



# ★★★★★*REMERCIEMENTS*★★★★★

*"ALLAH" merci pour la santé, la volonté, le courage et la détermination qui m'ai accompagnée tout au long de la préparation et l'élaboration de ce travail et qui m'ai permis d'achever ce modeste travail.  
Le présent travail est non seulement le résultat du courage et patience mais aussi une participation de plusieurs chères personnes.*

*Je tiens d'abord à remercier infiniment MR.ABDELMALEK MOHAMMED en tant qu'encadreur du mémoire, pour son encadrement et ses constantes orientations en y accordant une méticuleuse attention, ainsi que pour ses conseils malgré son charge de travail.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes enseignants du département MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE en général pour leur formation pendant toutes ces formidable années universitaires.*

*Je tiens également à remercier les membres du jury d'avoir bien voulu me faire l'honneur de juger mon travail, qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect et mes vifs remerciements.*

*Tout mes remerciement à tous les membres de ma famille d'avoir été toujours la pour moi, de leurs soutient de tout ordre.*

*Mes sincères remerciements s'adressent à tous mes amis qui m'ont permis de garder un équilibre de vie en alliant études et loisir, pour leur soutien durant la période de rédaction de ce mémoire.*

# Table des matières

- 1 Préliminaires** **4**
- 1.1 Courbes paramétrées . . . . . 4
- 1.1.1 Formules de Frenet et courbures d'une courbe . . . . . 6
- 1.2 Notions sur les surfaces . . . . . 9
- 1.2.1 Formes fondamentales d'une surface . . . . . 13
- 1.2.2 Seconde forme fondamentale . . . . . 20
- 1.2.3 Courbures d'une surface . . . . . 23
  
- 2 Surfaces minimales** **24**
- 2.1 Problème de Plateau et surfaces minimales : . . . . . 24
- 2.1.1 Coordonnées isothermes . . . . . 30
- 2.2 Représentation de Weierstrass-Enneper pour les surfaces minimales . . . . . 32
  
- 3 Exemples de surfaces minimales** **43**
- 3.1 Caténoïde . . . . . 43
- 3.2 Hélicoïde . . . . . 46
- 3.3 Surfaces de Scherk . . . . . 49
- 3.4 Surface d'Enneper . . . . . 53

# Introduction

*L'étude des surfaces minimales est un sujet fascinant combinant de nombreux domaines mathématiques, essentiellement la géométrie différentielle, calcul de variation, analyse complexe et théorie des mesures. Relatif au monde physique c'est les mathématiques des films savonnés bordés par des structures en fil de fer, ce qui en fait un champ complet d'objets esthétiquement agréables. La liaison étroite avec des objets concrets rend possible même pour les personnes sans beaucoup de fond mathématique d'admirer la beauté et complexité que donnent lieu à des surfaces minimales.*

*En 1744, "Euler" a posé et résolu le problème de déterminer les surfaces de révolution minimisant l'aire, la seule solution était le caténoïde.*

*"Joseph-Louis Lagrange" (1736-1813) a étudié les surfaces minimales dans les années 1760. Il voulait trouver la surface avec l'aire minimale dont le bord est une courbe de Jordan (C'est-à-dire, une courbe continue fermée sans auto-intersections). Bien que "Lagrange" ait été le premier à considérer ce problème mathématiquement, il est connu sous le nom du problème du Plateau selon le physicien "Joseph Plateau" (1801-1883) qui a fait de nombreuses expériences avec des films de savon.*

*Le problème de Plateau peut être divisé en deux parties : prouver l'existence d'une surface minimale qui s'appuie sur une ou plusieurs courbes fermées données (c'est-à-dire la surface dont la frontière est formée par ces courbes), et d'avoir un moyen de construire de telle surface quand nous savons qu'il existe. Dans certains cas particuliers, la partie relative à l'existence du problème du Plateau a été résolue au cours des années 1800.*

*Le problème reste ouvert pendant un demi-siècle, jusqu'à sa résolution par "Jesse Douglas" (1931) [3] et "Tibor Radó" (1930) [11] indépendamment. Pour tous ses travaux sur le problème du Plateau, "Douglas" s'est vu attribuer l'un des deux premières médailles Fields (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques) en mathématiques (partagées avec "Lars Ahlfors") au congrès international des mathématiciens à Oslo en 1936.*

*Cette thèse a pour but de faire un résumé de l'essentiel des travaux des scientifiques et les progrès qu'ils ont réalisé sur les surfaces minimales tout en leur donnant des exemples classiques des surfaces minimales.*

*Le travail contient trois chapitres repartis comme suit :*

- ▶ *Dans le premier chapitre, nous introduisons certains outils permettant une bonne compréhension des chapitres qui suivent. Nous commençons par rappeler les notions classiques sur la théorie des courbes et surfaces, puis les éléments fondamentaux d'une surface.*
- ▶ *Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude des surfaces minimales, en introduisant l'équation de Lagrange. On donne aussi une caractérisation géométrique d'une surface minimale par le fait que sa courbure moyenne soit nulle.*
- ▶ *Le troisième chapitre est réservé pour donner les exemples classiques des surfaces minimales et ses propriétés.*

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit un certain nombre de notions sur la géométrie de courbes et surfaces dont on se sert tout au long des chapitres suivants. Pour plus d'informations sur le sujet nous renvoyons le lecteur aux références [4], [8] et [10].

### 1.1 Courbes paramétrées

**Définition 1.1 :** Soit  $I$  un interval  $\mathbb{R}$ , et  $k \geq 2$ .

Une courbe paramétrée de classe  $C^k$  est une application  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^k$ .

l'ensemble  $C = \{\gamma(t); t \in I\}$  s'appel le support de la courbe.

Une courbe plane est une courbe qui est entièrement contenue dans un plan.

Une courbe gauche est une courbe de  $\mathbb{R}^3$  qui n'est pas plane.

Un point  $t_0 \in I$  est dit :

- régulier si  $\gamma'(t_0) \neq 0$ .
- singulier si  $\gamma'(t_0) = 0$ .

La courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  est dite régulière, si pour tout  $t \in I$  :  $\gamma'(t) \neq 0$ .

Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une courbe paramétrée de classe  $C^k$ , et  $\rho : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$  un difféomorphisme de classe  $C^k$ , alors  $\gamma \circ \rho$  est une courbe paramétrée de même support que  $\gamma$ .

Le difféomorphisme  $\rho$  s'appel le changement de variable.

Par exemple, l'ellipse est caractérisé par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Une paramétrisation de cette courbe est donnée par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in ]-\pi, \pi[$$

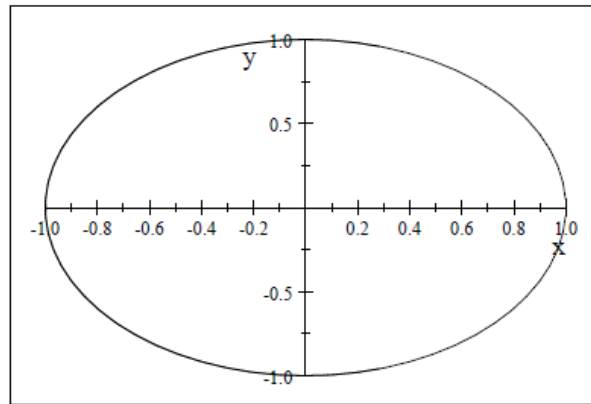


FIGURE 1.1 – Ellipse

Dans toute la suite, on suppose que  $\gamma$  est de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ .

**Remarque 1.1 :**

- Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  est régulière, et  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \rho$  une reparamétrisation de  $\gamma$ , alors  $\tilde{\gamma}$  est aussi régulière.
- Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point.

La réciproque n'est pas vraie.

En effet, considérons la courbe paramétrée suivante :

$$\gamma(t) = (t^2, t^4)$$

La courbe associée est la parabole d'équation  $y = x^2$  qui a un vecteur tangent horizontal au point  $\gamma(0)$ , pourtant  $\gamma'(0)$  est nul.

**Définition 1.2 : Vecteur tangent**

Intuitivement, la tangente en un point  $t_0$  à une courbe paramétrée :

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

est la limite des droites passant par  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma(t)$  quand  $t$  tend vers  $t_0$ .

La proposition suivante indique qu'une dérivée non nulle de la paramétrisation donne un vecteur tangent.

**Proposition 1.1 :** Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$  une courbe régulière de classe  $C^k$ , et  $t \in I$ . Alors  $\gamma'(t)$  est un vecteur tangent à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ .

**Définition 1.3 : Longueur d'un arc**

Soit  $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$  une courbe paramétrée régulière.

La longueur de  $\gamma$  est le nombre :

$$S(t) = \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds$$

**1.1.1 Formules de Frenet et courbures d'une courbe**

Soit  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$  une paramétrisation normale (Cela veut dire que  $\forall t \in I$ ).

On note par  $T(t)$  le vecteur tangent unitaire en  $t$  :

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Puisque  $T(t)$  est un vecteur tangent unitaire, alors le vecteur dérivé :

$$T'(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$$

est orthogonal à  $T(t)$ .

On suppose dans la suite que  $T'(t) \neq 0$ , et on définit le vecteur normal principal unitaire  $N(t)$  par :

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

**Définition 1.4 : Courbure d'une courbe**

La courbure  $\kappa(t)$  de la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  est :

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \|T'(t)\| \\ &= \|\gamma''(t)\|\end{aligned}$$

**Exemple 1.1 :** Soit  $R > 0$  et :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = R\left(\cos\left(\frac{t}{R}\right), \sin\left(\frac{t}{R}\right), 0\right)\end{aligned}$$

un cercle dans le plan  $(x, y)$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned}T(t) &= \gamma'(t) \\ &= \left(-\sin\left(\frac{t}{R}\right), \cos\left(\frac{t}{R}\right), 0\right)\end{aligned}$$

qui est bien de norme 1.

Par suite :

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \|T'(t)\| \\ &= \left\| \frac{1}{R} \left( -\cos\left(\frac{t}{R}\right), -\sin\left(\frac{t}{R}\right), 0 \right) \right\| \\ &= \frac{1}{R}\end{aligned}$$

Notons que le vecteur normal unitaire n'est défini que lorsque la courbure ne s'annule pas. La courbure d'une courbe gauche est nulle si et seulement s'il est une (portion de) droite.

Nous avons par définition :

$$T'(t) = \kappa(t)N(t)$$

On définit le vecteur binormal :

$$B(t) = T(t) \wedge N(t)$$

Il s'ensuit que  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  qui bouge avec  $t$  et va être particulièrement adaptée à l'étude des propriétés géométriques de la courbe  $\gamma$ . On l'appelle le repère de Frenet.

