

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



CENTRE UNIVERSITAIRE SALHI AHMED NAAMA



Institut des Sciences et Technologies

Département des Sciences Techniques

Polycopié du cours

TRAITEMENT DU SIGNAL

Dans le cadre du programme pédagogique
de la formation LMD
3^{ème} Année Licence

SPECIALITE :
TELECOMMUNICATION

Référence :	
-------------	--

Année universitaire 2022-2023

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



CENTRE UNIVERSITAIRE SALHI AHMED NAAMA



Institut des Sciences et Technologies

Département des Sciences Techniques

Polycopié du cours

TRAITEMENT DU SIGNAL

Dans le cadre du programme pédagogique
de la formation LMD
3^{ème} Année Licence

SPECIALITE :
TELECOMMUNICATION

Réalisé par:
Dr HABCHI Yassine
Année universitaire 2022-2023

Avant- propos

Cette matière fait partie de l'unité fondamentale UEF 3.1.1 qui consiste à fournir aux étudiants de troisième année licence parcours Télécommunication des connaissances de base sur le traitement numérique du signal comme l'analyse temporel et spectrale, filtres analogiques et numériques, et les lois de probabilités et statistiques.

La structure de ce document, constituée de cinq (05) chapitres, a été élaborée afin de répondre aux questions essentielles et fondamentales de cette discipline. Des rappels sur les principaux résultats de la Théorie du signal ont fait l'objet du premier chapitre. Les processus aléatoires sont consacrés au deuxième chapitre. Dans le troisième chapitre, nous introduisons les différentes méthodes d'analyse et synthèse des filtres analogiques. Le quatrième et le cinquième chapitre ont été consacrés à l'échantillonnage des signaux et transformées Discrètes.

 TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : Rappels des principaux résultats de la théorie du signal

1.1 Signaux.....	05
1.2 Classification des signaux	06
1.3 Les signaux particuliers.....	08
1.4 Notion de puissance et énergie	09
1.5 Série de Fourier	09
1.6 La convolution et la corrélation.....	13
1.7 Théorème de Wiener-Kintchine.....	18
1.8 Notion de bruit.....	19
1.9 Exercices	20

CHAPITRE II : Processus aléatoires

2.1 Signal aléatoire	22
2.2 Processus aléatoire	23
2.3 Probabilité, Fonction de répartition et densité de probabilité	24
2.4 Moments statistiques.....	27
2.5 Variable aléatoire discrète et continues	29
2.6 Espérance mathématique	30
2.7 Variance et écart-type	30
2.8 Caractéristiques des processus aléatoires	31
2.9 Stationnarité	32
2.10 Ergodisme.....	33
2.11 Densité spectrale de puissance	34
2.12 Processus particulières	35
2.13 Les bruits	38
2.14 Exercices	42

CHAPITRE III : Analyse et synthèse des filtres analogiques

3.1 Rappels sur la transformée de Laplace	45
3.2 Filtrage linéaire	48
3.3 Stabilité des filtres analogiques.....	50
3.4 Réponse d'un filtre linéaire.....	50
3.5 Types de filtres.....	52
3.6 Filtres passifs et actifs	55
3.7 Autre filtres.....	55
3.8 Analyse temporelle et fréquentielle des filtres	57
3.9 La synthèse des filtres analogiques	59
3.10 Exercices	61

CHAPITRE IV : Echantillonnage des signaux

4.1 Echantillonnage.....	64
4.2 Analyse fréquentielle.....	65
4.3 Théorie d'échantillonnage de Shannon.....	67
4.4 Reconstitution du signal analogique.....	68
4.5 Quantification.....	70
4.6 Les CAN.....	71
4.7 Les CNA.....	71
4.8 Exercices.....	72

CHAPITRE V : Transformées discrètes

5.1 Les signaux numériques.....	75
5.2 Les signaux particulières.....	76
5.3 Energie et puissance.....	79
5.4 Transformée de Fourier à temps discret.....	80
5.5 Transformée de Fourier discrète.....	82
5.6 Propriétés de la TFD.....	83
5.7 Fenêtre de pondération.....	84
5.8 Technique du zer-padding.....	86
5.9 Algorithmes rapides de la TFD.....	86
5.10 Transformée en Z.....	90
5.11 Equations aux différences.....	93
5.12 Introduction au filtrage numérique.....	97
5.13 Exercices.....	100
PLAN DU COURS.....	102
BIBLIOGRAPHIE.....	103

Semestre: 5
Unité d'enseignement: UEF 3.1.1
Matière: Traitement du signal
VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)
Crédits: 4
Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Familiariser l'étudiant avec les techniques de traitement numérique du signal comme l'analyse spectrale et le filtrage numérique.

Connaissances préalables recommandées

Théorie du signal, Mathématiques 3, Electronique fondamentale 1, Probabilités et statistiques.

Contenu de la matière :

Le nombre de semaines affichées sont indiquées à titre indicatif. Il est évident que le responsable du cours n'est pas tenu de respecter rigoureusement ce dimensionnement ou bien l'agencement des chapitres.

Chapitre 1. Rappels des principaux résultats de la Théorie du signal (1 Semaine)

Signaux. Séries de Fourier. Transformée de Fourier et conditions d'existence. Théorème de Parseval. Théorème de Plancherel. La convolution et la corrélation.

Chapitre 2. Processus aléatoires (4 Semaines)

Notions sur les Variables aléatoires (discrètes et continues, densité de probabilité, espérance mathématique, variance, écart type, etc.), Caractéristiques des processus aléatoires : moyenne, fonctions d'autocorrélation, inter-corrélation, stationnarité au sens large et au sens strict, ergodisme, densité spectrale de puissance. Processus particuliers (Processus de Gauss, Processus de Poisson, Signal télégraphiste, séquences pseudo-aléatoires). Les bruits (bruit thermique, bruit de grenaille, etc.)

Chapitre 3. Analyse et synthèse des filtres analogiques (3 Semaines)

Rappels sur la transformée de Laplace. Analyse temporelle et fréquentielle des filtres analogiques. Pôles, zéros, plan p et Stabilité des filtres analogiques. Filtres passifs et actifs, Filtres passe bas du premier et second ordre, Filtres passe haut du premier et second ordre, Filtres passe bande. Autres filtres analogiques (Butterworth, Tchebychev I et II, Elliptiques, etc.)

Chapitre 4. Échantillonnage des signaux (3 Semaines)

Echantillonnage : Principes et définition (théorique, moyennneur, bloqueur etc.). Filtre antirepliement. Condition de Shannon. Restitution du signal analogique et filtre interpolateur. Quantifications, bruits de quantification. Exemples de Conversion Analogique-Numérique et Conversion Numérique-Analogique.

Chapitre 5. Transformées Discrètes (4 Semaines)

Définition de la TFTD (Transformée de Fourier à Temps Discret), TFD (Transformée de Fourier Discrète), TFD inverse, Relation entre la transformée de Fourier et la TFD, Fenêtres de pondération, Propriétés de la TFD et convolution circulaire, Algorithmes rapides de la TFD (FFT). Transformée en Z et introduction au filtrage numérique (intérêt, équations temporelles, fonction de transfert, classification, structures de réalisation, etc.).

Mode d'évaluation :

Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

CHAPITRE 1

RAPPELS DES PRINCIPAUX RESULTATS DE LA

THEORIE DU SIGNAL

Chapitre 1: Rappels des principaux résultats de la théorie du signal

1.1 Signaux

En général, un signal est représenté par une fonction $s(t)$ qui varie en fonction du temps t caractérisé par un support et une amplitude bornée.

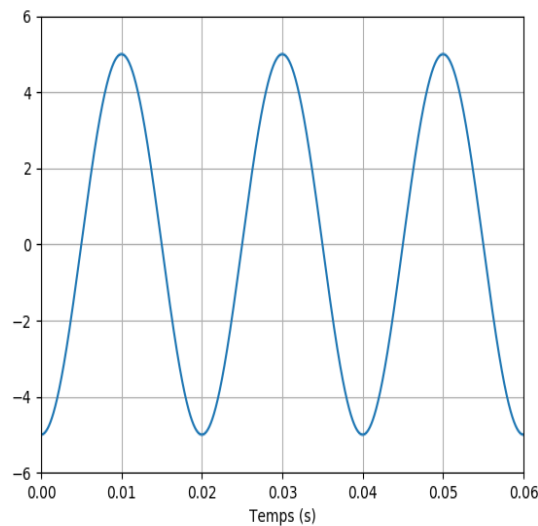


Figure 1.1 Signal

En outre, le signal peut être exposé au bruit, qui est un phénomène perturbateur indésirable de nature aléatoire gêne l'interprétation d'un signal.

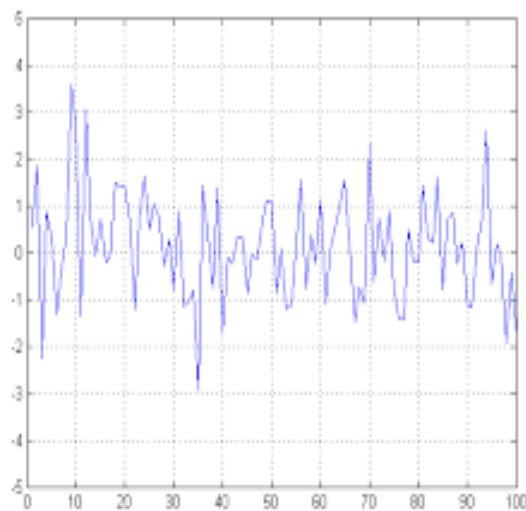


Figure 1.2 Signal bruit

Le rapport signal/bruit est donner par la formule ci-dessous:

$$10\text{Log}_{10} \left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} \right) [dB] \quad (1.1)$$

- La théorie du signal correspond à la description mathématique des signaux porteurs d'informations.
- Le traitement du signal est un domaine qui se base sur l'électroniques, l'informatique, etc, afin interprète tout signal.
- Le traitement de l'information est basé sur des méthodes destinées à l'évaluation des caractéristiques des systèmes de transmission de l'information.

1.2 Classification des signaux

1.2.1 Classification énergétique

(a) Les signaux à énergies finie :

Tout signal à énergie fine lorsqu'il possède une énergie finie ($E_x < \infty$) et une puissance moyenne nulle ($P_x = 0$).

