre des étapes
X<-seq(0, 1, 1/n)
X
```

CHAPITRE 4. APPLICATION

```
[1] 0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.10 0.11 0.12 0.13 0.14
[16] 0.15 0.16 0.17 0.18 0.19 0.20 0.21 0.22 0.23 0.24 0.25 0.26 0.27 0.28 0.29
[31] 0.30 0.31 0.32 0.33 0.34 0.35 0.36 0.37 0.38 0.39 0.40 0.41 0.42 0.43 0.44
[46] 0.45 0.46 0.47 0.48 0.49 0.50 0.51 0.52 0.53 0.54 0.55 0.56 0.57 0.58 0.59
[61] 0.60 0.61 0.62 0.63 0.64 0.65 0.66 0.67 0.68 0.69 0.70 0.71 0.72 0.73 0.74
[76] 0.75 0.76 0.77 0.78 0.79 0.80 0.81 0.82 0.83 0.84 0.85 0.86 0.87 0.88 0.89
[91] 0.90 0.91 0.92 0.93 0.94 0.95 0.96 0.97 0.98 0.99 1.00
```

```
Z<-c(0,sample(c(-1,1),size=n,replace=TRUE))
```

```
Z
```

```
[1] 0 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 1 1 1 1 -1
[27] 1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1
[53] 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1
[79] -1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1
```

```
plot(X,Z,type="l")
```

```
Y<-cumsum(Z) #compute cumulative sum
```

```
Y
```

```
[1] 0 1 2 3 2 3 2 1 0 1 0 -1 0 1 0 -1 -2 -1 -2
[20] -1 0 1 2 3 4 3 4 5 4 3 4 3 2 1 0 1 0 1
[39] 2 1 2 1 0 -1 0 -1 -2 -1 0 -1 -2 -1 0 -1 -2 -3 -4
[58] -3 -4 -5 -6 -5 -6 -5 -6 -5 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -10 -9
[77] -10 -9 -10 -9 -10 -11 -10 -11 -10 -11 -12 -13 -12 -13 -14 -13 -14 -15 -16
[96] -17 -16 -17 -16 -17 -18
```