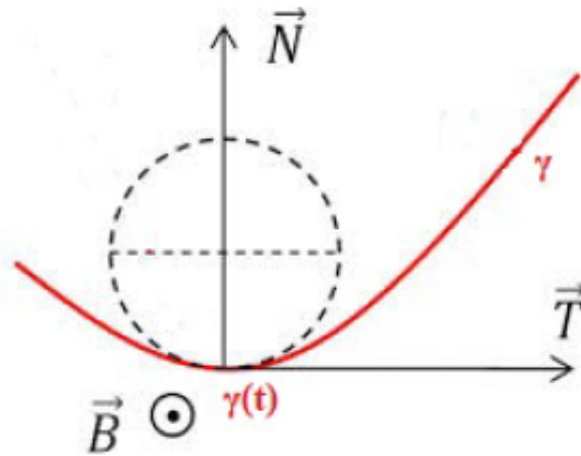


FIGURE 1.2 – Repère de Frenet

Lorsque la paramétrisation n'est pas normale, alors  $\gamma'(t) \neq 1$ , et nous avons dans ce cas :

**Proposition 1.2 :** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  une courbe paramétrée.  
La courbure  $\kappa(t)$  de la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  est donnée par :

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

**Définition 1.5 : Courbes sur une surface**

Soit  $S$  la surface paramétrée par  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Une courbe paramétrée sur  $S$  est une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow S$  obtenue en composant  $f$  avec une paramétrisation  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow U$  des paramètres, que l'on indique par :  $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$  :

$$\gamma(t) = f(u(t), v(t)) \quad t \in I$$

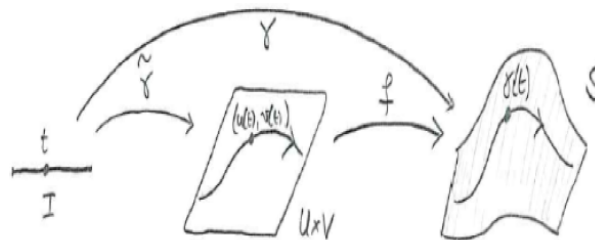


FIGURE 1.3 – Courbe sur une surface

**Exemple 1.2 :** Courbe contenue dans le cylindre paramétrée par :

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$$

Les paramètres  $u$  et  $v$  sont à leur tour paramétrés par :

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t \end{cases}$$

## 1.2 Notions sur les surfaces

**Définition 1.6 :** Une surface définie implicitement est le lieu des zéros d'une fonction :

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

c'est-à-dire l'ensemble de la forme :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; / F(x, y, z) = 0\}$$

La surface est dite régulière au point  $(x_0, y_0, z_0)$  si  $F$  est différentiable en  $(x_0, y_0, z_0)$  et si le gradient  $\nabla F$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  est non nul.

Par exemple la sphère  $S$  centrée à l'origine et du rayon 1 est définie implicitement par :

$$F(x, y, z) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

Le gradient  $\nabla F$  est donnée par :

$$\nabla F(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Qui est non nul en tout point de  $S$ .

Donc  $S$  est une surface régulière.

**Définition 1.7 :** Une surface paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  (avec  $k \geq 2$ ) est une application

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

où  $U$  est un domaine (ouvert et connexe) de  $\mathbb{R}^2$ .

L'ensemble :

$$S = f(U) = \{f(x, y), (x, y) \in U\}$$

s'appelle le support géométrique associée à la surface  $f$ .

Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une surface régulière et  $p \in S$ , alors il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $S$  tel que  $V$  est le graphe d'une fonction différentielle qui a l'une des trois formes :

$$z = f(x, y) \quad , \quad y = f(x, z) \quad \text{ou} \quad x = f(y, z)$$

On peut donc toujours voir localement une surface régulière comme étant le graphe d'une fonction de deux variables réelles.

Pour définir une surface de  $\mathbb{R}^3$ , soit on donne des contraintes aux coordonnées de ces points (Surface définie implicitement), comme par exemple la sphère  $S_r$  centrée à l'origine et de rayon  $r$  :

$$S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

Soit on décrit ses points comme fonctions de deux paramètres (surface paramétrée) comme par exemple le paramétrage de la même sphère  $S_r$  :

$$S_r = \left\{ (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v) \in \mathbb{R}^3; u \in [0, 2\pi], v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

On note par  $(U, f)$  le paramétrage de la surface  $S$ .

Le paramétrage d'une surface permet de calculer l'aire et toutes les courbures qui caractérisent les surfaces ( Courbure moyenne courbure totale et courbure de Gauss).

**Définition 1.8 :** On dit que la surface  $S$  paramétrée par  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est régulière en  $M_0 = (u_0, v_0) \in U$  si les vecteurs dérivées partielles de  $f$  en  $M_0 = (u_0, v_0)$  sont linéairement indépendants ( donc non nuls ). C'est-à-dire :

$$\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0) \neq 0$$

La surface  $S$  est dite singulière en  $(u_0, v_0)$ , si :

$$\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0) = 0$$

**Exemple 1.3 :** La surface paramétrée par  $f(u, v) = (u^2, v^2, uv) \in \mathbb{R}^3$  avec  $u, v \in \mathbb{R}$  est une surface régulière si et seulement si  $(u, v) \neq (0, 0)$

En effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (2u, 0, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (0, 2v, u) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (-2v^2, -2u^2, 4uv)$$

Le vecteur  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0$  si et seulement si  $(u, v) = (0, 0)$

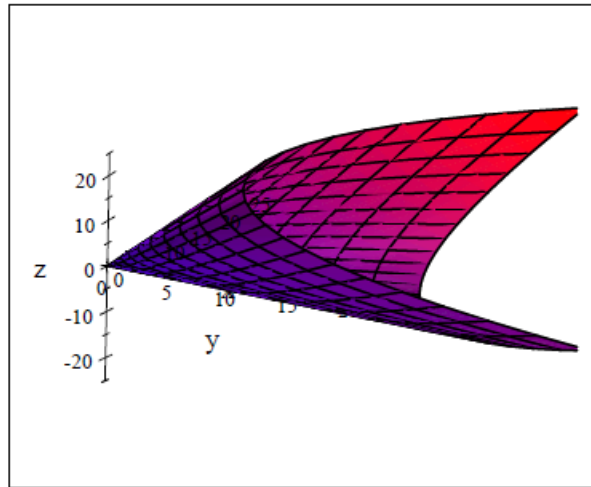


FIGURE 1.4

**Définition 1.9 :** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  la Surface paramétrée par  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Un reparamétrage de  $S$  est une nouvelle paramétrisation  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $S$  obtenue en composant  $f$  avec un difféomorphisme  $\phi : V \rightarrow U$ , i.e  $g = f \circ \phi$ .

On dit que  $\phi$  est un changement de variable admissible de  $f$ .

#### Exemple 1.4 : Reparamétrage d'une surface

Soit le paraboloid hyperbolique d'équation :

$$z = x^2 - y^2$$

On utilisant cette représentation (implicite), nous obtenons la représentation paramétrique de cette surface :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x, y, x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Une autre paramétrisation de cette surface est donnée par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (u + v, u - v, 4uv) \end{aligned}$$

Avec cette représentation, nous obtenons la figure :

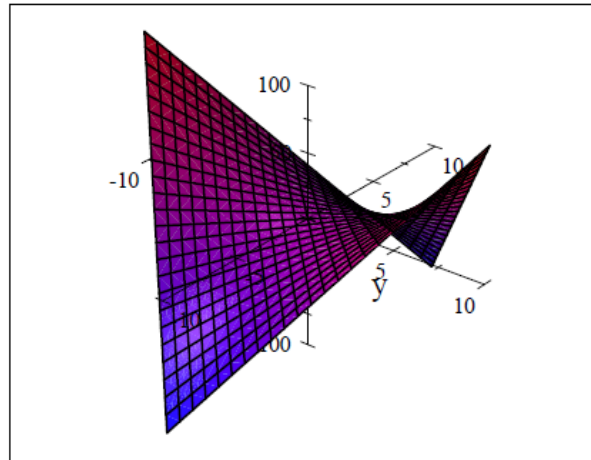


FIGURE 1.5

Ces deux représentations sont bien équivalentes.

En effet :  $g = f \circ \phi$ , où  $\phi$  est le difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  (Car isomorphisme linéaire ) défini par :

$$\phi : (u, v) \longmapsto \phi(u, v) = (u + v, u - v)$$

**Définition 1.10 :** Soit  $S$  une surface paramétrée par  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , et soit  $M_0 = f(u_0, v_0)$  un point régulière de  $S$ .

On appelle plan tangent à  $S$  au point  $M_0$  le plan engendré par les vecteurs  $\partial_u f(u_0, v_0)$  et  $\partial_v f(u_0, v_0)$  et passant par  $M_0$ .

$$T_{M_0}S = M_0 + Vect(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0)) = \{f(u_0, v_0) + \lambda \partial_u f(u_0, v_0) + \mu \partial_v f(u_0, v_0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Au final, on peut retenir que si la surface est régulière, alors le plan vectoriel associé à  $T_M S$  définit en tout point  $M$  par l'application  $f$  est de dimension deux : On l'appelle aussi plan tangent.

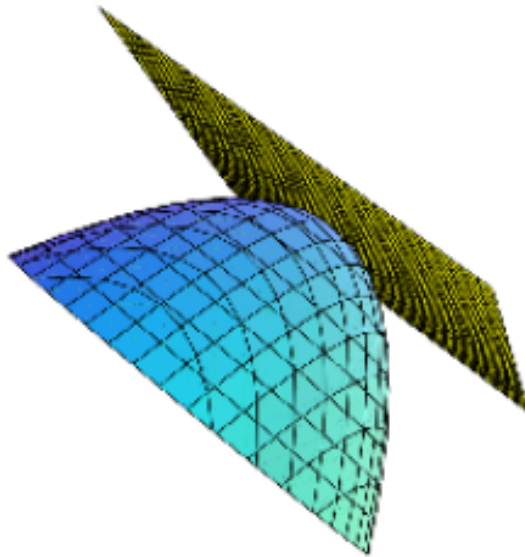


FIGURE 1.6 – Plan tangent

**Proposition 1.3 :** le point  $p \in \mathbb{R}^3$  appartient au plan tangent à  $S$  en  $M_0$  si et seulement si :

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0), \overrightarrow{M_0 p} \right\| = 0$$

**Remarque 1.2 :** Si  $S$  est une surface régulière définie implicitement par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$$

où  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable.

alors, le point  $p$  appartient au plan tangent à  $S$  en  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , si :

$$\langle \nabla F(p), \overrightarrow{M_0 p} \rangle = 0$$

Ceci est équivalent à dire :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

Ainsi :

$$T_{M_0} S = [\nabla F(p)]^\perp$$

## 1.2.1 Formes fondamentales d'une surface

### Orientation et normale

**Définition 1.11 :** Soit  $S$  une surface paramétrée par  $(U, f)$  et  $p \in S$ .

On appelle vecteur normal au point  $p$ , tout vecteur orthogonal à  $T_p S$ . L'ensemble des vecteurs

normaux constitue un sous espace vectoriel de dimension 1.

Il y a donc en tout point de  $S$  exactement deux vecteurs normaux unitaires, c'est-à-dire de norme 1, avec des directions opposées.