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

(b) Les signaux à puissance moyenne finie

Tout signal à puissance moyenne finie lorsqu'il possède une puissance moyenne finie ($P_x < \infty$) et énergie infini ($E_x \rightarrow \infty$): *physiquement sont irréalisable*.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \right] \quad (1.3)$$

1.2.2 Classification phénoménologique (ou temporelle)

(a) Les signaux déterministes

Ces signaux sont représentés par une fonction mathématique en fonction du temps. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques et signaux non-périodiques où les signaux périodiques, satisfaisants la relation $x(t) = x(t + kT)$.

(b) Les signaux aléatoires

Ces signaux ils ont un comportement aléatoire. On se base sur les propriétés statistique (moyenne, mode, médiane, écar-type, variance, quartile, etc) pour les décrire.

1.2.3 Classification morphologique

Quatre (04) classes de signaux sont définies: Les signaux analogiques (ou continu) $s(t)$, les signaux quantifiés $s_q(t)$, les signaux échantillonnées $s(nT_e)$ et les signaux numériques (ou logique) $s_q(nT_e)$.

1.2.4 Classification spectrale

Dans ce cas, le signal peut être classé suivant sa puissance en fonction de sa fréquence. Cette caractéristique est exprimée en Hertz(Hz). On peut distinguer plusieurs types de signaux suivant: les signaux à large bande, les signaux à bande étroite, les signaux de basses fréquences, les signaux de hautes fréquences, les signaux ultra fréquence, les signaux très haute fréquence, les signaux super hauts fréquence.

1.3 Les signaux particuliers

Fonction signe	Fonction unité (échelon de heaviside)	Fonction rectangulaire (porte)
$\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t } \text{ pour } t \neq 0$ $= \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$	$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ $= \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t - \tau}{T}\right)$
Fonction rampe	Fonction triangle	Fonction sinus cardinal
$r(t) = t u(t) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$x(t) = \text{tri}(t)$ $= \begin{cases} 1 - t & \text{si } t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ $x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t - \tau}{\Delta}\right)$	$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
<p>Impulsion de dirac : Mathématiquement, impulsion de dirac $\delta(t)$ (impulsion unité, distribution de dirac, distribution de delta, fonction delta) correspond à une fonction porte avec une largeur T tendre vers "0" et un aire est égale à 1.</p>		
<p>Fonction "Peigne de Dirac" Fonction d'échantillonnage: Représente une succession périodique d'impulsion de dirac. La fonction $\delta_T(t)$ est défini par :</p> $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), T : \text{période de peigne.}$		

1.4 Notion de puissance et énergie

1.4.1 Energie d'un signal : L'énergie d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$E_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

1.4.2 Puissance moyenne d'un signal

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est définie par :

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

1.5 Séries de Fourier

1.5.1 Série de Fourier trigonométrique

La décomposition en série de Fourier s'écrit sous la formule suivante:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi f_0 n t) + b_n \sin(2\pi f_0 n t)) \\ &= a_0 + a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 \cos(2\pi f_0 2t) + a_3 \cos(2\pi f_0 3t) \\ &\quad + \dots + b_1 \sin(2\pi f_0 t) + b_2 \sin(2\pi f_0 2t) + b_3 \sin(2\pi f_0 3t) + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

Avec :

$$\omega_0 = 2\pi f_0; T_0 = \frac{1}{f_0}$$

a_0 : la valeur moyenne (ou constante continue)

a_n : les coefficients paires de la série de Fourier

b_n : les coefficients impaires de la série de Fourier

a_1 et b_1 : les éléments de fréquence d'harmonique fondamentales

a_2 et b_2 : les éléments de fréquence de deuxième harmonique

1.5.2 Série de Fourier complexe

D'après la formule d'Euler

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \left(\frac{e^{j 2\pi n f_0 t} + e^{-j 2\pi n f_0 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{j 2\pi n f_0 t} - e^{-j 2\pi n f_0 t}}{2j} \right) \right) \\
 &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times C_n \times e^{j 2\pi n f_0 t} + b_n \times C_n^* \times e^{-j 2\pi n f_0 t}) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j 2\pi n f_0 t}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Avec :

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j 2\pi n f_0 t} dt, n \in \mathbb{Z}$$

1.5.3 Théorème (ou égalité) de Parseval

La théorie des séries de Fourier est basé sur ce Théorème. Peut s'interpréter comme suit:

Si f est continue par morceaux et périodique alors:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \tag{1.8}$$

L'énergie de $f(t)$ est égale à la somme des énergies de ces composantes.

1.5.4 Représentation spectrale

Lorsque la séries de Fourier sont détermines, il est utile de tracer les amplitudes des harmoniques sur une échelle de fréquence qui montre la première harmonique (fréquence fondamentale ou harmonique d'ordre 1), et les harmoniques supérieures multiplient l'amplitude du fondamental ($f = n.f_0$).

- Spectre d'amplitude : $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- Spectre de phase : $\varphi_n = \text{Arctg} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$

1.5.5 Transformée de Fourier

La transformée de fourrier (ou intégral de Fourier) est une généralisation des série de Fourier permet d'avoir le contenu fréquentiel de d'autres type de signaux déterministes, continus et non-périodiques, citant par exemple signal rectangle, triangle, rampe, échelon, etc.

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.9)$$

TF désigne la transformée de Fourier direct du signal $x(t)$

$X(f)$ est une fonction de f , généralement complexe :

$$X(f) = \text{Re}[X(f)] + j \text{Im}[X(f)]$$

- Spectre d'amplitude:

$$|X(f)| = \sqrt{\text{Re}[X(f)]^2 + \text{Im}[X(f)]^2}$$

- Spectre de phase:

$$\varphi(f) = \arg(X(f)) = \text{arctg} \left(\frac{\text{Im}[X(f)]}{\text{Re}[X(f)]} \right)$$

1.5.6 Propriétés

- **Linéarité**

$$\text{Si } x(t) \xrightarrow{TF} X(f), y(t) \xrightarrow{TF} Y(f) \text{ alors } ax(t) + by(t) \xrightarrow{TF} aX(f) + bY(f)$$

- **Symétrie**

$$X(t) \xleftrightarrow{TF} 2\pi f(-\omega)$$

- **Changement d'échelle du temps**

$$x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- **Translation dans le temps**

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f) e^{-j2\pi f t_0}, \quad x(t + t_0) \xrightarrow{TF} X(f) e^{+j2\pi f t_0}$$

- **Translation fréquentiel**

$$X(f - f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) e^{+j2\pi f t_0}, \quad X(f + f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) e^{-j2\pi f t_0}$$

- **Dérivation temporelle**

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (j2\pi f)^n X(f)$$

- **Dérivation fréquentielle**

$$\frac{d^n X(f)}{df^n} \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) (-j2\pi t)^n$$

- **Intégration temporelle**

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \xrightarrow{TF} \frac{X(f)}{j2\pi f} + \pi X(0) \delta(2\pi f)$$

- **Convolution temporelle**

$$x(t) \otimes h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \times H(f)$$

- **Convolution fréquentielle**

$$x(t) \times h(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(f) \otimes H(f)$$

Tableau 1.1 Transformée de Fourier

$x(t)$	$X(f)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{sinc}(fT)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{sinc}^2(fT)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
k	$k\delta(f)$

1.6 La convolution et la corrélation

1.6.1 La convolution

Le produit de convolution exprime la quantité de recouvrement d'une fonction $x(t)$ réel lorsqu'on la déplace sur une autre fonction réel $h(t)$.

$$x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (1.10)$$

Dans un système linéaire causal, la sortie $y(t)$ est donnée par le produit de convolution du signal d'entrée $x(t)$ par la réponse du système $h(t)$.

1.6.1.1 Propriétés

- **Commutativité**

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t)$$

- **Associativité**

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h(t) \\ &= x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)] \\ &= [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) \end{aligned}$$

- **Distributivité**

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) \\ &= x(t) \otimes [h_1(t) + h_2(t)] \end{aligned}$$

- **Convolution de l'impulsion de dirac**

- $x(t) \otimes \delta(t) = f(t)$
- $x(t) \otimes \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$
- $\delta(t - t_1) \otimes \delta(t - t_2) = \delta(t - (t_1 + t_2))$
- $\delta'(t - t_1) \otimes \delta'(t - t_2) = \delta'(t - (t_1 + t_2))$

1.6.1.2 Théorème de Plancherel

La TF de la convolution de deux signaux est égale au produit des spectres des deux signaux.

$$x(t) \otimes h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \times H(f), \quad x(t) \times h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \otimes H(f) \quad (1.11)$$

1.6.1.3 Théorème de Parseval

Si les signaux sont différent et réels, l'expression s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \times y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \times Y(f) df \quad (1.12)$$

Si les signaux sont identiques et réels, l'expression s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.13)$$

1.6.1.4 Déconvolution

La déconvolution est l'opération inverse que permet d'avoir la réponse impulsionnelle ou indicielle d'un système à partir de l'entrée et de la sortie.

1.6.2 La corrélation

La corrélation est l'étude de la ressemblance (ou la similitude) du signal avec lui-même ou avec un autre signal dans le domaine temporel.

- Si les signaux sont différents, on obtient la fonction d'inter-corrélation (FIC) $C_{xy}(\tau)$.
- Si les signaux sont identiques, il s'agit de la fonction d'auto-corrélation (FAC) $C_{xx}(\tau)$.

La fonction de corrélation est définie dans deux cas différents :

1.6.2.1 Cas des signaux à énergies finis

(a) Fonction d'inter-corrélation

On appelle fonction d'inter corrélation notée $C_{xy}(\tau)$ (cross-corrélation), la fonction permettant la mesure de la similitude entre deux signaux énergétique $x(t)$ et $y(t)$.

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (1.14)$$

Avec :

$x^*(t)$: le conjugué de $x(t)$.

$y(t + \tau)$: le signal $y(t)$ décalé de τ

(b) Fonction d'auto-corrélation

Cette opération permet de comparer un signal $x(t)$ avec lui-même durant l'intervalle de temps t dont l'un des signaux est traduit d'une certaine quantité.