```
plot(X,Y,type="l",Ylim= c(-7,7),main="Marche aléatoire")
```

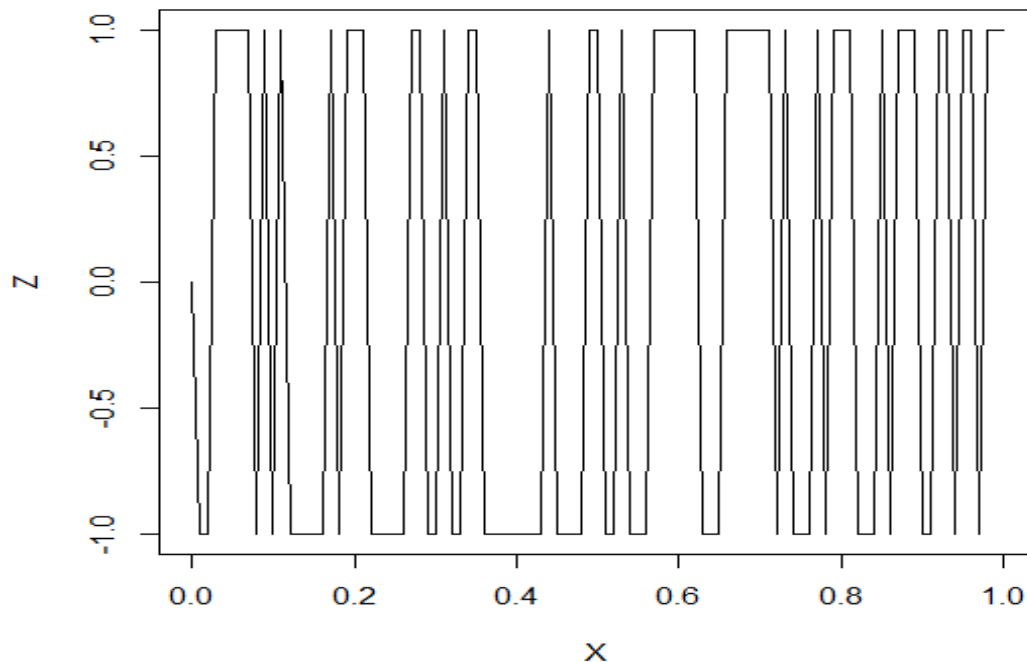


FIGURE 4.1 – Trajectoire d'un échantillon d'événement Bernoullien

Marche aléatoire

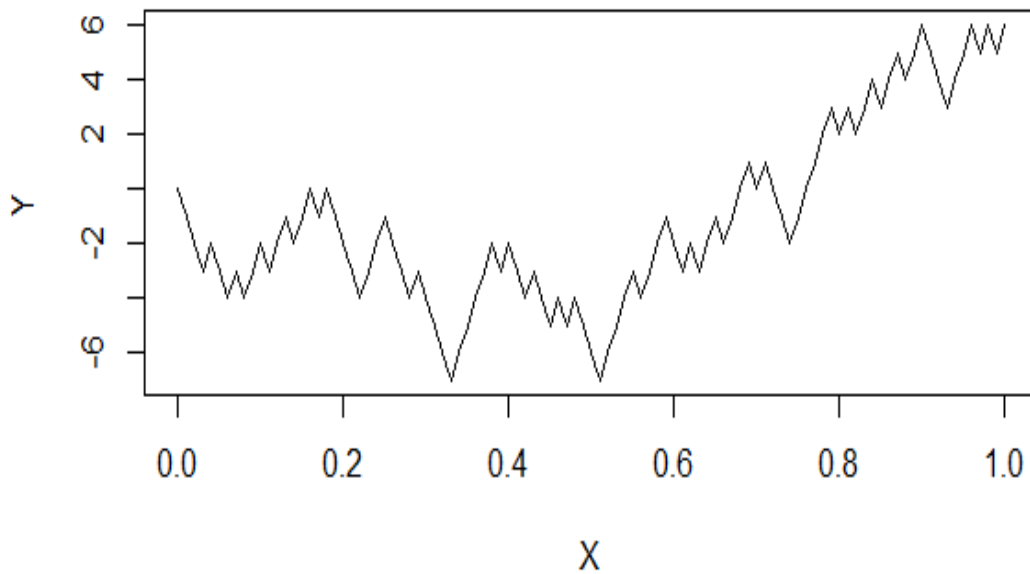


FIGURE 4.2 – Trajectoire de marche aléatoire sur \mathbb{Z}

4.2 Simulation d'un mouvement Brownien standard

On considère un mouvement Brownien $\{X(t)\}$ ou $t \in [0, 1]$. On commence par discrétiser l'intervalle de temps $[0, 1]$ en 501 points équidistant. On utilise ensuite la propriété des accroissements Gaussiens pour simuler chaque accroissement. La fonction `cumsum` calcule les sommes cumulées et permet de générer une trajectoire.

•Code R