Posons :

$$f_u = \partial_u f(u, v) \text{ et } f_v = \partial_v f(u, v)$$

Puisque les deux vecteurs  $f_u$  et  $f_v$  sont linéairement indépendants, alors le produit vectoriel  $f_u \wedge f_v$  est non nul et on peut donc définir le vecteur normal unitaire par :

$$n(p) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$$

Si  $S$  est définie implicitement par l'équation cartésienne :  $F(x, y, z) = 0$ , et  $p$  un point de  $S$ , alors le vecteur  $\nabla F(p)$  est normal.

Le vecteur normal unitaire est donnée par :

$$n(p) = \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$$

On peut remarquer que si  $n(p)$  est un vecteur normal unitaire, alors  $-n(p)$  est aussi un vecteur normal unitaire.

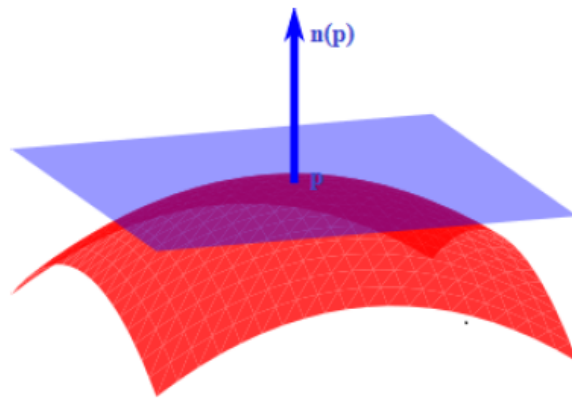


FIGURE 1.7 – Vecteur normal à une surface

**Définition 1.12 :** Une surface régulière  $S$  est dite orientable, s'il existe une application continue  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que, en chaque point  $p$  de la surface  $S$ , le vecteur  $n(p)$  est non nul et orthogonal au plan tangent  $T_p S$ .

**Exemple 1.5 :** Soit  $S$  l'hélicoïde paramétrée par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \end{aligned}$$

Soit  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application qui au point  $p$  associe le vecteur normal unitaire  $N(p)$ .

Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  nous avons :

$$f_u = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$f_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

Donc :

$$f_u(u, v) \wedge f_v(u, v) = (\sin v, \cos v, u)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} N &= \frac{f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} (\sin v, \cos v, u) \end{aligned}$$

**Remarque 1.3 :** Une surface régulière  $S$  ne peut pas être toujours globalement orientable. l'exemple le plus standard d'une surface non orientable est la bande de Möbius.

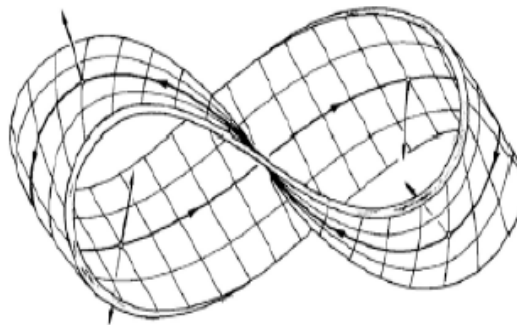


FIGURE 1.8 – bande de Möbius

**Définition 1.13 :** la première forme fondamentale de  $S$  en un point  $p$  est la restriction du produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  à  $T_p S$ , c'est donc la forme bilinéaire symétrique définie positive donnée par :

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque 1.4 :** La forme bilinéaire  $I_p$  étant la restriction d'un produit scalaire, c'est également un produit scalaire, donc qu'elle est symétrique et définie positive.

Parfois on appelle première forme fondamentale de  $S$  en  $p$  la forme quadratique associée à  $I_p$  qui à tout vecteur  $X$  tangent à  $S$  en  $p$ , associe le carré de sa longueur, soit :

$$I_p = \langle X, X \rangle = \|X\|^2$$

Comme souvent en géométrie, une notion définie abstraitement, devient utile lorsqu'on l'exprime en coordonnées.

Notons par  $f : (u, v) \rightarrow f(u, v)$  une paramétrisation de la surface  $S$ . La différentielle de  $f$ ,  $df$  est donnée par :

$$df = f_u du + f_v dv$$

Il est clair que  $df \in T_p S$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} I_p(df, df) &= \langle df, df \rangle \\ &= \langle f_u du + f_v dv, f_u du + f_v dv \rangle \\ &= \langle f_u, f_u \rangle du^2 + 2 \langle f_u, f_v \rangle dudv + \langle f_v, f_v \rangle dv^2 \end{aligned}$$

Posons :

$$E = \langle f_u, f_u \rangle \quad F = \langle f_u, f_v \rangle \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

Ainsi :

$$I_p(df, df) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Les quantités  $E, F$  et  $G$  s'appellent les coefficients de la première forme fondamentale.

**Remarque 1.5 :** On peut représenter la relation précédente sous forme matricielle :

$$I_p = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

La matrice :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique. Elle est définie positive si et seulement si toutes ces valeurs propres sont strictement positives.

Ceci est équivalent à dire :

$$E > 0 \quad \text{et} \quad EG - F^2 > 0$$

Il est clair que  $E = \|f_u\|^2 > 0$  (Car  $f$  est une paramétrisation régulière).

Et d'après l'inégalité de Lagrange :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3, \|X\|^2 \|Y\|^2 = \|X \wedge Y\|^2 + \langle X, Y \rangle^2$$

nous obtenons en prenons  $X = f_u$  et  $Y = f_v$  :

$$EG - F^2 = \|f_u \wedge f_v\|^2 > 0$$

Ce qui montre que la matrice :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

est définie positive.

### Exemple 1.6 : Première forme fondamentale du cylindre et d'hélicoïde

Un cylindre du rayon  $r$  peut être représentée par la paramétrisation :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto f(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v) \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , nous avons :

$$f_u = (-r \sin u, r \cos u, 0)$$

$$f_v = (0, 0, 1)$$

Donc :

$$E = r^2$$

$$F = 0$$

$$G = 1$$

Ainsi la matrice de la première forme fondamentale est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que  $A$  ne dépend pas du point  $(u, v)$  de  $\mathbb{R}^2$ , ce qui n'est pas toujours vrai.

En effet, prenons par exemple une paramétrisation de l'hélicoïde :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \end{aligned}$$

pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , nous avons :

$$f_u = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$f_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

Donc :

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 1 + u^2$$

La matrice de la première forme fondamentale est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

### Aire d'une surface

**Définition 1.14 :** Soit  $S$  une surface paramétrée par  $(U, f)$ . On appelle aire de  $S$  le nombre réel positif :

$$\text{Aire}(S) = \int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

C'est l'aire du parallélogramme formé par  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ .

**Remarque 1.6 :** Cette aire ne dépend pas de la paramétrisation choisie. Cela résulte de la formule de changement de variable dans les intégrales doubles.

En terme de coordonnées, nous avons :

$$\text{Aire}(S) = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv$$

$\sqrt{EG - F^2}$  s'appelle l'élément de volume de  $f$ .

### Exemple 1.8 : Aire de la sphère

On considère l'application :

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow S^2$$

$$(u, v) \longmapsto f(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

Cette paramétrisation est régulière, et nous avons :

$$E = \sin^2 v \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S) &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \sqrt{\sin^2 v} \, du \, dv \\ &= 2\pi \int_{[0, \pi]} \sqrt{\sin^2 v} \, dv \\ &= 2\pi \int_{[0, \pi]} \sin^2 v \, dv \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Notons que :

$$EG - F^2 = 0 \iff \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\| = 0$$

**Lemme 1.1** : Une surface paramétrée  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est régulière en un point  $p$  si :

$$(EG - F^2)(p) \neq 0$$

## Application du Gauss

**Définition 1.15** : Soit  $S$  une surface orientée de classe  $C^2$ .

L'application de Gauss de  $S$  est l'application définie par :

$$\nu : S \longrightarrow S^2$$

$$p \longmapsto \nu(p) = n(p) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$$

où  $S^2$  est la sphère unité, et  $p = f(u, v)$ .

On voit par exemple que si  $S = S^2$ , l'application qui à un point  $p$  de  $S^2$  associe le vecteur  $\vec{Op}$  est une application de Gauss de la sphère  $S^2$ .

Remarquons que si  $\nu$  est une application de Gauss alors  $-\nu$  aussi.

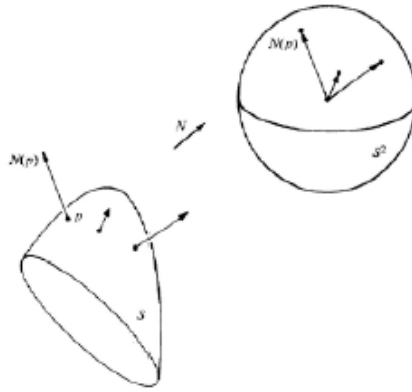


FIGURE 1.9 – application de Gauss

### 1.2.2 Seconde forme fondamentale

Soit  $f$  une paramétrisation de classe  $\mathcal{C}^k$   $k \geq 2$  d'une surface  $S$ . D'après la définition de l'application de Gauss, au voisinage de tout point  $p$  de  $S$ , on peut toujours définir un vecteur normal unitaire  $n$ . Et comme la surface est régulière, l'application de Gauss en chaque point  $p$  de  $S$  est différentiable et sa différentielle, noté  $dn_p$ , est une application linéaire du plan tangent  $T_p S$  en  $T_{n(p)} S^2$ .

Puisque ces deux plans sont parallèles, alors on peut considérer  $dn_p$  comme une application linéaire de  $T_p S$  dans lui même.

La différentielle de  $n$  est :

$$dn = n_u du + n_v dv$$

**Définition 1.16 :** L'opposée de la différentielle  $dn_p$  est appelée endomorphisme de Weingarten. On note :

$$W_p = -dn_p$$

C'est un endomorphisme symétrique et auto-adjoint. En particulier, il est diagonalisable dans une base orthonormée.

Nous avons :

$$\begin{aligned} d\langle n, n \rangle &= \langle dn, n \rangle + \langle n, dn \rangle \\ &= 2\langle dn, n \rangle \end{aligned}$$

Et puisque  $n$  est unitaire, alors :

$$\begin{aligned} d\langle n, n \rangle &= d(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle dn, n \rangle = 0$$

Ce qui prouve que  $dn$  est orthogonal à  $n$ , et alors  $dn$  appartient au plan tangent à  $S$  en  $p$ .

Considérons à présent la quantité  $-\langle df, dn \rangle$ ,

Nous avons :

$$\begin{aligned} -\langle df, dn \rangle &= -\langle f_u du + f_v dv, n_u du + n_v dv \rangle \\ &= -\langle f_u, n_u \rangle du^2 - (\langle f_u, n_v \rangle + \langle f_v, n_u \rangle) dudv - \langle f_v, n_v \rangle dv^2 \end{aligned}$$

Posons :

$$L = -\langle f_u, n_u \rangle$$

$$M = -(\langle f_u, n_v \rangle + \langle f_v, n_u \rangle)$$

$$N = -\langle f_v, n_v \rangle$$

**Définition 1.17 :** On appelle seconde forme fondamentale associée à la surface  $S$  la quantité :

$$\begin{aligned} II_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto II_p(X, Y) = -\langle W_p(X), Y \rangle \end{aligned}$$

Où  $p = f(u, v)$ . En particuliers, nous avons :

$$II_p(du, dv) = -\langle df, dn \rangle$$

Elle peut aussi être représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

les coefficients  $L, M$  et  $N$ , s'appellent les coefficients de la seconde forme fondamentale.