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.15)$$

1.6.2.2 Cas des signaux à puissance moyenne finis**(a) Fonction d'inter-corrélation**

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.16)$$

(b) Fonction d'inter-corrélation

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t)dt = C_{xx}(0) \quad (1.17)$$

1.6.2.3 Propriétés**- La symétrie**

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau) \text{ et } C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$$

- La périodicité

$$x(t) = x(t+kT) \rightarrow C_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau+kT)$$

- Additivité

$$z(t) = x(t) + y(t) \xrightarrow{C_z(\tau)} C_z(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{yy}(\tau) + C_{xy}(\tau) + C_{yx}(\tau)$$

1.6.2.4 Densité spectrale

La transformée de Fourier de la fonction FIC représente densité interspectrale (Interspectre):

$$S_{xy}(f) = TF[C_{xy}(\tau)] \quad (1.18)$$

La transformée de Fourier de la fonction FAC représente densité autospectrale (Autospectre):

$$S_{xx}(f) = TF[C_{xx}(\tau)] \quad (1.19)$$

(a) Densité spectrale d'énergie (DSE)

La DSE pour les signaux à énergie finies est donnés par :

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= TF[C_{xx}(\tau)] \\ &= X^*(f)X(f) \\ &= |X(f)|^2 \\ E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ \text{Donc :} \quad &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \end{aligned} \quad (1.20)$$

C'est la conservation de l'énergie du domaine temporel au domaine fréquentiel.

(b) Densité spectrale de puissance (DSP)

La DSP pour les signaux à puissance moyenne finie est donnés par :

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= TF[C_{xx}(\tau)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} X_T^*(f)X_T(f) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Remarque:

Soit $S_x(f)$ la DSE ou la DSP à l'entrée d'un filtre linéaire invariant de fonction de transfert $H(f)$. La densité spectrale $S_y(f)$ à la sortie du filtre est donnée par : $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

1.6.2.5 Corrélation et convolution

La relation entre la corrélation et la convolution est donnée par

$$C_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau)$$

Si $x(t)$ est un signal réel et pair : $C_{xy}(\tau) = x(\tau) \otimes y(\tau)$

1.7 Théorème de Wiener-Kintchine

- Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie. La transformée de Fourier (TF) de la fonction de leur intercorrélation est égale à leur densité interspectrale d'énergie.

$$TF[C_{xy}(\tau)] = S_{xy}(f) = X(f)Y(f) \quad (1.22)$$

Si $y(t) = x(t)$ alors $TF[C_{xx}(\tau)] = S_{xx}(f) = |X(f)|^2$, c'est la densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$ (ou la densité autospectrale d'énergie).

- Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie on a :

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (1.23)$$

$$TF[C_{xy}(\tau)] = S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(f)Y_T(f)}{T}$$

Si $y(t) = x(t)$ alors $TF[C_{xx}(\tau)] = S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} |X_T(f)|^2$

Exemple 1.1

Soit $x(t)$ la fonction porte définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Et sa fonction de corrélation est donnée par :

$$R_x(\tau) = \begin{cases} T - \tau, & 0 \leq \tau \leq T \\ T + \tau, & -T \leq \tau \leq 0 \\ 0, & T \leq \tau \leq 0 \end{cases}$$

1. Calculer sa densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ à partir de $R_x(\tau)$ (Théorème de Wiener-Khintchine).
2. Calculer sa densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ à partir de $X(f)$

Solution1.1

1.

$$\begin{aligned} S_x(f) &= TF[R_x(\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \int_{-T}^0 (T + \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \int_0^T (T - \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= T^2 \operatorname{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

2.

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = T^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$

1.8 Notion de bruit

Le bruit est un perturbateur indésirable pour l'interprétation des signaux. Pour mesurer la qualité d'un signal affecté par un bruit, on fait une mesure appelée rapport signal sur bruit (SNR).

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} \quad (SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_n}) \quad (1.24)$$

Avec :

P_s : Puissance du signal : P_n : Puissance du bruit

1.9 Exercices à résoudre

Exercice # n°1

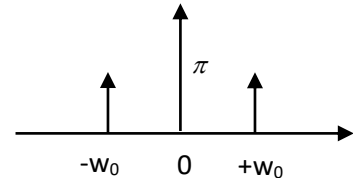
1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

$$\delta(t); \cos(\omega_0 t); \sin(\omega_0 t); x(t) \cos(\omega_0 t); \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(\omega_0 t)$$

2. Calculer et tracer le spectre de $f(t) = \cos(2t) + \cos(3t)$

Exercice # n°2

Donner l'équation de $X(\omega)$ et déterminer l'équation de $x(t)$.



Exercice # n°3

Soit le signal $f(t) = U(t)e^{-at}$, $a > 0$, on définit les signaux $g(t) = f(t) + f(-t)$ et $h(t) = f(t) - f(-t)$

1. Tracer les signaux $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$.
2. Calculer leurs transformées de Fourier
3. Donner le tracer du spectre d'amplitude du signal $f(t)$.

Exercice # n°4

1. Calculer les coefficients complexes C_n de la série de Fourier du signal périodique

$x(t)$ dont la période est égale à T :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{T}{8} \leq t \leq \frac{T}{8} \\ 0 & \text{pour } -\frac{T}{8} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

2. Donner les expressions des coefficients a_n et b_n de la décomposition du signal en cos et sinus respectivement.

Exercice # n°5

Soit $x(t)$ la fonction porte définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3. Calculer son énergie.
4. Calculer et tracer sa fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$
5. Calculer sa densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ à partir de $R_x(\tau)$ (Théorème de Wiener-Khintchine).
6. Calculer sa densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ à partir de $X(f)$

CHAPITRE 2
PROCESSUS ALEATOIRES

Chapitre 2: Processus aléatoires

2.1 Signal aléatoire (SA)

Le signal déterministe est défini par des formules mathématiques, par contre le signal aléatoire son évolution est au hasard et analytiquement n'a pas un modèle mathématique bien déterminer ; ces valeurs futur n'est pas connus son indéterminés (ou imprédictible). Le signal aléatoire peut être représenté comme une information utile ou comme un bruit gênant l'information. L'étude de ce signal ce base sur les propriétés statistiques et fréquentielles.

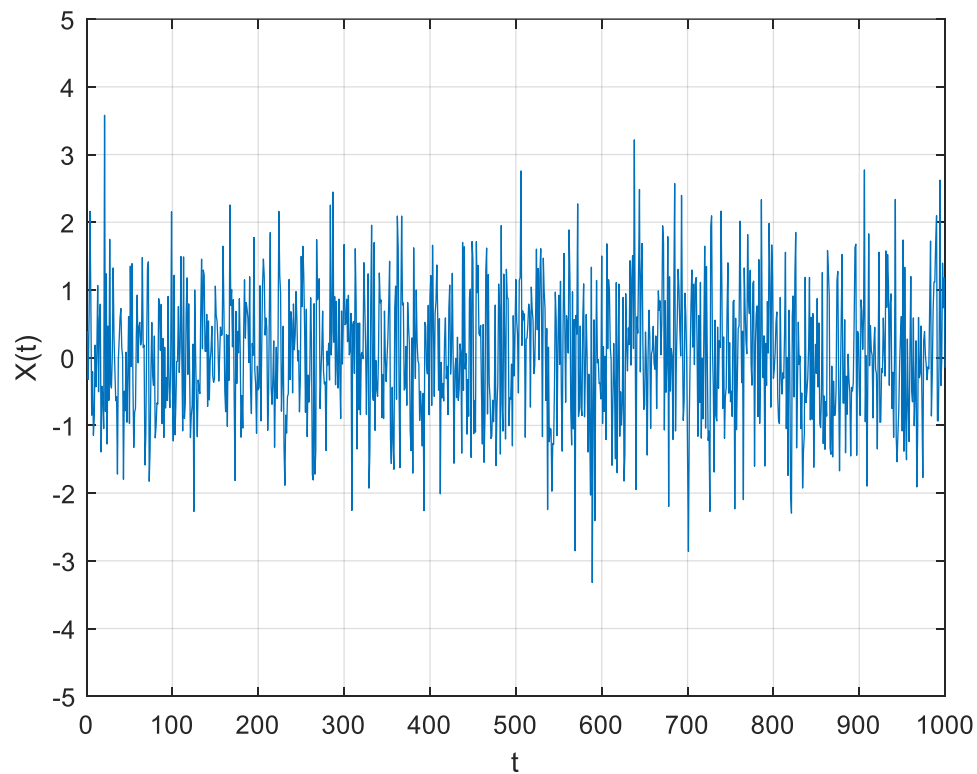


Figure 2.1 Signal aléatoire

2.2 Processus aléatoire (PA)

Le PA est une famille de variables aléatoires (VA) réels ou complexes d'une grandeur aléatoire qui s'évolue en fonction du temps. Le PA dépendant de deux variables: le temps t et la VA ξ de l'espace des épreuves Ω .

L'intérêt de ce chapitre est de permettre la modélisation de nombreux phénomènes, par exemple : le bruit thermique dû à l'agitation thermique dans un conducteur, signal de la parole, signal radar, signal ECG, signal sismique, les perturbations liées aux astres, etc. On est donc amené pour les traiter à les considérer comme des PA ou stochastiques. Chaque PA est décrit par un signal aléatoire (SA). Un SA observé (mesuré) peut être considéré comme une réalisation particulière aléatoire d'un ensemble de signaux similaires qui sont tous susceptibles d'être produits par le même PA.

Exemple de phénomène aléatoire: Les fortes fluctuations d'une tension aux bornes d'une diode Zener polarisée par un courant I en régime d'avalanche à une température T_0 . On note que: processus aléatoire (PA), $X(t_i, x)$ variable aléatoire (VA) et $X(t, x_i)$: signal aléatoire (SA).

A chaque instant t_i , le PA $X(t, x)$ se réduit à une VA $X(t_i, x)$ ($x(t_i)$ ou x_i) dont $(p(x, t_i) = p(x_i))$.

Dans le cas de deux instants t_i et t_j : 2 variables aléatoires $X(t_i, x)$ et $X(t_j, x)$ (ou $x(t_i)$ et $x(t_j)$) avec $(p(x, t_i, t_j) = p(x_i, x_j))$.