```
# Simulation de mouvement brownien standard
# Discretisation du temps
temps<-seq(0,T,length=p+1)
pas.temps=1/500
# Simulation des accroissements
B.acc=rnorm(500,sd=sqrt(pas.temps))
# Simulation d'une trajectoire
B.sim=c(0,cumsum(B.acc))
plot(temps,B.sim,type="l", xlab="Temps")
```

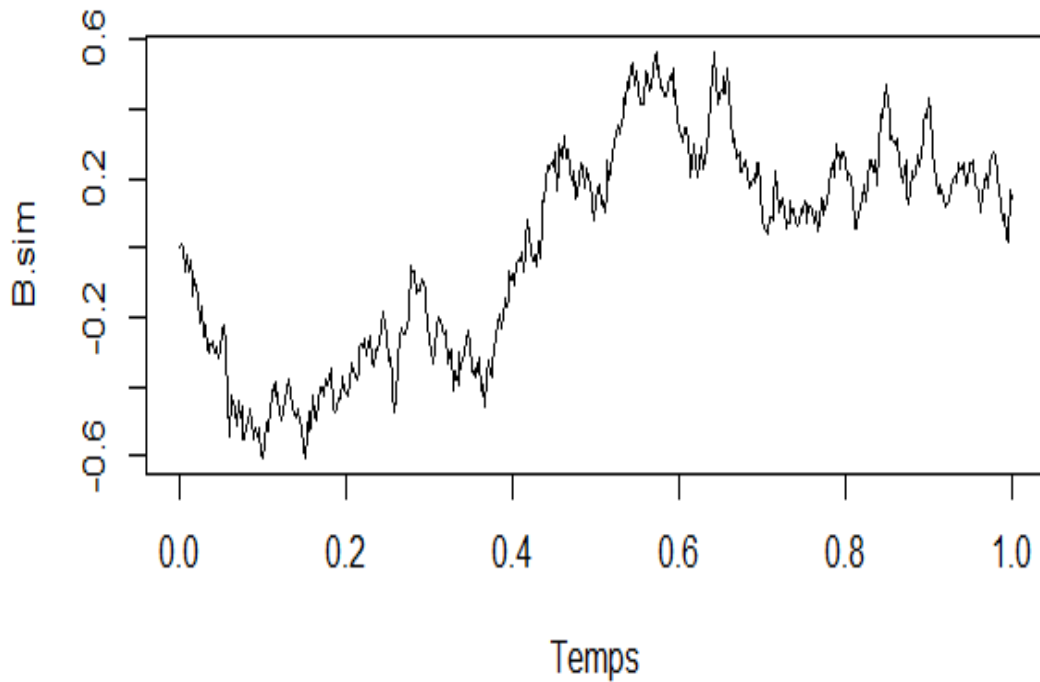


FIGURE 4.3 – Trajectoire de mouvement brownien standard sur l'intervalle de temps [0,1]

4.3 Trajectoire moyenne des mouvements browniens

Nous allons simuler maintenant 300 trajectoires indépendantes de mouvements Browniens et souhaitons vérifier que la trajectoire moyenne empirique est proche de 0.

•Code R

```
# Trajectoire moyenne des mouvements browniens
n.sim<-300 # Nombre de trajectoires
n.point<-201 # points de discretisation
temps<-seq(0,1,length=n.point)
pas.temps<-1/(n.point-1)
pas.temps # [1] 0.005
B.acc<-matrix(rnorm((n.point-1)*n.sim, sd=sqrt(pas.temps)),
nrow=n.sim)
B.sim<-matrix(NA,ncol=n.point,nrow=n.sim)
for(i in 1:n.sim)
  B.sim[i,]=c(0,cumsum(B.acc[i,]))
dim(B.sim) # [1] 300 201
B.mean<-apply(B.sim,2,mean)
plot(temps,B.sim[1,],Xlab="temps",type="l",Ylab=
"Mouvement brownien",Ylim=c(-2,2))
```