Comme  $f_u$  et  $f_v$  sont orthogonales à  $n$  en tout point  $p = f(u, v)$  de  $S$ , alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle f_u, n \rangle &= \langle f_{uu}, n \rangle + \langle f_u, n_u \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \langle f_v, n \rangle &= \langle f_{vu}, n \rangle + \langle f_v, n_u \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle f_u, n \rangle &= \langle f_{uv}, n \rangle + \langle f_u, n_v \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle f_v, n \rangle &= \langle f_{vv}, n \rangle + \langle f_v, n_v \rangle = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$L = \langle f_{uu}, n \rangle$$

$$M = \langle f_{uv}, n \rangle$$

$$N = \langle f_{vv}, n \rangle$$

Et nous avons de plus :

$$II_p(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

**Exemple 1.9 :** Soit  $S$  la surface paramétrée par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous avons :

$$f_u = (1, 0, u)$$

$$f_v = (0, 1, v)$$

Donc :

$$n = \frac{(-u, -v, 1)}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$$

Au point  $p = (0, 0, 0)$ , nous avons :

$$f_u = (1, 0, 0)$$

$$f_v = (0, 1, 0)$$

L'espace tangent au point  $p = (0, 0, 0)$  est engendré par les vecteurs  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 0)$ . C'est-à-dire le plan  $(xOy)$ .

Le vecteur normal  $n$  au point  $p = (0, 0, 0)$  est  $n_p = (0, 0, 1)$ .

Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$\begin{aligned} L = \langle f_{uu}, n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \langle (0, 0, 1), (-u, -v, 1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \\ M = \langle f_{uv}, n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \langle (0, 0, 0), (-u, -v, 1) \rangle = 0 \\ N = \langle f_{vv}, n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \langle (0, 0, 1), (-u, -v, 1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \end{aligned}$$

Donc :

$$II_p = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} (du^2 + dv^2)$$

### 1.2.3 Courbures d'une surface

Puisque l'application de Weingarten est symétrique, alors sa matrice associée  $II_p$  est diagonalisable.

**Définition 1.18 :** Les valeurs propres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  de  $II_p$  s'appellent les courbures principales de la surface  $S$  en  $p$ . Les vecteurs propres associés s'appellent les directions principales. La courbure moyenne de la surface  $S$  en  $p$  est la demi trace de  $II_p$  :

$$H = \frac{1}{2} \text{trace}(II_p) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

Le déterminant de la matrice  $II_p$  s'appelle courbure de Gauss (Ou courbure totale) de la surface  $S$  en  $p$  :

$$G = \det(II_p) = \tau_1 \times \tau_2$$

**Exemple 10 :** Dans l'exemple précédent, la matrice de la seconde forme fondamentale est donnée par :

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les courbures principales sont :

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

La courbure moyenne et la courbure de Gauss en un point  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  sont données par :

$$H = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

et :

$$G = \tau_1 \times \tau_2 = \frac{1}{1+u^2+v^2}$$

# Chapitre 2

## Surfaces minimales

### 2.1 Problème de Plateau et surfaces minimales :

Dès 1760 , le mathématicien Joseph-Louis Lagrange s'intéresse au problème suivant :

Décrire la surface d'aire minimale s'appuyant sur un contour donné.

Bien que quelques cas particuliers aient été résolus mathématiquement, il fallut attendre les travaux de Jesse Douglas sur le problème de Plateau pour apporter une solution théorique.

Le problème de Plateau se formule comme suit :

Déterminer la surface d'aire minimale qui s'appuie sur une ou plusieurs courbes fermées (c'est-à-dire la surface dont sa frontière est formée par ces courbes).

Le physicien Joseph Plateau a donné une réponse expérimentale de ce problème, en plongeant des fils de fer à la forme des courbes données dans l'eau savonneuse. En les sortant de l'eau , les structures de savon obtenues forment des surfaces, solutions du problème de Plateau.

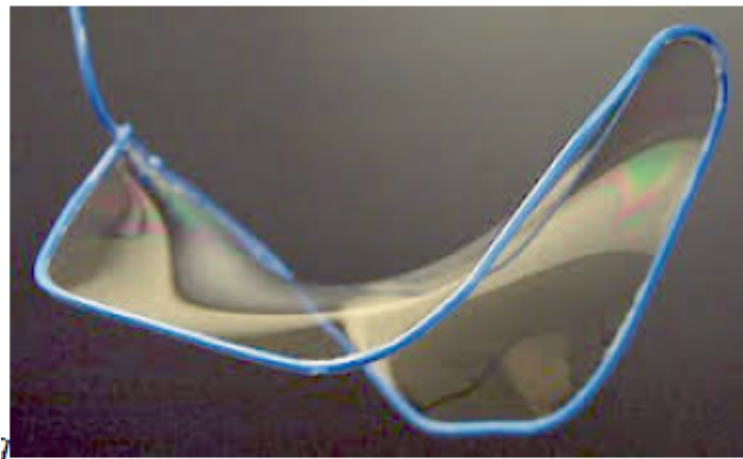


FIGURE 2.1 – Surface minimale

Rappelons qu'une surface est toujours localement le graphe d'une fonction lisse. Pour déterminer

une surface minimale, il suffit donc de déterminer le graphe d'une fonction.

**Définition 2.1 :** Une surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  est dite minimale si tout point  $p \in S$  possède un voisinage  $V \subset S$  qui est la surface de moindre aire parmi toutes les surfaces de même frontière.

Soient  $U \neq \emptyset$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , et

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longmapsto \psi(u) \end{aligned}$$

un difféomorphisme

Considérons l'ensemble :

$$H = \left\{ h \in \mathcal{C}^2(\bar{U}) \ ; \ h|_{\partial U} = \psi|_{\partial U} \right\}$$

c'est à dire l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2(\bar{U})$ , ayant le même bord  $\partial U$ .

On dit que le graphe de  $f \in H$  est minimal si pour tout  $h \in H$  :

$$A(f) \leq A(h)$$

Où :

$$A(f) = \int_{\bar{U}} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dudv$$

Le problème de détermination des surfaces minimales se formule comme suit :

Déterminons  $f \in H$  telle que :

$$A(f) = \min_{h \in H} A(h)$$

Supposons que  $f$  minimise  $A$  et choisissons  $\eta \in H$  tel que :

$$\eta|_{\partial U} \equiv 0$$

Considérons la famille de fonctions  $f_t$  paramétrée par :

$$f_t = f + t\eta$$

Il est clair que :

$$f_t \in H$$

En effet, puisque :

$$f \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$$

et :

$$t\eta \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$$

alors :

$$f + t\eta \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$$

Donc :

$$f_t \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$$

De plus :

$$\begin{aligned} f_{t|\partial U} &= (f + t\eta)|_{\partial U} \\ &= f|_{\partial U} + t\eta|_{\partial U} \\ &= f|_{\partial U} \\ &= \psi|_{\partial U} \end{aligned}$$

Le terme  $t\eta$  s'appelle la variation de  $f$ .

Puisque  $f$  est la fonction minimisant  $A$ , alors  $t = 0$  doit être un point critique de la fonction :

$$A(t) = A(f_t) = \int_{\bar{U}} \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} dudv$$

Cela signifie que :

$$\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = 0$$

Le théorème de la dérivation d'une intégrale paramétrée nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\bar{U}} \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} dudv \right) \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\bar{U}} \left( \frac{d}{dt} \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} \right) \Big|_{t=0} dudv \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour une fonction vectorielle  $g(t)$  nous avons :

$$\frac{d}{dt} |g(t)|^2 = 2 \langle g(t), \frac{d}{dt} g(t) \rangle$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} \right) &= \frac{\langle \nabla f_t, \nabla \eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}} \\ &= \left\langle \frac{\nabla f_t}{\sqrt{1 + |\nabla f_t|^2}}, \nabla \eta \right\rangle \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left( \sqrt{1 + |\nabla f_t|^2} \right) \Big|_{t=0} = \left\langle \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \nabla \eta \right\rangle$$

Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} A(t) \Big|_{t=0} = \int_{\bar{U}} \left\langle \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \nabla \eta \right\rangle dudv = 0$$

Appliquons maintenant la formule :

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \langle \nabla \varphi, F \rangle + \varphi(\operatorname{div} F)$$

(où  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse et  $F$  un champ de vecteur.)

nous obtenons :

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \nabla \eta \right\rangle = -\eta \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) + \operatorname{div} \left( \eta \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} A(t) \Big|_{t=0} = - \int_{\bar{U}} \eta \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) dudv + \int_{\bar{U}} \operatorname{div} \left( \eta \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) dudv$$

Et d'après le théorème de divergence, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) \Big|_{t=0} &= - \int_{\bar{U}} \eta \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) dudv + \int_{\partial \bar{U}} \operatorname{div} \left( \eta \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) dudv \\ &= - \int_{\bar{U}} \eta \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) dudv \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car :  $\eta \equiv 0$  sur  $\partial U$

Appliquons maintenant le théorème fondamental de calcul des variations, nous obtenons :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Cette equation s'appelle l'équation d'Euler-Lagrange pour les surfaces minimales. C'est une equation aux dérivées partielles quasi-linéaire et élliptique.

Or :

$$|\nabla f|^2 = f_u^2 + f_v^2$$

et :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) &= \operatorname{div} \left\langle \frac{f_u}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \frac{f_v}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{f_u}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_v}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{f_u}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right) \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \frac{f_u}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} &= \frac{1}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \left( f_{uu} + f_{uu} \cdot f_v^2 - f_{uv} f_u \cdot f_v \right) \\ &= \frac{1}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ f_{uu} \cdot (1 + f_v^2) - f_{uv} f_u \cdot f_v \right] \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right) = \frac{1}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ f_{vv} \cdot (1 + f_u^2) - f_{uv} f_u \cdot f_v \right]$$

Finalement :

$$\frac{1}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ f_{uu} (1 + f_v^2) + f_{vv} (1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} \right] = 0$$

Ou encore :

$$f_{uu}(1 + (f_v)^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + (f_u)^2) = 0 \quad (2.2)$$

C'est l'équation des surfaces minimales établie par Lagrange en 1762.

**Exemple 2.1 :** Prenons  $S$  le plan de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$(u, v) \longmapsto (u, v, au + bv + c)$$

Il est clair que les dérivées secondes de  $f(u, v) = au + bv + c$  sont toutes nulles.

Donc l'équation (2.2) est bien vérifiée.

Ainsi le plan est une surface minimale.

Mentionnons quelques résultats fondamentaux sur les problèmes d'existence de solution du problème de Plateau.

**Théorème 2.1** [3],[11] : Pour toute courbe de Jordan fermée rectifiable  $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ , il existe une solution au problème de Plateau.

**Théorème 2.2** [6] : Toute courbe de Jordan  $\Gamma \in \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) borde une surface minimale orientable plongée.

Pour d'autres résultats d'existence, d'unicité et de la régularité de la solution, voir [5].