- Signaux aléatoires : $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, etc$
- Variables aléatoires : $x(t=t_1) = X_1, x(t=t_2) = X_2, x(t=t_3) = X_3, \dots, etc$

Remarque:

Pour t_k instants, nous pouvons définir k variables aléatoires qui représente un vecteur aléatoire (ou signal aléatoire) : $x_1(t) = (x_1(t_1), x_1(t_2), x_1(t_3), \dots, x_1(t_k))$

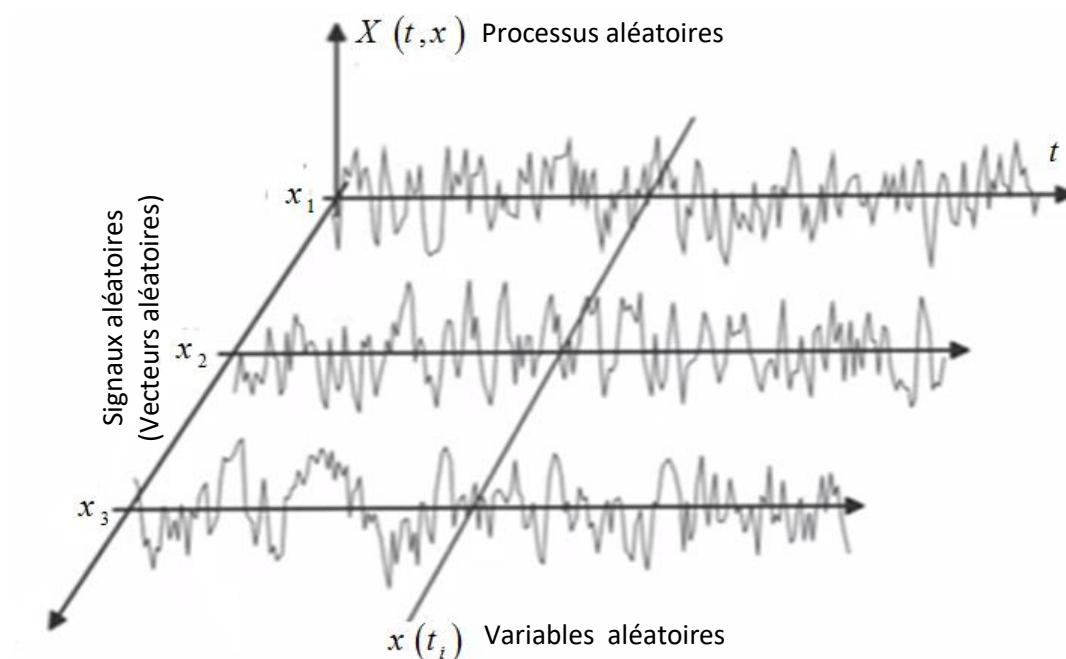


Figure 2.2 Processus aléatoire

2.3 Probabilité, Fonction de répartition et densité de probabilité

2.3.1 Probabilité

La probabilité est le nombre M d'apparition de l'événement A dans N expériences.

$$\text{prob}(A) = p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \quad (2.1)$$

Avec : $0 \leq P(A) \leq 1$

2.3.2 Fonction de répartition

Soit une VA $X = \sum_i x_i$ et soit s un certain seuil. La fonction de répartition de cette variable aléatoire x_i donne la probabilité pour que sa valeur soit inférieure ou égale au seuil s .

$$F_{x_i}(s) = \text{prob}[x_i \leq s] \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{prob} [s_1 \leq x \leq s_2] &= \text{prob} [x \leq s_2] - \text{prob} [x \leq s_1] \\ \text{prob} [s_1 \leq x \leq s_2] &= F(s_2) - F(s_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec : $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1; 0 \leq F(x) \leq 1$

2.3.3 Densité de probabilité (ddp)

La densité de probabilité $f_{x_i}(s)$ (ou $p(x)$) étant définie comme la dérivée de la fonction de répartition. On appelle la limite :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{F_{x_i}(s + \Delta s) - F_{x_i}(s)}{\Delta s} = \frac{dF_{x_i}(s)}{ds} = f_{x_i}(s) \quad (2.4)$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire x_i . Par conséquent la probabilité de trouver la VA x_i entre s_1 et s_2 ($s_1 < s_2$) est donnée par :

$$\text{prob} [s_1 \leq x_i \leq s_2] = \int_{s_1}^{s_2} f_{x_i}(s) ds \quad (2.5)$$

La fonction de répartition peut être exprimée en fonction de la ddp par:

$$F_{x_i}(s) = \int_{-\infty}^{s_2} f_{x_i}(s) ds \quad (2.6)$$

La ddp est une fonction bornée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_i}(s) ds = 1 \quad (2.7)$$

Pour de nombreux cas pratiques la connaissance de la densité de probabilité d'ordre 1 (pour un seul instant) et d'ordre 2 (pour deux instants) est suffisante pour caractériser un processus aléatoire

2.3.4 Cas de deux variables aléatoires

Certains processus sont caractérisés par plusieurs variables aléatoires. On considère ici le cas de deux VA.

- La fonction de répartition bidimensionnelle des deux VA x et y est définie par :

$$F_{xy}(x_0, y_0) = \text{prob}[x \leq x_0, y \leq y_0] \quad (2.8)$$

Si on pose $y_0 = \infty$ on aura:

$$F_{xy}(x_0, \infty) = \text{prob}[x \leq x_0, y \leq \infty] = \text{prob}[x \leq x_0] = F_x(x_0) \quad (2.9)$$

Si on pose $x_0 = \infty$ on aura:

$$F_{xy}(\infty, y_0) = \text{prob}[x \leq \infty, y \leq y_0] = \text{prob}[y \leq y_0] = F_y(y_0) \quad (2.10)$$

Si les deux VA sont statistiquement indépendantes on a :

$$\begin{aligned} F_{xy}(x_0, y_0) &= \text{prob}[x \leq x_0, y \leq y_0] \\ &= \text{prob}[x \leq x_0] \text{prob}[y \leq y_0] \\ &= F_x(x_0) F_y(y_0) \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_x(v) dv \int_{-\infty}^{y_0} f_y(u) du \end{aligned} \quad (2.11)$$

- La densité de probabilité bidimensionnelle par:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial F_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

- Les densités marginales sont définies par :

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(u, v) dv \\ f_y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(u, v) du \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4 Moments statistiques

2.4.1 Moments statistiques d'ordre 1

2.4.1.1 Cas d'une seule variable aléatoire

Le moment d'ordre k d'une VA x de ddp $f_x(x)$ est définie par :

$$m_x^k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_x(x) dx \quad (2.14)$$

Le moment de premier ordre est l'espérance mathématique de x qui donne la valeur moyenne statistique de la VA.

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx \quad (2.15)$$

Le moment non centré de deuxième ordre (valeur quadratique moyenne) est donné par :

$$m_x^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (2.16)$$

Le moment centré de deuxième ordre est appelé variance :

$$\sigma_x^2 = E[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f_x(x) dx \quad (2.17)$$

σ_x est appelé écart quadratique moyen (ou écart type) de la variable aléatoire.

La variance peut être aussi exprimée par :

$$\sigma_x^2 = E[(x - m_x)^2] = E(x^2) - m_x^2 \quad (2.18)$$

2.4.1.2 Cas de deux variables aléatoires

$$\begin{aligned}
 m_x &= E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{xy}(x, y) dx dy \\
 m_y &= E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{xy}(x, y) dx dy \\
 \sigma_x^2 &= E\left[(x - m_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f_{xy}(x, y) dx dy \\
 \sigma_y^2 &= E\left[(y - m_y)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 f_{xy}(x, y) dx dy
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Le moment mixte de second ordre est appelé covariance.

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(x, y) &= E\left[(x - m_x)(y - m_y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f_{xy}(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{xy}(x, y) dx dy - m_x m_y
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si les deux VA x et y sont statistiquement indépendantes ou aura :

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) f_y(y) \tag{2.21}$$

ce qui implique que la covariance des deux VA est nulle. La valeur de la covariance des deux VA peut servir à la mesure de leur corrélation. La quantité

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{2.22}$$

est appelée coefficient de corrélation. Si $\rho=0$ les deux VA sont décoorélées mais pas nécessairement indépendantes. Par contre si les deux VA sont indépendantes elles seront décoorélées.

2.5 Variables aléatoires discrètes et continues

2.5.1 Variables aléatoires discrètes

2.5.1.1 Moments statistiques d'ordre 1

Si x_k dénote la valeur de la VA discrète x et $p_x(x_k)$ sa probabilité on a :

$$F_x(s) = \sum_{x_k \leq s} p_x(x_k), m_x = \sum_k p_x(x_k) x_k$$

$$\sigma_x^2 = E(x_k^2) - m_x^2 = \sum_k x_k^2 p_x(x_k) - m_x^2 \quad (2.23)$$

Pour deux VA discrètes

$$m_x = \sum_k \sum_n x_k p_{xy}(x_k, y_n)$$

$$m_y = \sum_k \sum_n y_n p_{xy}(x_k, y_n)$$

$$\text{cov}(x, y) = E[(x_k - m_x)(y_n - m_y)] =$$

$$\sum_n \sum_k (x_k - m_x)(y_n - m_y) p_{xy}(x_k, y_n) \quad (2.24)$$

2.5.1.2 Moments statistiques d'ordre 2

$$\text{cov}(x, y) = E[(x_k - m_x)(y_n - m_y)] =$$

$$\sum_n \sum_k (x_k - m_x)(y_n - m_y) p_{xy}(x_k, y_n)$$

2.5.2 Variables aléatoires continues

Une VA est continue s'il existe une fonction $f_x(X)$ non négative appelée fonction

densité de probabilité (fdp) qui vérifie $F_x(X) = \int_{-\infty}^x f_x(s) ds$.

Propriétés de la fonction densité de probabilité :

$$\bullet a < b, P(a < x < b) = \int_a^b f_X(u) du$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$\bullet F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = P(X \leq x)$$

$$\bullet f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$\bullet f_X(x) \geq 0$$

2.6 Espérance mathématique

Cas continu

La valeur moyenne ou l'espérance mathématique d'une v.a continue X est définie par:

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} s p_X(s) ds \quad (2.25)$$

Cas discret

Pour une v.a discrète, l'intégrale peut être se remplacer par une somme. Soit X une VA discrète définie par x_i valeurs avec des probabilités p_i .

$$E[X] = \sum_i x_i p_i \text{ avec } p_i = p(X = x_i) \quad (2.26)$$

2.7 Variance et écart-type

Soit X une VA sa variance est définie par :

$$Var[X] = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - \mu_X)^2 f_X(s) ds \quad (2.27)$$

où $\mu_X = E[X]$ et σ_X est une constante positive appelée déviation standard ou écart type de X .