```

title("un échantillon de 15 trajectoires")
for(i in 1:15){lines(temps,B.sim[i+1,])}
lines(temps,B.mean,lwd=2,col="red")
legend(0.1,-1.5,c("trajectoire moyenne"),col=c("red"),lwd=2)

```

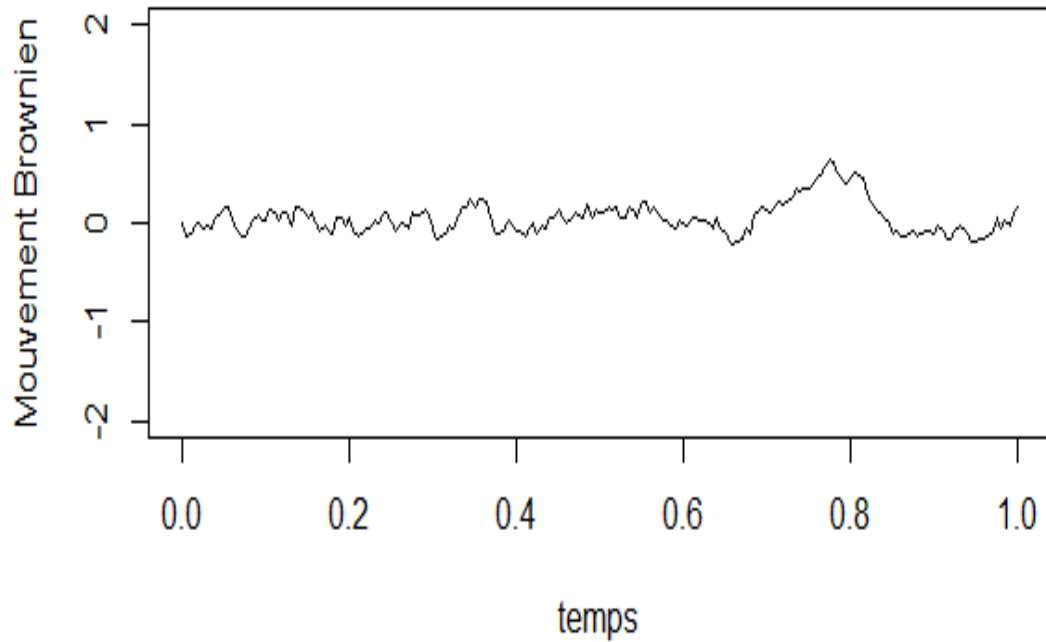


FIGURE 4.4 – Trajectoire de mouvement brownien

un échantillon de 15 trajectoires

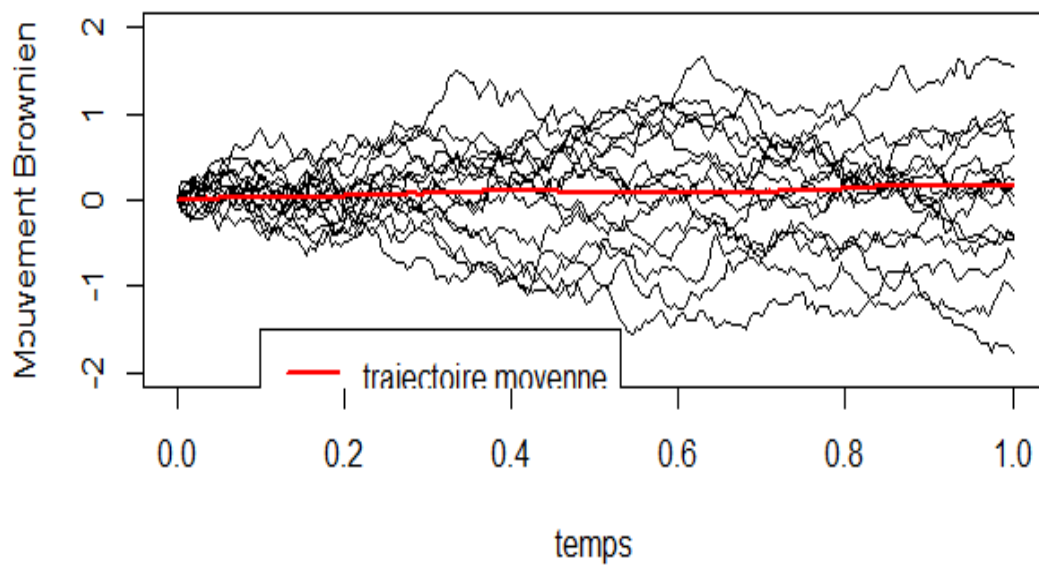


FIGURE 4.5 – Trajectoire moyenne d'un échantillon de 15 Trajectoires

4.4 Le mouvement brownien arithmétique (avec un drift)

Sous (iii) dans la remarque 6 du chapitre précédent.

•Code R