En 1776, Jean Baptiste Meusnier a interprété l'équation (2.2) comme étant l'annulation de la courbure moyenne.

**Théorème 2.3** [4] : Une surface  $S$  est dite minimale si et seulement si sa courbure moyenne  $H$  est identiquement nulle  $H \equiv 0$ .

**Preuve 2.1 :** Soit  $S$  une surface paramétrée par :

$$f(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

Nous avons :

$$f_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u \end{pmatrix} \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v \end{pmatrix} \quad f_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{uu} \end{pmatrix} \quad f_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{vv} \end{pmatrix} \quad f_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{uv} \end{pmatrix}$$

Le vecteur normal  $n$  est donnée en un point  $p$  de  $S$  par :

$$n = \frac{(-g_u, -g_v, 0)}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}$$

Les coefficients de la première et seconde forme fondamentale sont données par :

$$E = \langle f_u, f_u \rangle = 1 + g_u^2$$

$$F = \langle f_u, f_v \rangle = g_u \cdot g_v$$

$$G = \langle f_v, f_v \rangle = 1 + g_v^2$$

$$L = \langle f_{uu}, n \rangle = \frac{g_{uu}}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}$$

$$M = \langle f_{uv}, n \rangle = \frac{g_{uv}}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}$$

$$N = \langle f_{vv}, n \rangle = \frac{g_{vv}}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}$$

Or :

$$H = \frac{1}{2} \frac{-2FM + EN + LG}{EG - F^2}$$

Donc :

$$H = 0 \iff -2FM + EN + LG = 0$$

$$\iff \frac{-2(g_{uv} \cdot g_u \cdot g_v) + g_{vv}(1 + g_u^2) + g_{uu}(1 + g_v^2)}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} = 0$$

$$\iff g_{uu}(1 + g_v^2) + g_{vv}(1 + g_u^2) - 2(g_{uv} \cdot g_u \cdot g_v) = 0$$

Qui est tout simplement l'équation (2.2) des surfaces minimales. La surface  $S$  est donc minimale si et seulement si sa courbure moyenne  $H$  est nulle.

### 2.1.1 Coordonnées isothermes

Vérifier qu'une surface est minimale en utilisant le calcul de la courbure moyenne est un travail fastidieux. Pour simplifier les calculs nous allons considérer une paramétrisation simple appelée

paramétrisation isothèrme.

**Définition 2.2 :** Une paramétrisation  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'une surface  $S$  est dite isothèrme (ou conforme) si :

$$\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle \text{ et } \langle f_u, f_v \rangle = 0$$

C'est à dire que la matrice de la première forme fondamentale est proportionnelle à l'identité.

Il est à noter que toute surface peut être paramétrée par des coordonnées isothèrmes [10].

**Théorème 2.4 [10] :** Une surface  $S$  paramétrée par les coordonnées isothèrmes :

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (f_1(u, v) \ , \ f_2(u, v) \ , \ f_3(u, v)) \end{aligned}$$

est minimale si et seulement si ses fonctions coordonnées  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont harmoniques.

**Preuve 2.2 :**

Puisque  $S$  est paramétrée par des coordonnées isothèrmes, alors :

$$E = G = \langle f_u, f_u \rangle \quad \text{et} \quad F = \langle f_u, f_v \rangle = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{EN + LG}{EG} \\ &= \frac{N + L}{2E} \\ &= \frac{\langle f_{uu} + f_{vv}, n \rangle}{2E} \\ &= \frac{\langle \Delta f, n \rangle}{2E} \end{aligned}$$

Si  $S$  est minimale, alors :  $H \equiv 0$ , Donc :  $\langle \Delta f, n \rangle = 0$ . Ce qui implique que  $f$  est harmonique.

Inversement si  $f$  est harmonique alors :  $\Delta f = 0$

Donc :

$$EH.n = \vec{0}$$

et puisque :

$$n \neq \vec{0}$$

$$E = \langle f_u, f_u \rangle \neq 0$$

alors :

$$H \equiv 0$$

Par conséquent  $S$  est minimale.

## 2.2 Représentation de Weierstrass-Enneper pour les surfaces minimales

Au 19<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens allemands Karl Weierstrass et Alferd Enneper ont trouvés un moyen de construction de surfaces minimales en utilisant à la fois la géométrie différentielle et l'analyse complexe.

La représentation de Weierstrass-Enneper affirme que toute surface minimale peut être représentée par deux fonctions complexes dans le premier cas et une fonction complexe dans le deuxième cas. Rappelons quelques notions de l'analyse complexe qui seront utiles pour le reste de cette partie.

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $f$  une application de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

**Définition 2.3 :** On dit que  $f$  est holomorphe en un point  $z_0 \in U$ , si la limite suivante existe :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

On appelle cette limite la dérivée de  $f$  en  $z_0$ , et est notée par  $f'(z_0)$ .

On dit que  $f$  est holomorphe sur  $U$ , si elle est holomorphe en tout point  $z$  de  $U$ .

**Remarque 2.1 :**  $f$  est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

**Définition 2.4 :**  $f$  est dite méromorphe sur  $U$  si elle est holomorphe sur  $U$  sauf pour des points singuliers isolés qui sont tous des pôles.

Rappelons qu'un point  $z_0$  est un pôle de  $f$  si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

### Théorème 2.5 : Conditions de Cauchy-Riemann

La fonction complexe

$$z = x + iy \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

est holomorphe au point  $z_0 = x_0 + iy_0$  si et seulement si les fonctions :

$$(x, y) \mapsto P(x, y)$$

$$(x, y) \mapsto Q(x, y)$$

sont différentiables au point  $(x_0, y_0)$ , et si leurs dérivées vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

La dérivée  $f'$  de  $f$  en  $z$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Soit  $S$  une surface définie par une paramétrisation isotherme  $(X, U)$  :

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (X^1(u, v), X^2(u, v), X^3(u, v)) \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{R}^2$  est homéomorphe à  $\mathbb{C}$ , alors on peut identifier  $(u, v)$  avec le nombre complexe  $z = u + iv$ .

Nous avons :

$$z + \bar{z} = 2u \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2iv$$

Ainsi :

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

On peut voir  $X$  comme une application d'un domaine  $U$  de  $\mathbb{C}$  à valeurs réelles.

$$X(z, \bar{z}) = (X^1(z), X^2(z), X^3(z))$$

Si  $F$  est une fonction arbitraire de :

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$v = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2i} \frac{\partial F}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial u} - i \frac{\partial F}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2i} \frac{\partial F}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial u} + i \frac{\partial F}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

Ces équations s'appellent les dérivées de Wirtinger.

de plus :

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) F du + i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) F dv \\ &= \frac{\partial F}{\partial z} (du + idv) + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} (du - idv) \end{aligned}$$

**Théorème 2.6 : Première représentation de Weierstrass-Enneper**

Soit  $X(z) = (X^1(z), X^2(z), X^3(z))$  une surface minimale sur un domaine  $U$  de  $\mathbb{C}$ .

Alors il existe une fonction  $f$  holomorphe sur  $U$ , et une fonction  $g$  méromorphe sur  $U$ , non identiquement nulles telle que  $gf^2$  soit holomorphe, et :

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{1}{2} f(1 - g^2) dz \right]$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{i}{2} f(1 + g^2) dz \right]$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \left[ \int f g dz \right]$$

Réciproquement, de telles fonctions  $f$  et  $g$  définissent une surface minimale  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Preuve 2.3 :**

Soit  $S$  une surface minimale définie par une paramétrisation isotherme  $(X, U)$

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (X^1(u, v), X^2(u, v), X^3(u, v)) \end{aligned}$$

Posons :

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

Avec :

$$\phi_j = \frac{\partial X^j}{\partial z} = X_z^j = \frac{1}{2}(X_u^j - iX_v^j) \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

Nous avons :

$$(\phi)^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = (X_z^1)^2 + (X_z^2)^2 + (X_z^3)^2$$

Or :

$$X_z^j = \left[ \frac{1}{2}(X_u^j - iX_v^j) \right]^2 = \frac{1}{4} \left[ (X_u^j)^2 + (X_v^j)^2 - 2iX_u^j X_v^j \right]$$

Donc :

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \sum_{j=1}^3 \frac{1}{4} \left[ (X_u^j)^2 + (X_v^j)^2 - 2iX_u^j X_v^j \right] \\ &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 (X_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (X_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 X_u^j X_v^j \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2i \langle X_u, X_v \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF) \end{aligned}$$

Comme  $X$  est isotherme, alors :

$$E = G \quad \text{et} \quad F = 0$$

Par conséquent,  $\phi = 0$ .

Inversement, si  $\phi = 0$ , alors :

$$\frac{1}{4} (E - G - 2iF) = 0 \iff E = G \quad \text{et} \quad F = 0$$

Donc  $X$  est isotherme.

Or :

$$\phi^2 = 0 \iff (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -(\phi_3)^2$$

Posons :

$$\begin{aligned} f &= \phi_1 - i\phi_2 \\ g &= \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\phi_3 = f.g$$

et :

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -f.g^2$$

Et puisque :

$$f = \phi_1 - i\phi_2$$

alors :

$$\phi_1 = f + i\phi_2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \phi = 0 &\iff (\phi_1)^2 + (\phi_2) + (\phi_3)^2 = 0 \\ &\iff (f + i\phi_2)^2 + (\phi_2) + (f.g)^2 = 0 \\ &\iff f^2 + 2if\phi_2 + (f.g)^2 = 0 \\ &\iff f^2(1 + g^2) + 2if\phi_2 = 0 \\ &\iff \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= f + i\left(\frac{i}{2}f(1 + g^2)\right) \\ &= f - \frac{f}{2} - \frac{fg^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) \end{aligned}$$

Finalemment :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 + g^2) \tag{2.3}$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \tag{2.4}$$

$$\phi_3 = f.g^2 \tag{2.5}$$

La démonstration du théorème réclame les deux résultats suivants :

**Lemme 2.1 :**

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \Delta X$$

où :  $\Delta$  désigne le laplacien de  $X$ .

**Preuve 2.4 :**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) + i \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - i \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + i \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \Delta X
 \end{aligned}$$

**Théorème 2.7 :** Soit  $S$  une surface définie par une paramétrisation isotherme  $(X, U)$ , alors  $S$  est minimale si et seulement si chaque  $\phi_j$  est holomorphe .

**Preuve 2.5 :**

Si  $S$  est minimale, alors  $X$  est harmonique, et :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \Delta X = 0$$

Ce qui implique que chaque  $\phi_j$  est holomorphe.

Inversement  $\phi_j$  est holomorphe, alors :  $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right) = 0$$

$$\implies \frac{1}{4} \Delta X = 0$$

$$\implies \Delta X = 0$$

$$\implies X \text{ est harmonique}$$

$$\implies S \text{ est minimale}$$

Donc toute surface minimale peut être représentée par une fonction  $\phi$  de composants holomorphes, et telle que  $\phi^2 = 0$ .

De plus les coordonnées isothermes de cette surface sont données en fonction de  $\phi$  par la relation :

$$X^j(z) = c_j + 2\operatorname{Re}\left(\int \phi_j dz\right) \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

où  $c_j$  est une constante.