2.8 Caractéristiques des processus aléatoires

2.8.1 Moyenne

La moyenne \bar{X} de la VA X est définie sur N épreuves :

$$\bar{X} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \quad (2.28)$$

2.8.2 Fonction d'autocorrélation

L'autocorrélation de $X(t)$ notée $R(t_1, t_2)$ est l'espérance du produit $X(t_1)X(t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.29)$$

L'autocorrélation est une fonction non aléatoire qui représente l'interdépendance entre $X(t_1)$ et $X(t_2)$.

La fonction d'autocorrélation caractérise le degré de dépendance entre les v.a d'un P.S $X(t)$ pour différentes valeurs de t . La valeur de $R(t_1, t_2)$ en $t_1 = t_2 = t$ est la puissance moyenne de $X(t)$.

2.8.3 Coefficient de corrélation

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{\sigma_X^2} = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)}; \rho_X(0) = 1 \quad (2.30)$$

$$-1 \leq \rho_X(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)} \leq +1 \quad (2.31)$$

2.8.4 Autocovariance

L'autocovariance de $X(t)$ notée $C(t_1, t_2)$ est la covariance des v.a $X(t_1)$ et $X(t_2)$:

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))] \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] - \mu(t_1)\mu(t_2) \\ &= R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

La valeur de l'autocovariance en $t_1 = t_2 = t$ est égale à la variance de $X(t)$

$$\begin{aligned} C(t,t) &= R(t,t) - \mu(t)^2 \\ &= E[X^2(t)] - \mu^2(t) \\ &= \sigma^2(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

La variance caractérise la dispersion des réalisations du P.S par rapport à la moyenne.

2.9 Stationnarité

2.9.1 Stationnarité au sens strict (SSS)

Un signal aléatoire est SSS, si toutes les propriétés statistiques avec tous les ordres du signal (comme la moyenne, la variance, fonction d'autocorrélation, etc.), ne dépendent pas de l'origine du temps on dit que le signal est stationnaire au sens strict (SSS). Pour ce type de stationnarité est impossible de la vérifier d'étudier tous les ordres, pour cela nous contenterons des signaux stationnaires au premier ordre et au deuxième ordre :

2.9.1.1 Stationnarité du premier ordre

Un signal aléatoire est stationnaire au premier ordre, si seulement son moment du premier ordre soit invariant dans le temps c'est-à-dire:

$$\mu_X(t) = \mu_X \quad (2.34)$$

2.9.1.2 Stationnarité du deuxième ordre

Dans ce cas, les propriétés statistiques (ou moments) du premier ordre et au deuxième ordre doivent être invariants dans le temps.

- La densité de probabilité du premier ordre ne dépend pas du temps.

$$\begin{aligned} p(x,t) &= p(x), \forall t \\ \mu_X(t) &= \mu_X \\ \sigma_X^2 &= \sigma_X^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

- La densité de probabilité du deuxième ordre ne dépend que de l'écart temporel.

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= R_X(\tau) = f(\tau), \tau = t_2 - t_1 \\ C_X(t_1, t_2) &= C_X(\tau) = f(\tau) - \mu_X^2, \tau = t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.9.2 Stationnarité au sens large (SSL)

Un signal aléatoire est SSL, si seulement, sa valeur moyenne statistique et sa fonction d'autocorrélation ne dépendent pas de l'origine du temps, le signal est stationnaire au sens large (SSL).

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X = C^{ste} \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(\tau) = f(\tau), \tau = t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Remarque:

- Impossible de vérifier une SSS en étudiant tous les ordres
- La SSL est la plus intéressante en pratique.
- Tous les processus aléatoires stationnaires au sens strict sont stationnaires au sens large et l'inverse n'est pas vrai.
- La SSL implique l'invariance dans le temps de la fonction d'autocovariance à cause de la relation suivante: $C_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) - \mu_X^2$

2.10 Ergodisme

Pour simplifier l'étude d'un PA qui est constitué par un ensemble de SA dont c'est très difficile et presque c'est impossible de les étudier tous, on se base seulement sur l'étude de l'ergodicité du PA. L'ergodicité nécessite la connaissance des propriétés temporelles et statistiques (comme la valeur moyenne) pour connaître l'évolution de PA. Si les moyennes temporelles d'un SA stationnaire sont égales aux moyennes statistiques obtenues à partir de plusieurs réalisations on dit que le signal est ergodique.

- La valeur moyenne temporelle d'ordre n :

$$\bar{x}^n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^n(t) dt \quad (2.38)$$

- La valeur moyenne statistique d'ordre n :

$$E[X^n] = E[x^n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot p(x) dx \quad (2.39)$$

Remarque:

- L'ergodicité au premier ordre implique égalité entre ces deux moyennes pour l'ordre n=1.
- L'ergodicité au sens large (ESL) (ou au second ordre) nécessite la condition suivante:

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \bar{X} \\ R_X(t_1, t_2) &= \bar{R}(\tau) \end{aligned} \quad (2.40)$$

(L'égalité entre la moyenne temporelle et statistique et l'égalité entre l'auto corrélation statistique et l'auto corrélation temporelle)

- Un signal ergodique et obligatoirement stationnaire alors que l'inverse n'est généralement pas vrai.

2.11 Densité spectrale de puissance (DSP)

La DSP $S_{XX}(\omega)$ d'un P.S $X(t)$ stationnaire est la TF de sa fonction d'autocorrélation.

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.41)$$

La fonction d'autocorrélation est donnée par la TF inverse de la DSP :

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.42)$$

La puissance moyenne est obtenue en posant $\tau = 0$:

$$P_x = R_{xx}(0) = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.43)$$

La DSP montre la distribution de la puissance par unité de fréquence

2.12 Processus particuliers

2.12.1 Bruit blanc

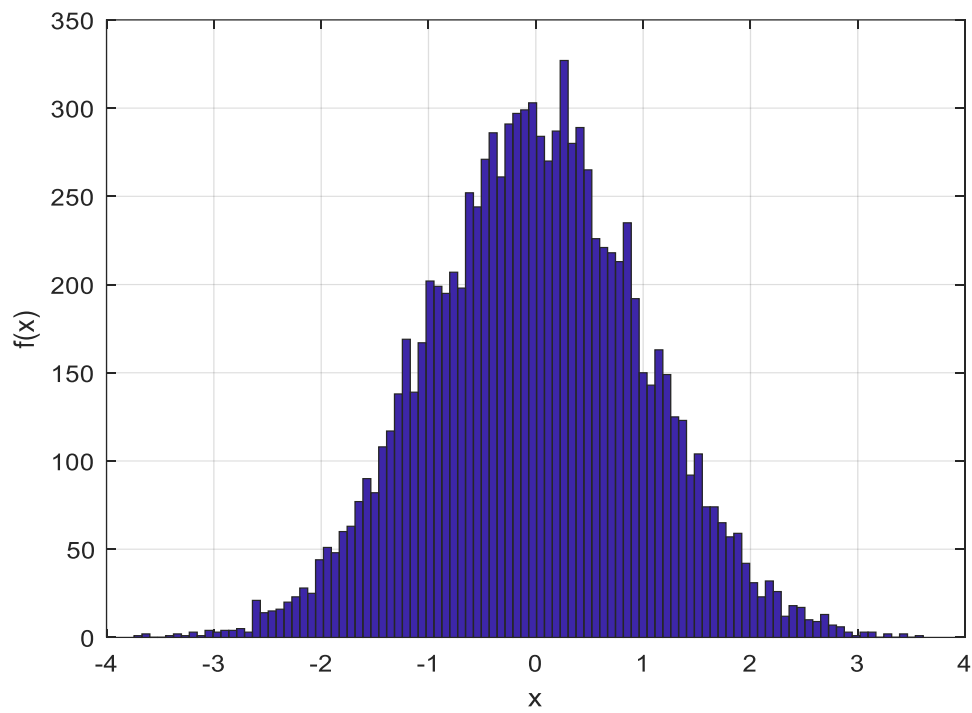
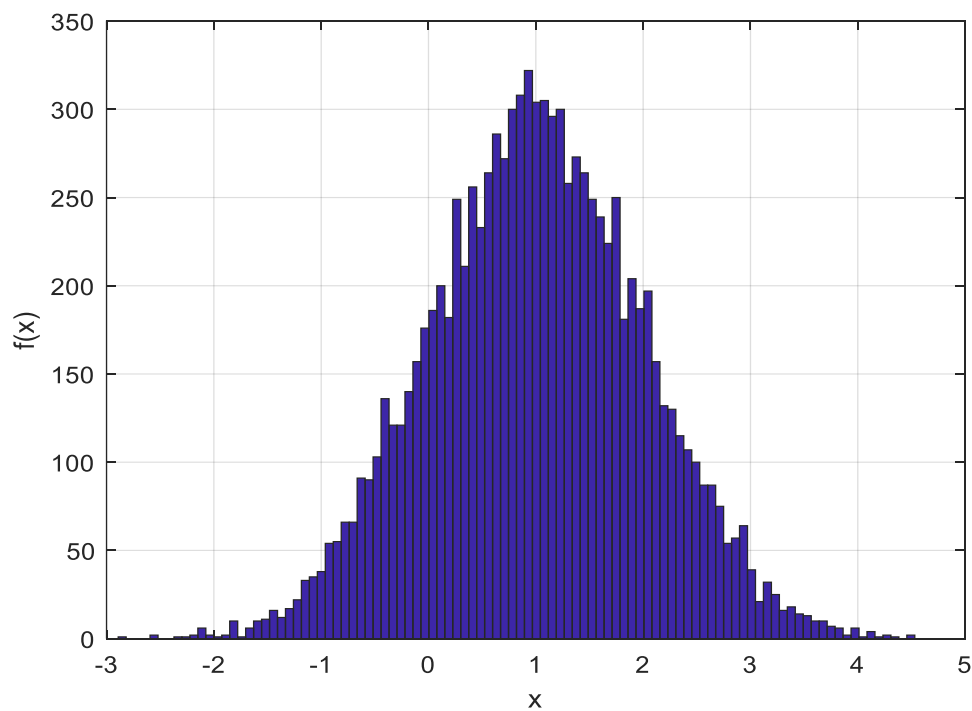
Un bruit blanc $b(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au sens large, ergodique et dont le spectre de fréquence est infini ou blanc. C'est-à-dire qu'un tel processus contient toutes les fréquences possibles.