```
# Mouvement Brownien arithmétique
mu<-0.08;sigma<-0.2
T<-1
n<-2^10
n # [1] 1024
X0=0.1
dt=T/n
dt # [1] 0.0009765625
t=seq(0,T,by=dt)
X=c(X0,mu*dt+sigma*sqrt(dt)*rnorm(n,mean=0,sd=1))
Xt=cumsum(X)
plot(t,Xt,xlab="time",type="l")
```

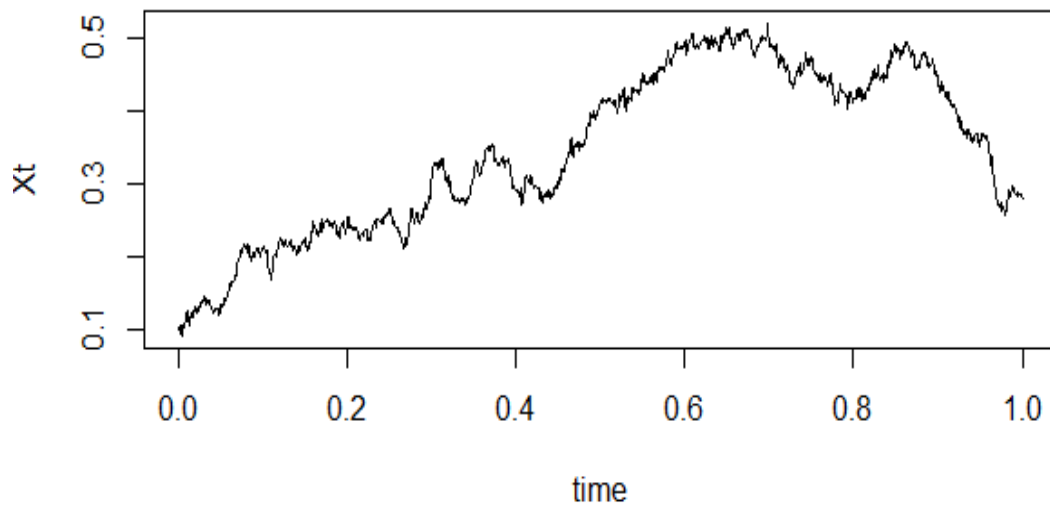


FIGURE 4.6 – Trajectoire de mouvement brownien arithmétique

Donc la trajectoire représente un mouvement brownien à forte volatilité.

On peut tracer un autre avec une faible en choisissant $\sigma = 0.02$.

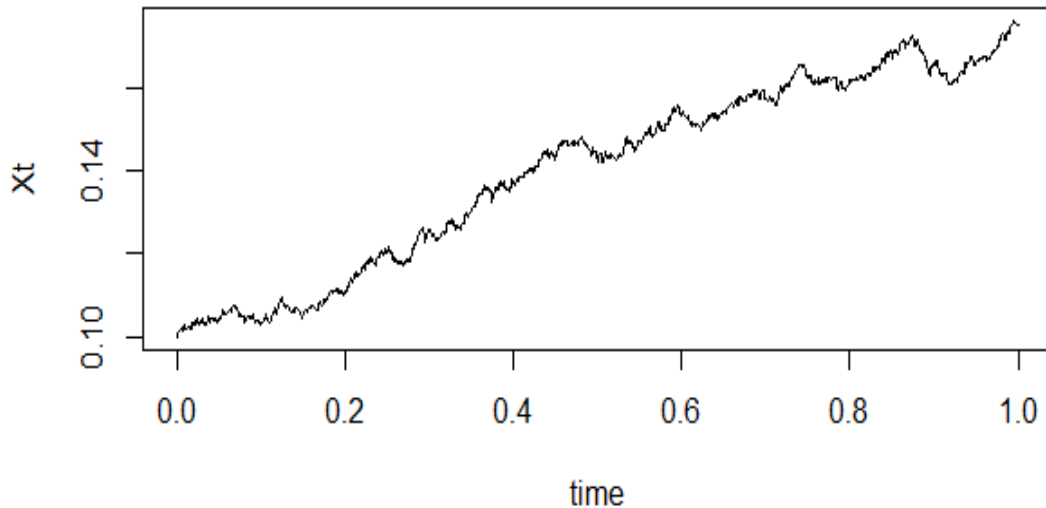


FIGURE 4.7 – Trajectoire de mouvement brownien arithmétique

On remarque que la trajectoire va changer avec une faible volatilité.

Donc il y'a que l'évolution croissant avec une tendance.

4.5 Le mouvement brownien géométrique

Remarquons en particulier que, si la valeur initiale X_0 est strictement positive, la solution le reste en tout temps $t \geq 0$. Le mouvement brownien géométrique est utilisé dans le célèbre modèle de Black-Scholes en mathématiques financières. La raison de l'apparition de ce processus tient à une hypothèse économique d'indépendance des rendements successifs

$$\frac{X_{t_2} - X_{t_1}}{X_{t_1}}, \frac{X_{t_3} - X_{t_2}}{X_{t_2}}, \dots, \frac{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}{X_{t_{n-1}}}.$$

sur des intervalles de temps disjoints : sur la forme explicite de X_t , on voit que cette hypothèse correspond à la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement brownien.

Code R