En effet :

$$\begin{aligned} z = u + iv &\implies dz = du + idv \\ &\implies \phi^j dz = \frac{1}{2} (X_u^j - iX_v^j) (du + idv) \\ &\implies \phi^j dz = \frac{1}{2} [(X_u^j du + X_v^j dv) + i(X_u^j dv + X_v^j du)] \\ &\implies X_u^j du + X_v^j dv = 2\operatorname{Re}(\phi_j dz) \\ &\implies dX^j = 2\operatorname{Re}(\phi_j dz) \end{aligned}$$

Intégrons les deux côtés de la dernière égalité, nous obtenons :

$$dX^j = 2\operatorname{Re}\left(\int \phi_j dz\right) + c_j \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

La meilleure façon de construire  $\phi$  pour qu'elle soit holomorphe et  $\phi^2 = 0$ , est donnée par les relations (2.3), (2.4) et (2.5).

Avec  $f$  une fonction holomorphe, et  $g$  méromorphe, telles que  $fg^2$  soit holomorphe.

Dans ce cas  $\phi$  est holomorphe et :

$$\phi^2 = \frac{1}{4}[f(1-g^2)]^2 - \frac{1}{4}[f(1+g^2)]^2 + (fg)^2 = 0$$

Finalement :

$$X^1(z) = \operatorname{Re}\left[\int \frac{1}{2}(1-g^2)f dz\right]$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re}\left[\int \frac{i}{2}(1+g^2)f dz\right]$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re}\left[\int fg dz\right]$$

**Exemple 2.2 :** Si  $U = \mathbb{C}$ ,  $f(z) = 1$  et  $g(z) = 1$  Alors :

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{1}{2}(1 - g^2)dz \right] = \operatorname{Re} \left[ \int 0dz \right] = 1$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{i}{2}(1 + g^2)dz \right] = \operatorname{Re} \left[ \int idz \right] = \operatorname{Re}(iz) = -v$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \left[ \int fg^2dz \right] = \operatorname{Re} \left[ \int dz \right] = \operatorname{Re}(z) = u$$

Donc :

$$X = (1, -v, u)$$

C'est l'équation du plan, qui est une surface minimale.

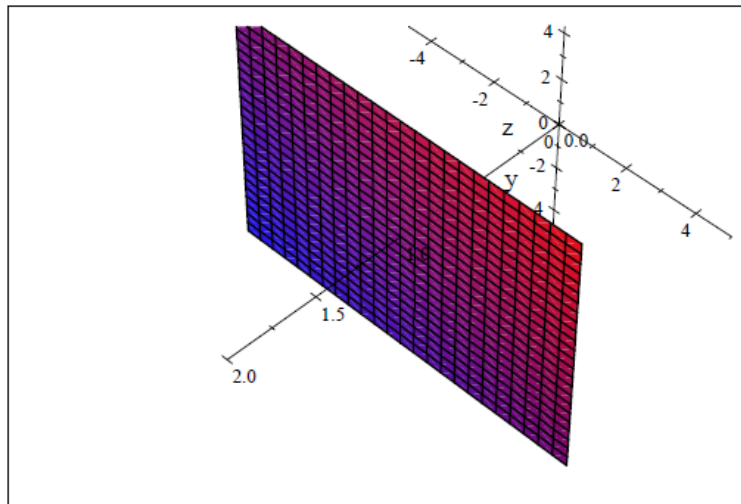


FIGURE 2.2

Il existe une autre façon d'écrire la représentation de Weierstrass-Enneper, en utilisant une seule fonction holomorphe.

Soit  $g$  une fonction holomorphe sur  $U$ , ayant un inverse  $g^{-1}$ .

Posons le changement de variable :

$$\zeta = g(z)$$

Donc :

$$d\zeta = g'(z)dz$$

et :

$$f(z)dz = \frac{f(z)}{g'(z)}d\zeta = \frac{f(g^{-1}(\zeta))}{g'(g^{-1}(\zeta))}d\zeta$$

On définit la fonction  $F$  de variable  $\zeta$  par :

$$F(\zeta) = \frac{f(g^{-1}(\zeta))}{g'(g^{-1}(\zeta))}$$

Il est clair que  $F$  est holomorphe, et :

$$F(\zeta)d\zeta = f(z)dz$$

Remplaçons  $g(z)$  par  $\zeta$  et  $f(z)dz$  par  $F(\zeta)d\zeta$  dans la première représentation de Weierstrass-Enneper nous obtenons :

### **Théorème 2.8 : Deuxième représentation de Weierstrass-Enneper**

Soit  $U$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$ .

Si  $F$  est holomorphe sur  $U$ , alors  $f$  définit une surface minimale paramétrée par :

$$X(z) = (X^1(z), X^2(z), X^3(z))$$

Avec :

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)F(\zeta)d\zeta \right]$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{i}{2}(1 + \zeta^2)F(\zeta)d\zeta \right]$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \zeta F(\zeta)d\zeta \right]$$

1.  $F(\zeta) = 1$  correspond à la surface d'Enneper.
2.  $F(\zeta) = \frac{k}{2\zeta^2}$ , avec  $k$  réel correspond au caténoïde.
3.  $F(\zeta) = \frac{ik}{2\zeta^2}$ , avec  $k$  réel correspond au hélicoïde.
4.  $F(\zeta) = \frac{ik}{1-\zeta^4}$ , correspond à la première surface de Scherk.

**Exemple 2.3** : Prenons :  $U = \mathbb{C}$  ,  $F(\zeta) = 1$  Nous avons :

$$X^1(\zeta) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)d\zeta \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right] = \frac{1}{6}(-u^3 + uv^2 + 3v)$$

$$X^2(\zeta) = \operatorname{Re} \left[ \int \frac{i}{2}(1 + \zeta^2)F(\zeta)d\zeta \right] = \frac{i}{2} \operatorname{Re} \left[ \zeta + \frac{\zeta^3}{3} \right] = \frac{1}{6}(-v^3 + uv^2 - 3v)$$

$$X^3(\zeta) = \operatorname{Re} \left[ \int \zeta F(\zeta)d\zeta \right] = \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta^2}{2} \right) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

Donc la paramétrisation de cette surface est :

$$X(u, v) = \frac{1}{6}(-u^3 + 3uv^2 + 3u, v^3 + 3u^2v - 3v, 3u^2 - 3v^2)$$

qui est la paramétrisation de la surface de d'Enneper.

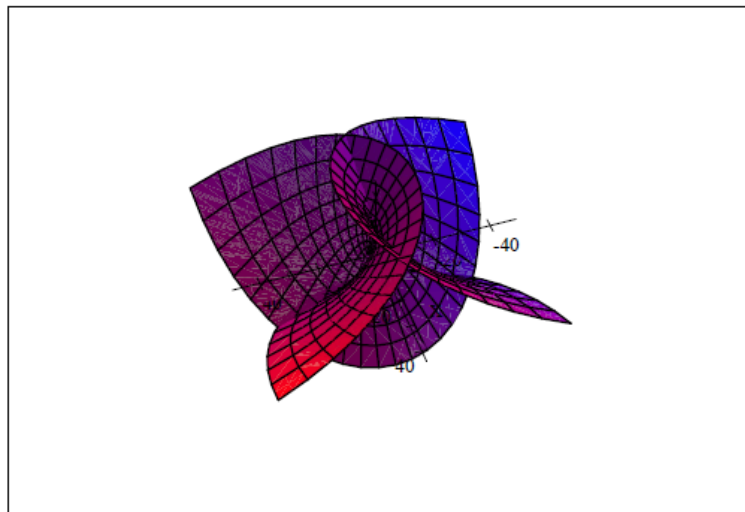


FIGURE 2.3 – Surface d'Enneper avec intersection

# Chapitre 3

## Exemples de surfaces minimales

Dans ce chapitre, nous allons voir comment la représentation de Weierstrass-Enneper peut être utilisée pour déterminer des surfaces minimales, en intégrant simplement des fonctions complexes. Nous présentons les représentations des quatre surfaces minimales qui ont été les premières à être découvertes à côté du plan.

### 3.1 Caténoïde

Le caténoïde est une surface de révolution obtenue en tournant la courbe,

$$\alpha(x) = (x, \cosh x), x \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe des  $x$ . C'est une surface minimale et complète. Elle était étudiée par Euler en 1740. Le nom caténoïde vient de catena : chaîne, qui est aussi le nom latin de la chaînette. Elle constitue avec le plan, les seules surfaces de révolutions minimales.

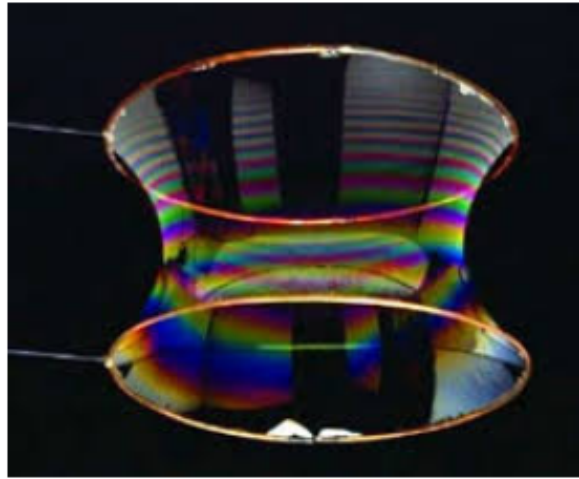


FIGURE 3.1 – Caténoïde

Prenons :

$$U = \mathbb{C} , \quad f(z) = -\exp(-z) \quad \text{et} \quad g(z) = -\exp(z)$$

Il est clair que les fonctions  $f$  et  $g$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ .

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)f = \sinh(z)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + g^2)f = -i \cosh(z)$$

$$\phi_3 = f \cdot g = 1$$

La première représentation de Weierstrass-Enneper nous donne :

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \sinh(z) dz \right] = \operatorname{Re} \left[ \cosh(z) \right] = \cosh(u) \cos(v)$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \left[ \int i \cosh(z) dz \right] = \operatorname{Re} \left[ -i \sinh(z) \right] = \cosh(u) \sin(v)$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \left[ \int dz \right] = \operatorname{Re}(z) = u$$

Ainsi :

$$X(u, v) = (\cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v), u)$$

qui est la paramétrisation du caténoïde (figure3.2).