$$R_b(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \text{ sa DSP est : } G_b(f) = \frac{N_0}{2}, -\infty < f < +\infty.$$

Le bruit physique est un processus à puissance moyenne fini, caractérisé par une densité spectrale uniforme dans une bande de fréquence finie :

$$R_b(\tau) = N_0 B \frac{\sin(2\pi B \tau)}{2\pi B \tau} \rightarrow G_b(f) = \frac{N_0}{2}, -B < f < +B \quad (2.44)$$

La distribution gaussienne : $f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma}\right)^2}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) = 1$

(a). $(\mu_x, \sigma^2) \square (0,1)$ (b). $(\mu_x, \sigma^2) \square (1,1)$

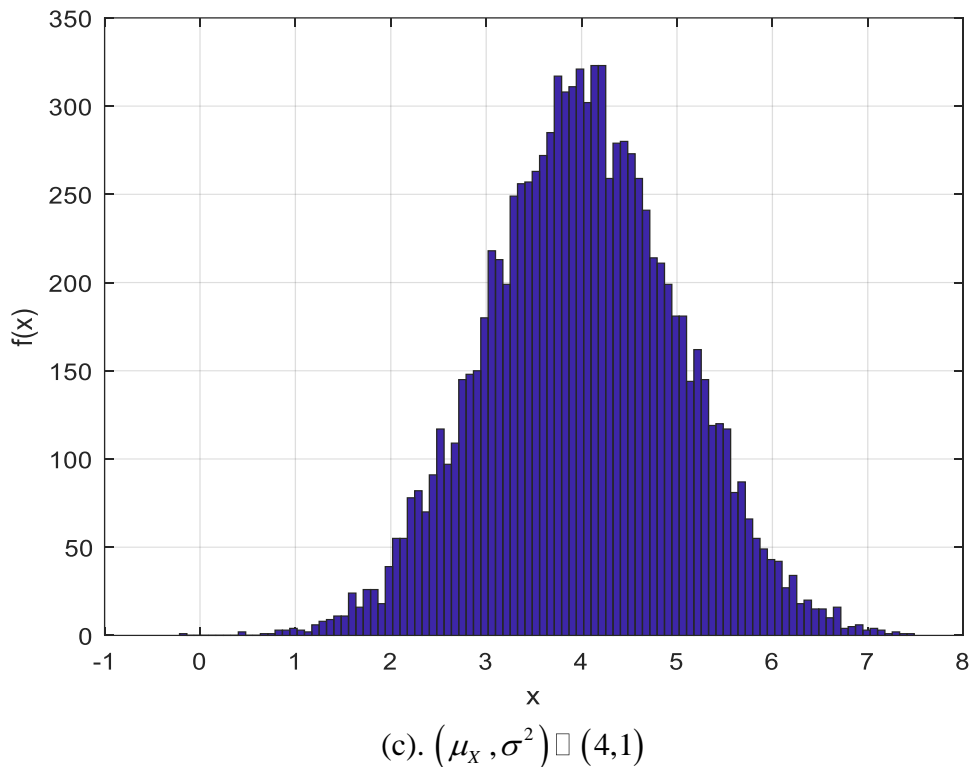


Figure 2.3 Distribution Gaussienne

2.12.2 Processus de Poisson

Les points de Poisson sont spécifiés par les propriétés suivantes :

1. Le nombre de points $n(t_1, t_2)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ de longueur $t = t_2 - t_1$ est une variable aléatoire ayant une distribution de Poisson de paramètre λt .

$p(n(t_1, t_2) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$: probabilité d'avoir k points dans l'intervalle de longueur $t = t_2 - t_1$

2. Si les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ ne se chevauchent pas alors les v.a $n(t_1, t_2)$ et $n(t_3, t_4)$ sont indépendantes.

2.12.3 Séquences binaire pseudo-aléatoires (SBPA)

Une SBPA est une suite périodique de bits aléatoire indépendants les uns des autres (aléatoire). Cette suite est générée à l'aide d'un registre à décalage à contre-réaction.

Remarques: Il existe d'autres distributions (PA) qui suivent des lois probabilistes tels que: loi uniforme, loi de Bernoulli, loi Binomiale, loi exponentielle, etc.

2.13 Les bruits

Un bruit est un phénomène aléatoire gênant l'interprétation d'un signal. Une voie de transmission affaiblit généralement le signal. Son action sur le signal S peut être exprimée par: $X = AS$. Si A est aléatoire, on est en présence d'un bruit multiplicatif. Un autre type de bruit est le bruit additif $X = S + B$. Généralement, le bruit additif existe dans de nombreux cas et due principalement à la nature corpusculaire de la matière. L'origine du bruit multiplicatif est due à plusieurs phénomènes parmi lesquels on cite la réflexion des ondes électromagnétiques (EM) sur les couches ionisantes de l'atmosphère, les trajets multiples, etc.

Parmi les perturbations qui affectent un signal on distingue : Les bruits externes au récepteur (bruits du soleil, des bruits galactiques, ceux des planètes) et les bruits internes au récepteur (bruit dû à l'agitation désordonnée des électrons, le bruit de grenaille dans les semi-conducteurs dû au passage aléatoire des porteurs majoritaires et minoritaires, le bruit de commutation).

2.13.1 Bruit thermique (BTh)

Ce type de bruit est généré par l'agitation thermique des porteurs de charges. La DSP du bruit thermique en fonction de la fréquence:

$$p(f) = \frac{1}{2} \frac{hf}{e^{Kf} - 1} [\text{watts/Hz}] \quad (2.45)$$

$p(f)$: densité de puissance bilatérale

h : constante de Planck à $6.62 \cdot 10^{-34}$ J/s

K : constante de Boltzmann égale à $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/k.

La puissance de ce bruit dans une bande de fréquences Δf est :

$$p(f) = \frac{1}{2} KT \Delta f \quad (2.46)$$

La DSP du bruit thermique étant constante pour toutes les fréquences pour une température donnée.

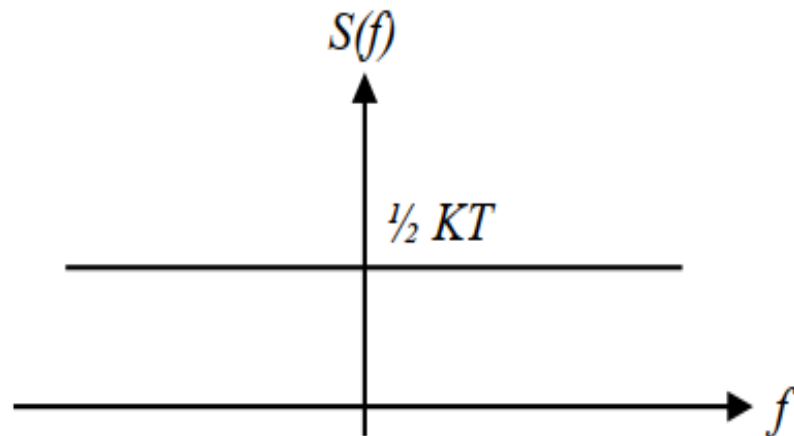


Figure 2.4 La DSP d'un bruit blanc

On peut modéliser une résistance réelle par un générateur de bruit thermique de tension en série avec une résistance sans bruit ou par un générateur de bruit thermique de courant en parallèle avec une résistance sans bruit. La puissance du bruit disponible d'une résistance est le maximum de puissance du bruit que peut délivrer cette résistance à une charge externe.

Densité spectrale bilatérale de la tension :

$$S_v(f) = 2RKT \quad (2.47)$$

Densité spectrale bilatérale du courant :

$$S_i(f) = \frac{2KT}{R} \quad (2.48)$$

La densité de probabilité du bruit:

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad (2.49)$$

2.13.2 Bruit de grenaille (BG)

Ce bruit peut être modélisé par un processus de Poisson. Par exemple, le bruit des diodes : le courant total dans une diode est la somme de deux courants : les porteurs majoritaires et les porteurs minoritaires, les électrons et les trous. Ces deux courants sont assimilés à deux processus de poisson. L'espérance mathématique de leur somme est le courant I_0 qui traverse la diode. En réalité ce n'est que le courant moyen et une fluctuation de courant $i(t)$ lui est superposée :

$$I(t) = I_0(t) + i(t) \quad (2.50)$$

$i(t)$ est un bruit lié au caractère granulaire de l'électricité. La densité spectrale de ce courant bruit est:

$$S_i(f) = e I_0 (A^2/Hz) \quad (2.51)$$

Avec $e = 1.60217662 \times 10^{-19}$ coulombs la charge de l'électron. Cette densité spectrale ne dépend pas de f , donc le bruit de grenaille est un bruit blanc. Dans une diode réelle le bruit total est la somme du BTh et du BG.

2.13.3 Température du Bruit

La température est défini par :

$$T_b = \frac{P_a}{\frac{1}{2} K \Delta f} \quad (2.52)$$

La puissance P_{b0} disponible à la sortie d'un amplificateur idéal (sans source de bruit interne) et une source de température de bruit T .

$$P_{b0} = \frac{GK \Delta f T}{2} + P_{be} \quad (2.53)$$

G : Gain en puissance de l'amplificateur.

P_{b0} : Bruit total à la sortie de l'amplificateur.

P_{be} : Bruit interne de l'amplificateur ramené à la sortie.