```
# Mouvement Brownien géométrique
mbg<-function(X0,mu,sigma,t0,t,n){
  delta<-(t-t0)/n
  w<-numeric(n+1)
  tseq<-seq(t0,t,length=n+1)
  for (i in 2:(n+1))
    w[i]<-w[i+1]+rnorm(1)*sqrt(delta)
  s<-X0*exp((mu-sigma^2/2)*(tseq-t0)+sigma*w)
```

```

X<-ts(s,start=t0,delta=delta)
return(X)
}
b<-mbg(X0=1, mu=1, sigma=0.5, t0=0, t=1, n=1000)
plot(b)
#####
mu=0.16; sigma=0.2; p0=40; t0=0; T=1/12 # 1 moi
nt=50; n=2^(8)
# Générer n trajectoires
dt=T/n; t=seq(0,T,by=dt)
X=matrix(rep(0,length(t)*nt), nrow = nt)
for (i in 1:nt) {X[i,]=mbg(X0=p0,mu=mu,sigma=sigma,t0=t0,
t=T,n=n)}
# plot
Ymax=max(X); Ymin=min(X) # bornes pour les prix sommés
plot(t,X[1,],t='l',Ylim=c(Ymin, Ymax), col=1, Ylab=
price p(t)",Xlab=time t")
for (i in 2:nt) {lines(t,X[i,], t='l', Ylim=c(Ymin,Ymax),
col=i)}
mean(X[,n+1])*exp(-mu*T) # [1]=40.07193

```

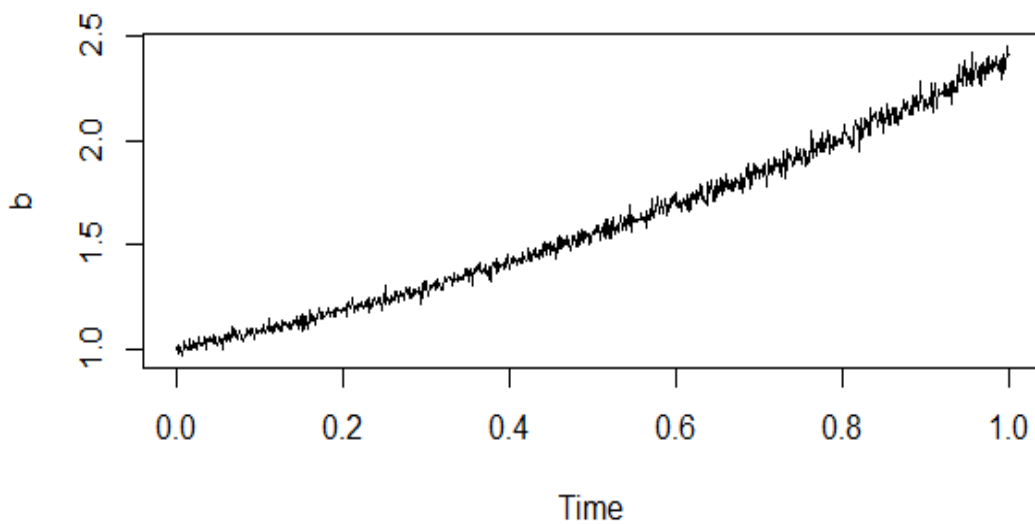


FIGURE 4.8 – Trajectoire de mouvement brownien géométrique

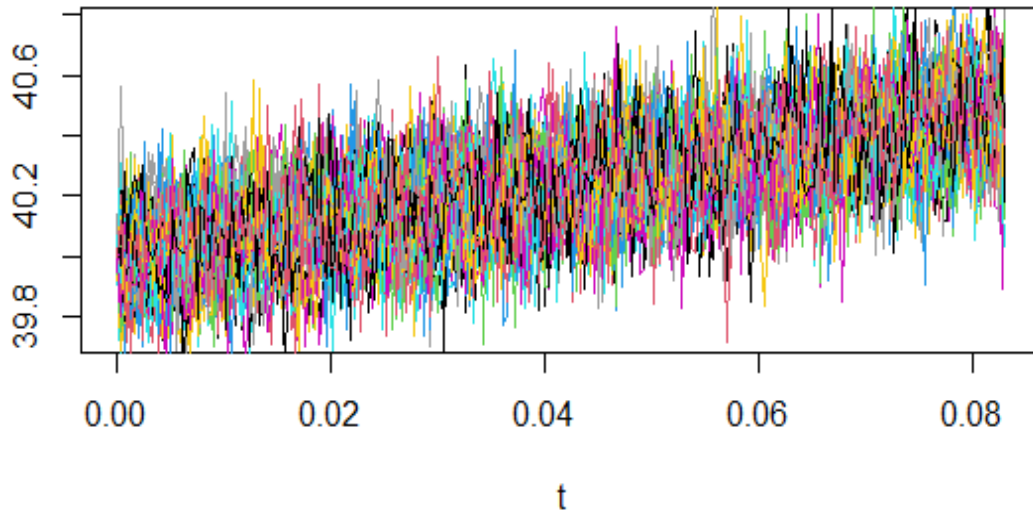


FIGURE 4.9 – Mouvement Brownien géométrique de 50 trajectoires

Donc la prévision au moyenne est 40.07

Conclusion

Nous avons donné quelques notions et propriétés intéressantes parmi lesquelles l'étude des processus de Markov comme solution d'une équation différentielle plus précisément stochastiques (EDS), et par suite on a montré ces propriétés qui sont utile pour les prédictions dans plusieurs domaines par exemple des phénomènes physiques modélisés par des équations différentielles stochastiques.

Les perspectives de développement de ce travail concerne l'étudier dans des espaces fonctionnelles.

Bibliographie

- [1] Baldi. P, Mazliak. L, and P.Priouret : Martingales and Markov chains. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. Solved exercises and elements of theory, Translated from the 1998 French original.
- [2] Baldi. P : Stochastic Calculus. Springer, (2017).
- [3] Bass. R : Stochastic Processes. Cambridge University Press, (2011).
- [4] Baudoin. F : Diffusion Processes and Stochastic Calculus. EMS Textbooks in mathematics, (2014).
- [5] Baynat. B : Théorie des files d'attente. Hermes Sciences Publications, Paris, (2000).