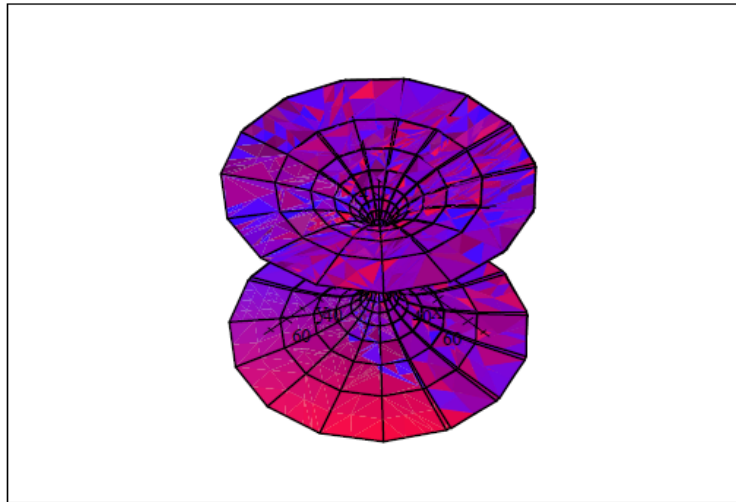


FIGURE 3.2

### Caractéristiques

– Equation cartésienne :

$$\rho = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^*$$

Où,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

– Paramétrisation :

$$X(u, v) = \left( a \cos(u) \cosh\left(\frac{v}{a}\right), \sin(u) \cosh\left(\frac{v}{a}\right), u \right) \quad a \in \mathbb{R}^*$$

– Première forme fondamentale :

$$ds^2 = I_p = a^2 \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) du^2 + \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) dv^2$$

– Élément d'aire :

$$dA = a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) du dv$$

– Deuxième forme fondamentale :

$$II_p = -a du^2 + \frac{1}{a} dv^2$$

– Courbure moyenne :

$$H = 0 \text{ (surface minimale)}$$

– Courbure de Gauss :

$$G = -\frac{\sec^4\left(\frac{v}{a}\right)}{a^2}$$

## 3.2 Hélicoïde

L'hélicoïde est une surface s'appuyant sur une hélice et sur un axe. On le génère par le déplacement d'une droite perpendiculaire à l'axe d'un cylindre droit de rayon  $r$  à vitesse constante.

C'est une surface minimale et complète. Elle fut découverte par J-Meusnier en 1776.

L'hélicoïde constitue avec le plan les seules surfaces réglées (c'est-à-dire pouvant être obtenue par déplacement d'une droite dans l'espace).

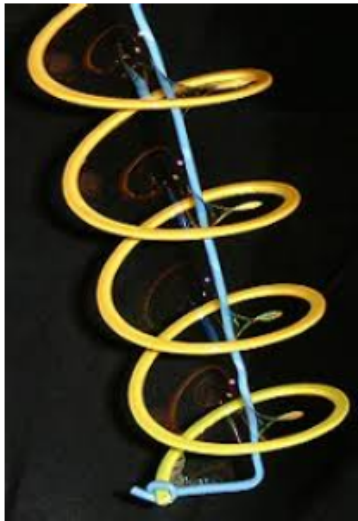


FIGURE 3.3 – Hélicoïde

Prenons :

$$U = \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \exp(-z) \quad \text{et} \quad g(z) = -i \exp(z)$$

les fonctions  $f$  et  $g$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ . Nous avons :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) = \cosh(z)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) = -i \sinh(z)$$

$$\phi_3 = f.g = -i$$

Donc :

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \cosh(z) dz \right] = \operatorname{Re} [\sinh(z)] = \sinh(u) \cos(v)$$

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \left[ \int -i \sinh(z) dz \right] = \operatorname{Re} [-i \cosh(z)] = \sinh(u) \sin(v)$$

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \left[ \int -i dz \right] = \operatorname{Re} [-iz] = v$$

où  $z = u + iv$

Finalement :

$$X(u, v) = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), v)$$

Qui est une reparamétrisation du hélicoïde (Figure 3.4).

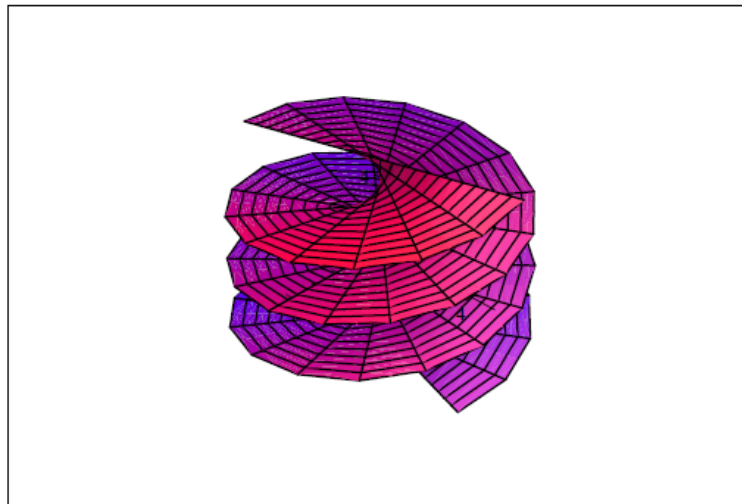


FIGURE 3.4 – Hélicoïde

Si on pose le changement de variable :

$$(\omega, v) = (\sinh(u), v)$$

Alors :

$$X(\omega, v) = (\omega \cos v, \omega \sin v, v)$$

## Caractéristiques

– Equation cartésienne :

$$y = x \tan\left(\frac{z}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}^*$$

– Paramétrisation :

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av) \quad a \in \mathbb{R}^*$$

– Première forme fondamentale :

$$I_p = dS^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2$$

– Élément d'aire :

$$dA = \sqrt{a^2 + u^2} du dv$$

– Deuxième forme fondamentale :

$$II_p = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} du dv$$

– Courbure moyenne :

$$H = 0 \quad (\text{surface minimale})$$

– Courbure de Gauss :

$$G = -\frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}$$

**Remarque 3.1 :** Notons que le caténoïde peut être déformé continûment en un hélicoïde.

Les surfaces intermédiaires sont les hélicoïdes minimaux, se sont des surfaces minimales qui sont localement isométriques à l'hélicoïde.

En particulier l'hélicoïde est localement isométrique.

L'équation de cette transformation est :

$$Z_t = \cos t (\sinh v \sinh u, -\sinh v \cosh u, u) + \sin t (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, u) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

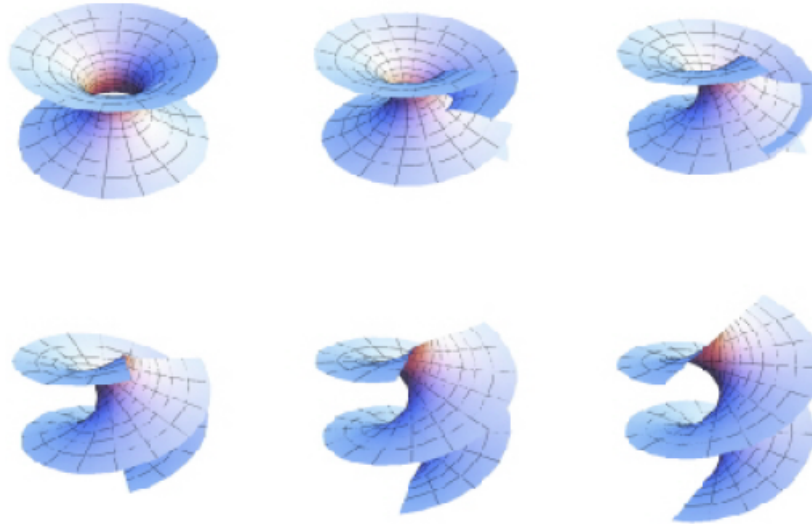


FIGURE 3.5 – Déformation d'un caténoïde en hélicoïde

- Si  $t = 0$ , on trouve une reparamétrisation de l'hélicoïde.
- Si  $t = \frac{\pi}{2}$ , on trouve le caténoïde.

### 3.3 Surfaces de Scherk

En 1835, P.Scherk a déterminé les solutions de l'équation d'Euler Lagrange qui sont de la forme (surfaces de translation) :

$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$

Les fonctions solutions sont de la forme :

$$f(x, y) = a \ln \left( \frac{\cos ay}{\cos ax} \right) \quad a > 0$$

Les surfaces sont doublement périodiques. Remarquons que la surface de Scherk est définie si :

$$\left( \frac{\cos ay}{\cos ax} \right) > 0$$

Par exemple  $a = 1$ , et  $(x, y) \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \times ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

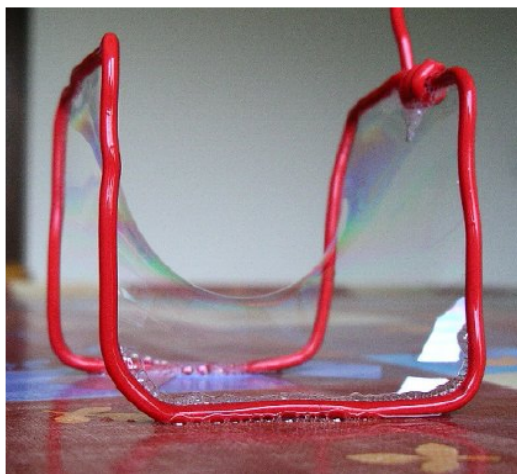


FIGURE 3.6 – Première surface de Scherk

Scherk a découvert d'autres surfaces minimales particulières, comme la seconde surface de Scherk, qui est simplement périodique.

la seconde surface de Scherk est donnée par l'équation :

$$\sin(z) = \sinh(x) \sinh(y)$$

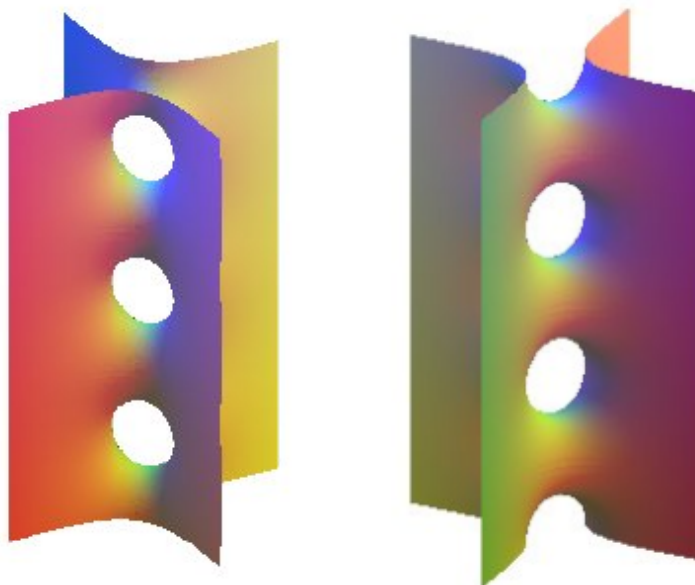


FIGURE 3.7 – Seconde surface de Scherk

Prenons :

$$U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \text{ et } (z) = \frac{4}{1-z^4}, \quad g(z) = z$$

Il est clair que  $f$  et  $g$  sont des fonctions holomorphes sur  $U$ .