On peut définir une température de bruit interne T_e de l'amplificateur par une source de bruit ramenée à son entrée ayant une température de bruit T_e :

$$P_{bo} = \frac{GK \Delta f}{2} (T + T_e) \quad (2.54)$$

2.13.4 Rapport signal à bruit (SNR: Signal-to-noise ratio)

C'est le rapport de la puissance disponible du signal P_s utile à celle du bruit qui l'accompagne:

$$SNR = \frac{P_s}{P_b} \quad (2.55)$$

P_s : puissance du signal

P_b : puissance du bruit

2.13.5 Facteur du bruit

Le facteur de bruit d'un montage mesure la dégradation du rapport (S/B) provoqué par le passage du signal et le bruit dans le système. Il est défini par le rapport $(S/B)_e$ d'entrée au montage au rapport $(S/B)_s$ à sa sortie. Il est toujours supérieur à 1 :

$$F = \frac{(S/B)_e}{(S/B)_s} = \frac{(P_{si}/P_{bi})_e}{(P_{so}/P_{bo})_s} = \frac{1}{G} \frac{P_{bo}}{P_{bi}} \quad (2.56)$$

$$F = \frac{1}{G} \frac{P_{bo}}{P_{bi}} = \frac{1}{G} \frac{\frac{GK \Delta f}{2} [T + T_e]}{\frac{GK \Delta f}{2} T} = \frac{1}{G} \left(1 + \frac{T_e}{T} \right) \quad (2.57)$$

P_{si} : Puissance du signal à l'entrée

P_{so} : Puissance du signal à la sortie

P_{bi} : Puissance du bruit à l'entrée

P_{bo} : Puissance du bruit à la sortie

G : Gain en puissance du montage en général fonction de la fréquence.

2.14 Exercices à résoudre

Exercice # n°1

On considère le couple (x,y) de VA prenant la valeur (i,j) avec la probabilité $P(i,j)$ indiquée dans le tableau ci-dessous.

- Déterminer à l'aide de deux tableaux les probabilités marginales $P_x(x)$ et $P_y(y)$.
Les VA x et y sont elles indépendantes ?
- Calculer $E(x)$, $E(y)$, σ_x , σ_y
- Calculer les covariances de x et y et leur coefficient de corrélation.

x/y	0	1	2	3
1	0.1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.2	0

Exercice # n°2

Une v.a a pour densité de probabilité $p_x(x)$ définie comme suit:
$$p_x(x) = \begin{cases} k, & x \in [a,b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Trouver la valeur de K
- Calculer la fonction de répartition $F_x(x)$ et la tracer pour $a=1$ et $b=2$
- Déterminer la moyenne et la variance

Exercice # n°3

Soit le processus stochastique $X(t)$ défini par : $X(t)=a+bt$ où a et b sont des v.a dont les probabilités sont connus.

- Calculer la moyenne et la variance
- Déterminer la fonction d'autocorrélation

$X(t)$ est-il stationnaire d'ordre 1 et 2 ?

Exercice # n°4

Soit le processus stochastique $X(t)$ défini par : $X(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ où φ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-\pi, +\pi]$.

1. Etudier la stationnarité de $X(t)$.
2. Calculer ses moyennes temporelles et conclure.

CHAPITRE 3
ANALYSE ET SYNTHÈSE DES FILTRES
ANALOGIQUES

Chapitre 3: Analyse et synthèse des filtres analogiques

3.1 Rappels sur la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une transformation de toute fonction $x(t)$ continu à une fonction $X(p)$.

$$X(p) = TL\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + j2\pi f$$

Cette équation représente la transformée de Laplace bilatérale et pour les systèmes causal la transformée mono latérale est donnée par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

La transformée de Laplace est unique si : $\left| \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt \right| < \infty$

Son inverse est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j2\pi f}^{\sigma+j2\pi f} X(p)e^{+pt} dp$$

- **Propriétés**
- **Linéarité**

$$\left. \begin{array}{l} TL\{x(t)\} = X(p) \\ TL\{y(t)\} = Y(p) \end{array} \right\} TL\{ax(t) + by(t)\} = aX(p) + bY(p)$$

- **Unicité**

$$x(t) \xrightarrow{TL} X(p)$$

- **Différenciation dans le domaine fréquentiel complexe**

$$t x(t) \xrightarrow{TL} -\frac{d}{dp} X(p)$$

- **Intégration dans le domaine fréquentiel complexe**

$$\frac{x(t)}{t} \xrightarrow{TL} \int_p^\infty F(p) dp$$

- **Dérivation**

$$TL \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} = p^n X(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} x^{(r-n-1)}(0)$$

$$\text{Avec : } x^{(r-n-1)}(0) = \left. \frac{d^{(r-n-1)} x(t)}{dt^{(r-n-1)}} \right|_{t=0}$$

- **Intégration**

$$TL \left\{ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t x(t) dt^n \right\} = \frac{1}{p^n} TL \{x(t)\}$$

- **Changement d'échelle**

$$x(at) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{p}{a}\right), \quad x\left(\frac{1}{a}t\right) \xrightarrow{TL} aX(ap)$$

- **Translation temporelle**

$$x(t-t_0) \xrightarrow{TL} X(p)e^{-pt_0}$$

- **Translation fréquentielle**

$$x(t)e^{at} \xrightarrow{TL^{-1}} X(p-a)$$

- **Convolution dans le domaine temporel**

$$x(t) \otimes y(t) = X(p) \times Y(p)$$

- **Convolution dans le domaine fréquentiel**

$$x(t) \times y(t) = \frac{1}{2\pi j} X(p) \otimes Y(p)$$

- **Théorème de la valeur initiale**

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p)$$

- **Théorème de la valeur finale**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$$

- **Transformée de Laplace d'une fonction périodique**

$$X(p) = \frac{X(p)}{1 - e^{-pT}}$$

$$X(p) = \frac{\int_0^T x(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}$$

Tableau 3.1 Transformées de Laplace

$f(t)$ causal	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$U(t)$	$1/p$
$e^{-at}U(t)$	$1/(p+a)$
$tU(t)$	$1/p^2$
$t^n U(t)$	$n! / p^{n+1}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$

$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t)e^{-at}u(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)e^{-at}u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{d^n}{d^n t} \delta(t)$	p^n
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

3.2 Filtre linéaire

C'est un système linéaire invariant dans le temps (SLI) (stationnaire) qui laisse passer certaines fréquences et arrête ou atténue le reste c-à-d divise le spectre.

Un filtre idéal permet d'avoir une bande passante sans aucune distorsion et une bande bloquée avec affaiblissement infini. Pratiquement, ce filtre est irréalisable mais nous pouvons réaliser des filtres qui s'approchent de l'idéal.

Un filtre est caractérisé par: $h(t)$: réponse impulsionnelle (sa fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$).

On distingue deux type de filtres:

- Les filtres passifs à base de résistances, condensateurs et inductances, on parle alors de filtres passifs.

- Les filtres actifs à base de des amplificateurs opérationnels ou les transistors.

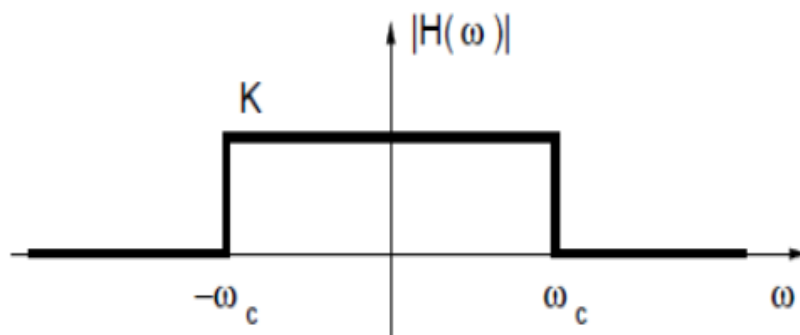


Figure 3.1 Filtre passe bas idéal

3.2.1 Fonction de transfert

Cette fonction est définie par:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (3.1)$$

Pour un filtre, la fonction de transfert c'est un rapport de deux polynômes:

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_0 + a_1P + a_2P^2 + \dots + a_mP^m}{b_0 + b_1P + b_2P^2 + \dots + b_nP^n} \quad (3.2)$$

3.2.2 Propriétés de la fonction de transfert

- Le degré du polynôme du D(p) définit l'ordre (n) du filtre,
- Le degré (n) du D(p) doit être supérieur ou égal au degré (m) du N(p),
- Les racines du D(p) sont appelés « zéros »,
- Les racines du N(p) sont appelés « pôles »,
- Toutes les H(p) peuvent être décomposés comme le produit de H(p) du 1er et du 2ème ordre.
- L'inverse de H(P) est la réponse impulsionnelle h(t) du filtre.
- La stabilité d'un filtre nécessite que tous les pôles de H(p) soient à partie réelle négative ou $h(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

3.3 Pôles, zéros, plan P et stabilité des filtres analogiques

3.3.1 Pôles et zéros

Considérons la fonction

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.3)$$

Les racines du polynôme $D(s)$ sont les pôles finis de la fonction de $H(s)$ qui sont nécessaire pour étudier la stabilité de système . Les racines du polynômes $N(s)$ sont ses zéros finis. Ces zéros-pôles peuvent être représentés graphiquement dans le plan complexe de s .

3.3.2 Stabilité

Lorsqu'on a une sortie bornée pour une entrée bornée, on dit que le système est stable. Leurs pôles se trouvent dans le demi-plan complexe gauche. Un système est instable s'il donne une sortie instable pour une entrée stable ou bornée.

3.4 Réponses d'un filtre linéaire

A partir de la fonction de transfert, on peut avoir le spectre du signal de sortie :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} \rightarrow S(f) = H(f).E(f) \quad (3.4)$$

La réponse d'un filtre linéaire à un signal d'entrée quelconque peut être obtenue soit en appliquant la TF^{-1} (ou TL^{-1}) au spectre du signal de sortie $S(f)$ (méthode indirecte): $s(t) = TF^{-1}[S(f)] = TF^{-1}[H(f).E(f)]$ ou soit en appliquant le théorème de la convolution (méthode directe). $s(t) = h(t) \otimes x(t)$.

3.4.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est définie comme étant la réponse d'un système linéaire à une impulsion de Dirac :

$$\begin{aligned}x(t) &= \delta(t) \xrightarrow{TL} X(p) = 1 \\ Y(p) &= H(p) \cdot X(p) \\ Y(p) &= H(p)\end{aligned}\quad (3.5)$$

La réponse impulsionnelle s'obtient par la transformée inverse de H(p).