- [6] Breton. J.C : Processus stochastique. Université de Rennes1 (2013).
- [7] Carl Graham : Chaînes de Markov : Cours, exercices et corrigée détaillés. Paris, (2008).
- [8] Claudie Hassenforder Ismag master : Processus stochastiques modélisation.université de toulous .
- [9] Friedman. A : Stochastic differential equations and applications I, Probab. Math. Stat., vol. 28, Academic Press, New York, (1975).
- [10] Hervé Cardot : Introduction au logiciel R, IMB, université de Bourgogne herve.cardot@u-bourgogne.fr. (2011-2012)
- [11] Ikeda. N et Watanabe. S : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, Second edition. North Holland, (1988).
- [12] Jeanblanc. M : Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes. University of vry. Available at http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc (2006).
- [13] Jean-François Le Gall : Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique (2013).

- [14] Jérémie Bigot : Notes de cours de Probabilités Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), 18 mars 2014.
- [15] Karatzas. I et Shreve. S : Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second corrected edition. Springer, (1994).
- [16] Le Gall. J.F : Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique. Springer, 2013. (English translation : 2016.)
- [17] Meyn. S and Tweedie. R.L : Markov chains and stochastic stability. Cambridge University Press, Cambridge, second edition. With a prologue by Peter W. Glynn (2009).
- [18] Mohamed El Merouani : Simulation des processus stochastiques, (2018/2019)
- [19] Oksendal. B : Stochastic Differential Equations, Sixth edition. Springer,(2010).
- [20] Pablo Crotti : Marches aléatoires & Théorie du mouvement Brownien, Séminaire Automne (2009)
- [21] Philippe Bougerol : Calcul stochastique. Université Pierre et Marie Curie, Paris6 (2009).
- [22] Philippe Briand : Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades, (Mars 2001)
- [23] Pierre L'ecuyer : Chaînes de Markov en temps discret, univesité de Montriéal.
- [24] Rogers. L.C.G et Williams. D : Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. II, Itô Calculus. Wiley, (1987).