Nous avons :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)f = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \right) = \frac{i}{z + i} - \frac{i}{z - i}$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)f = \frac{i}{2} \left( \frac{i}{1 - z^2} \right) = \frac{i}{z + 1} - \frac{i}{z - 1}$$

$$\phi_3 = f.g = \frac{4z}{1 - z^4} = \frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{2z}{z^2 - 1}$$

Donc :

$$X^1(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \left( \frac{i}{z + i} - \frac{i}{z - i} \right) dz \right] = \operatorname{Re} \left[ i \log \left( \frac{z + i}{z - i} \right) \right] = -\arg \left( \frac{z + i}{z - i} \right)$$

De même :

$$X^2(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \left( \frac{i}{z + 1} - \frac{i}{z - 1} \right) dz \right] = \operatorname{Re} \left[ i \log \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right) \right] = -\arg \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

et :

$$X^3(z) = \operatorname{Re} \left[ \int \left( \frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{2z}{z^2 - 1} \right) dz \right] = \operatorname{Re} \left[ \log \left( \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \right) \right] = \log \left| \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \right|$$

On peut vérifier que :

$$\frac{z + i}{z - i} = \frac{|z|^2 - 1}{|z - i|^2} + i \frac{z + \bar{z}}{|z - i|^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos X^1 &= \cos \left( -\arg \left( \frac{z + i}{z - i} \right) \right) \\ &= \cos \left( \arg \left( \frac{z + i}{z - i} \right) \right) \\ &= \frac{\operatorname{Re} \left( \frac{z + i}{z - i} \right)}{\left| \frac{z + i}{z - i} \right|} \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{|z - 1|^2} \cdot \left| \frac{z - i}{z + i} \right| \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{|z^2 + 1|} \end{aligned}$$

De même puisque :

$$\frac{z + 1}{z - 1} = \frac{|z|^2 - 1}{|z - 1|^2} + i \frac{z - \bar{z}}{|z - 1|^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \cos X^2 &= \cos \left( -\arg \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \right) \\
 &= \cos \left( \arg \left( \frac{z+1}{z-1} \right) \right) \\
 &= \frac{\operatorname{Re} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)}{\left| \frac{z+1}{z-1} \right|} \\
 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} \cdot \frac{|z-1|}{|z+1|} \\
 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z^2 - 1|}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\cos \frac{X^2}{X^1} = \frac{|z|^2 + 1}{|z^2 - 1|} = \exp(X^3)$$

Finalement :

$$X^3 = \log \left( \cos \frac{X^2}{X^1} \right)$$

et on retrouve l'équation de la première surface de Scherk.

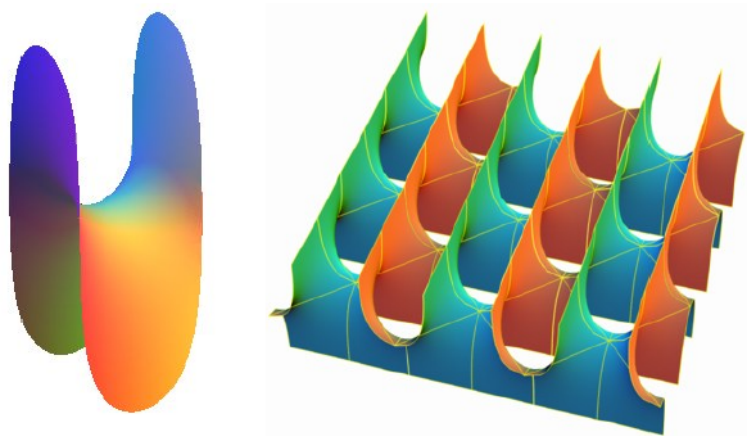


FIGURE 3.8 – Première surface de Scherk

## Caractéristiques

– Equation cartésienne :

$$\exp \left( \frac{z}{a} \right) \cos \left( \frac{x}{a} \right) = \cos \left( \frac{y}{a} \right) \quad a > 0$$

– Paramétrisation :

$$X(u, v) = \left( u, v, a \log \left( \frac{\cos v}{\cos u} \right) \right), \quad (u, v) \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \times \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

– Courbure moyenne :

$$H = 0 \quad (\text{surface minimale})$$

### 3.4 Surface d'Enneper

La surface d'Enneper est une surface minimale étudiée par A. Enneper en 1863. C'est une surface non plongée, avec des auto-intersections.

On peut imaginer une surface d'Enneper comme une surface s'appuyant sur un contour comme celui tracé sur une balle de Tennis.

La surface obtenue est la moitié de la surface de balle de Tennis.



FIGURE 3.9 – Surface d'Enneper

Le choix le plus simple pour la première paramétrisation de Weierstrass-Enneper est de prendre

$$U = \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = 2 \quad \text{et} \quad g(z) = z$$

Nous avons dans ce cas :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)f = \frac{1}{2}(1 - z^2)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)f = \frac{i}{2}(1 + z^2)$$

$$\phi_3 = fg = z$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X^1(z) &= \operatorname{Re} \left[ \int \frac{1}{2}(1 - z^2) dz \right] = \frac{1}{2} \left( u + uv^2 - \frac{u^3}{3} \right) \\ X^2(z) &= \operatorname{Re} \left[ \int \frac{i}{2}(1 + z^2) dz \right] = \frac{1}{2} \left( -v - u^2v + \frac{v^3}{3} \right) \\ X^3(z) &= \operatorname{Re} \left[ \int z dz \right] = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

où  $z = u + iv$ .

Donc :

$$X(u, v) = \left( u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2 \right)$$

qui est la paramétrisation de la surface d'Enneper.

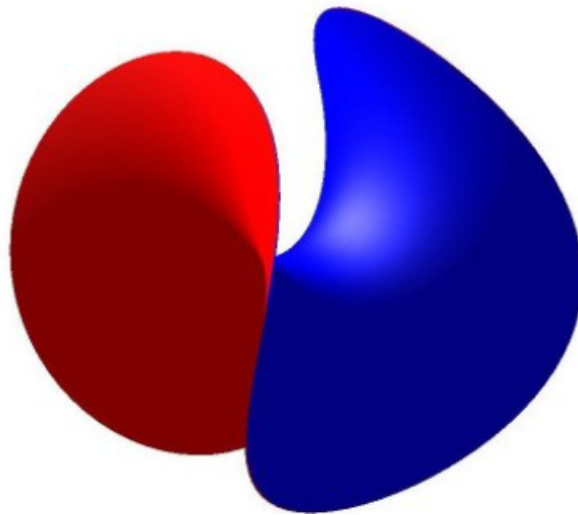


FIGURE 3.10 – Surface d'Enneper

## Caractéristiques

– Equation cartésienne :

$$\left[ a \frac{y^2 - x^2}{2z} + \frac{2}{9} z^2 + \frac{2}{3} a^2 \right]^3 = 6a^3 \left[ a \frac{y^2 - x^2}{4z} - \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + \frac{8}{9} z^2) + \frac{2}{9} a^2 \right]^2 \quad a > 0$$

– Paramétrisation :

$$X(u, v) = a \left( u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2 \right)$$

– Première forme fondamentale :

$$I_p = ds^2 = a^2 (1 + u^2 + v^2)^2 (du^2 + dv^2)$$

– Élément d'aire :

$$dA = a^2 (1 + u^2 + v^2)^2 du dv$$

– Deuxième forme fondamentale :

$$II_p = dS^2 = 2a^2 (du^2 + dv^2)$$

– Courbure moyenne :

$$H = 0 \quad (\text{surface minimale})$$

– Courbure de Gauss :

$$G = \frac{4a^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

Si en prend :

$$U = \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = 1 \quad \text{et} \quad g(z) = z^{n-1} \quad , \quad n \geq 2$$

Dans la première paramétrisation de Weierstrass-Ennepper, nous obtenons la surface d'Ennepper d'ordre  $n$ , paramétrisée par :

$$X(z) = \left[ a \operatorname{Re} \left( z - \frac{z^{2n-1}}{2n-1} \right), a \operatorname{Re} \left( -i \left( z + \frac{z^{2n-1}}{2n-1} \right) \right), 2a \operatorname{Re} \left( \frac{z^n}{n} \right) \right]$$

- Pour  $n = 2$ , nous obtenons la surface d'Ennepper classique.
- Pour  $n = 3$ , nous obtenons la seconde surface d'Ennepper.
- Pour  $n = \frac{3}{2}$ , nous obtenons la surface de Bour.

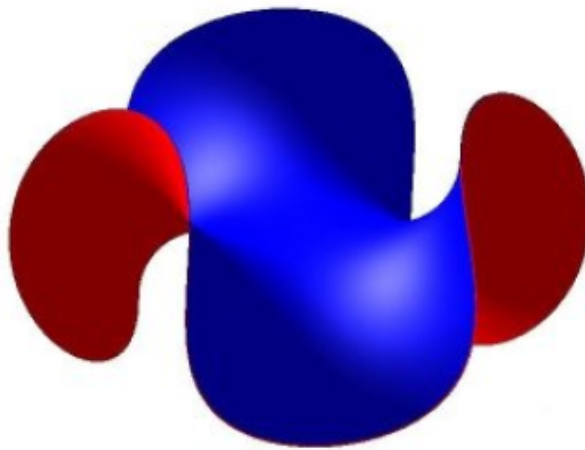


FIGURE 3.11 – seconde surface d'Ennepper

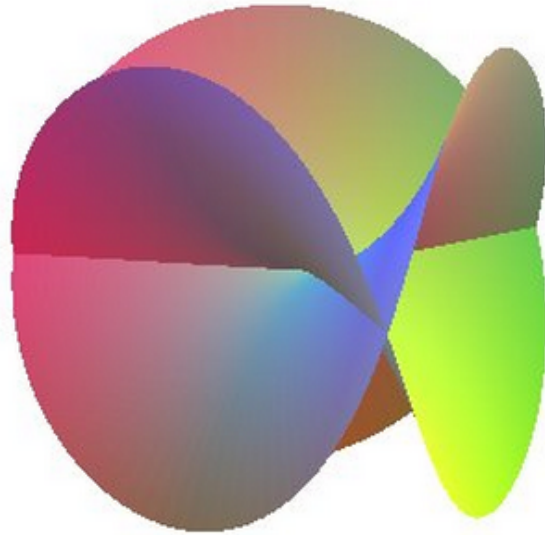


FIGURE 3.12 – Surface de Bour

# Bibliographie

- [1] J. Barbosa and G. Colares : Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  . Translated from the Portuguese. Lecture Notes in Mathematics, 1195. Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [2] C.Costa. Surfaces minimales dans  $\mathbb{R}^3$ . Séminaire de théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), 53-91.
- [3] J. Douglas, Solution of the problem of Plateau, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 263-321.
- [4] M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, (1976).
- [5] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 3rd edition, Springer 1998.
- [6] W. H. Meeks III. Lectures on Plateau's Problem. Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brazil, 1978.
- [7] W. H. Meeks III and J. Pérez. The classical theory of minimal surfaces. Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 48, No 3, July, (2011), 325–407.
- [8] A. Michelat, S.Y.Zhao. Quelques aspects des surfaces minimales. ENS, 2013-2014.
- [9] L.Nadjadi. Quelques aspects sur les surfaces minimales. Thèse de master, Université Moulay Tahar (Saida), 2015.
- [10] R. Osserman. A Survey of Minimal Surfaces. Dover Publications, New York, 2nd edition, (1986).
- [11] T. Rado, On the problem of Plateau, Erenbnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin 1933.
- [12] R. Sharma. The Weierstrass representation always gives a minimal surface Volume 14, No 1, Spring (2013).
- [13] M.Weber. Classical minimal surfaces in euclidean space by examples. September 25, (2001).