- [25] Sabin Lessard : Processus stochastiques Cours et exercices corrigés, paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr (2014)

Résumé

Dans ce travail, nous étudions le processus de Markov et propriétés, nous évoquerons en premier lieu rappel des notations et définitions de calcul stochastiques.

En second lieu nous présentons des généralités sur le processus de Markov, chaînes de Markov à temps discret, processus de Markov continus. Puis on étudie les solutions fortes et faibles, existence et unicité de solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients lipschitziens, ainsi que la propriété de Markov forte de cette solution.

En suit, nous effectuons des simulations numériques basées sur un schéma de discrétisation du mouvement Brownien avec un exemple de processus stochastiques.

Mots clés: Processus de Markov, équation différentielle stochastique, processus stochastique, mouvement Brownien.

Abstract

In this work, we study the Markov process and properties, we will first recall the notation and definition of stochastic calculus.

Secondly we present general information on the Markov process, discrete-time Markov chains, continuous Markov processes. Then we study the strong and weak solutions, existence and uniqueness of solution of a stochastic differential equation with Lipschitz coefficients, as well as the strong Markov property of this solution.

Next, we perform numerical simulation based on a Brownian motion discretization scheme with an example of stochastic processes.

Key words: Markov process, stochastic differential equation, stochastic process, Brownian motion.

المخلص

في هذا العمل ندرس عملية ماركوف وخصائصها، وسنتذكر أولاً الرموز والتعريفات الخاصة بحساب التفاضل والتكامل العشوائي.

ثانياً، نقدم معلومات عامة عن عمليات ماركوف، وسلاسل ماركوف المنفصلة، وعمليات ماركوف المستمرة. ثم ندرس الحلول القوية والضعيفة، ووجود وتفرد حل المعادلة التفاضلية العشوائية مع معاملات ليبشيتز، وكذلك خاصية ماركوف القوية لهذا الحل.

بعد ذلك، نقوم بإجراء عمليات محاكاة عددية بناءً على مخطط تقديري للحركة البراونية مع مثال على العمليات العشوائية.

الكلمات الرئيسية: عملية ماركوف، المعادلة التفاضلية العشوائية، العملي العشوائية، الحركة البراونية.