3.4.2 Réponse indicielle

C'est la réponse d'un système à l'échelon unité :

$$\begin{aligned}x(t) &= U(t) \xrightarrow{TL} X(p) = \frac{1}{p} \\ Y(p) &= H(p) \cdot X(p) \\ Y(p) &= H(p) \cdot \frac{1}{p}\end{aligned}\quad (3.6)$$

3.4.3 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle d'amplitude et de la phase consiste à étudier la réponse du filtre lorsqu'il est soumis aux entrées sinusoïdales de fréquences différentes.

$$\begin{aligned}e(t) &= A \cos(2\pi f_0 t) \\ e(t) &= \frac{A}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \xrightarrow{TF} E(f) = \frac{A}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \\ S(f) &= H(f) \cdot E(f)\end{aligned}$$

Si on peut écrire $H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$

Alors :

$$\begin{aligned}S(f) &= \frac{A}{2} |H(f)| e^{j\varphi(f)} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} |H(f)| e^{j\varphi(f)} \delta(f - f_0) \\ S(f) &= A |H(f)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0))\end{aligned}\quad (3.7)$$

La réponse permanente d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale de fréquence f_0 est une sinusoïde de même fréquence mais avec une amplitude et

une phase modifiées. L'amplitude $A |H(f)|$ du signal de sortie est égale au produit de l'amplitude de l'entrée A et le module de la fonction de transfert $|H(f)|$, aussi le déphasage $\varphi(f)$ entre sortie et entrée est égal à l'argument de la fonction de transfert $H(f)$; ainsi l'étude de la réponse fréquentielle se résume à l'étude de la fonction de transfert $H(f)$ et donc de tracer les courbes du module et de l'argument.

3.5 Types de filtres

3.5.1 Filtres idéals

Il s'agit de filtres qui possèdent des fonctions de transfert, ayant des réponses d'amplitudes constantes dans une certaine bande de fréquence appelée « Bande transmise ou Bande passante » et nulles pour les autres fréquences « Bande rejetée ou Bande coupée ». Ils permettent le transfert sans distorsions de toutes les composantes du signal d'entrée dans la bande passante et atténuent toutes les autres.

3.5.1.1 Filtres passe-bas

Les filtres passe-bas, passe que les basses fréquences comprises dans la bande passante $[-f_c, +f_c]$ et élimine totalement les hautes fréquences comprises dans les bandes $]-\infty, -f_c] \cup [+f_c, +\infty[$.

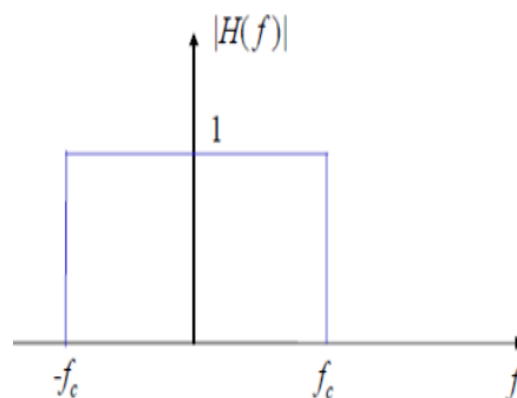


Figure 3.2 Filtres passe-bas

3.5.1.2 Filtres passe-haut

Les filtres passe-haut, passe que les hautes fréquences comprises dans la bande passante $]-\infty, -f_c] \cup [f_c, +\infty[$ et coupent les basses fréquences comprises dans la bande $[-f_c, +f_c]$.

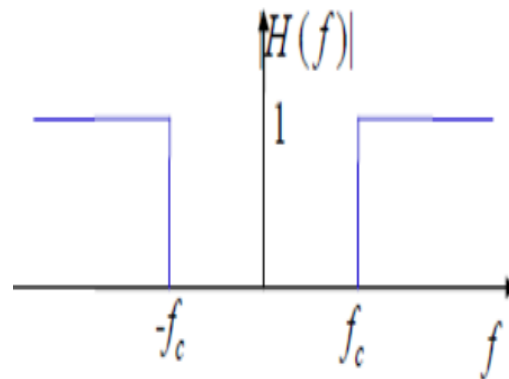


Figure 3.3 Filtres passe-bas

3.5.1.3 Filtres passe-bande

Les filtres passe-bande, ne passe qu'une bande limitée de fréquences comprises entre $[-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, +f_{c2}]$.

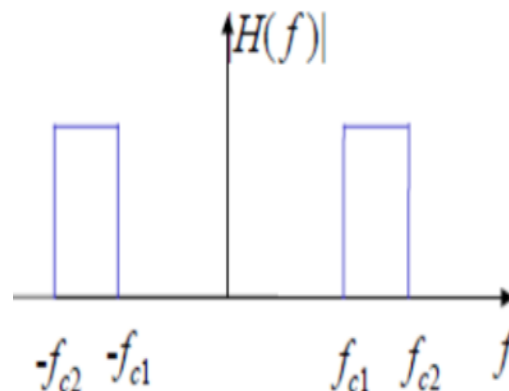


Figure 3.4 Filtres passe-bande

3.5.1.4 Filtres coupe-bande

Les filtres coupe-bande, à l'inverse des filtres passe bande, laissent passer toutes les fréquences comprises dans la bande passante $]-\infty, -f_{c2}] \cup [-f_{c1}, +f_{c1}] \cup [f_{c2}, +\infty[$.

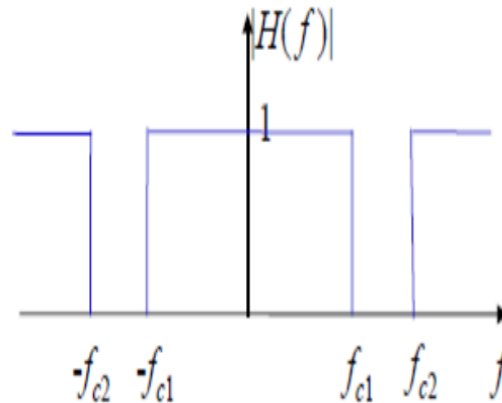


Figure 3.5 Filtres coupe-bande

Exemple 3.1

- Déterminer la fonction de transfert du filtre réagit par l'équation suivante :

$$e(t) = s(t) + 4 \frac{ds(t)}{dt}$$

Et calculer son module

Solution 3.1

$$e(t) = s(t) + 4 \frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{TF} E(f) = S(f) + j8\pi f S(f)$$

$$\text{donc } H(f) = \frac{1}{1 + j8\pi f}$$

$$\text{Le module : } |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (8\pi f)^2}}$$

3.6 Filtres passifs et actifs

3.6.1 Filtres passifs : les résistances, les condensateurs et les bobines.

Composante passif	Notation temporelle	Notation de Laplace
Résistance	$v(t) = Ri(t)$	$V(p) = RI(p)$
Condensateur	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$I(p) = C.pV(p)$
Inductance	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$V(p) = L.pI(p)$

3.6.2 Filtres actifs

Les filtres actifs sont constitués des amplificateurs opérationnels et des transistors, etc.

➤ Avantages:

- Moins de composantes
- Faciles à réaliser
- Moins coûteux.

➤ Inconvénient:

- Leurs usages sont jusqu'à quelques dizaines de MHz
- Bruit,
- Nécessitent une alimentation.

3.7 Autres filtres (Butterworth, Tchebychev I et II, Elliptiques)

3.7.1 Filtre Butterworth

On donne comme exemple de filtre passe bas, le filtre qui a pour fonction de transfert :

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (3.8)$$

f_c est la fréquence de coupure et n le rang du filtre, nous pouvons remarquer que plus n est élevé plus le filtre s'approche du filtre idéal.

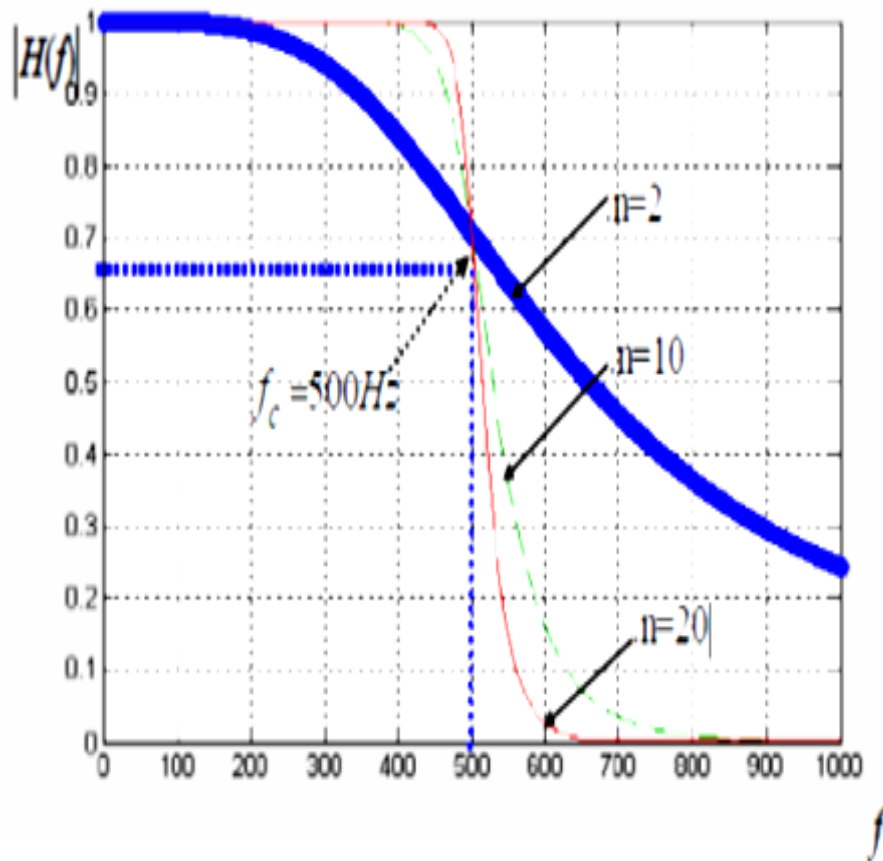


Figure 3.6 Filtre Butterworth

3.7.2 Filtre Tchebychev I et II

La $H(f)$ de ces filtres est liée à un facteur ε et à un polynôme T_n qui dépend de la fréquence variable f et de la fréquence de coupure f_c , par exemple pour un filtre passe bas.

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{f}{f_c}\right)}} \quad (3.9)$$

Où ε est une constante réelle positive $\varepsilon < 1$, et $T_n(f/f_c)$ est le polynôme de Tchebbychev.

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ avec } n = 2, 3, 4, \dots \text{etc.}$$

$$T_1(x) = x; T_0(x) = 1 \text{ et } T_n(x) < 1$$

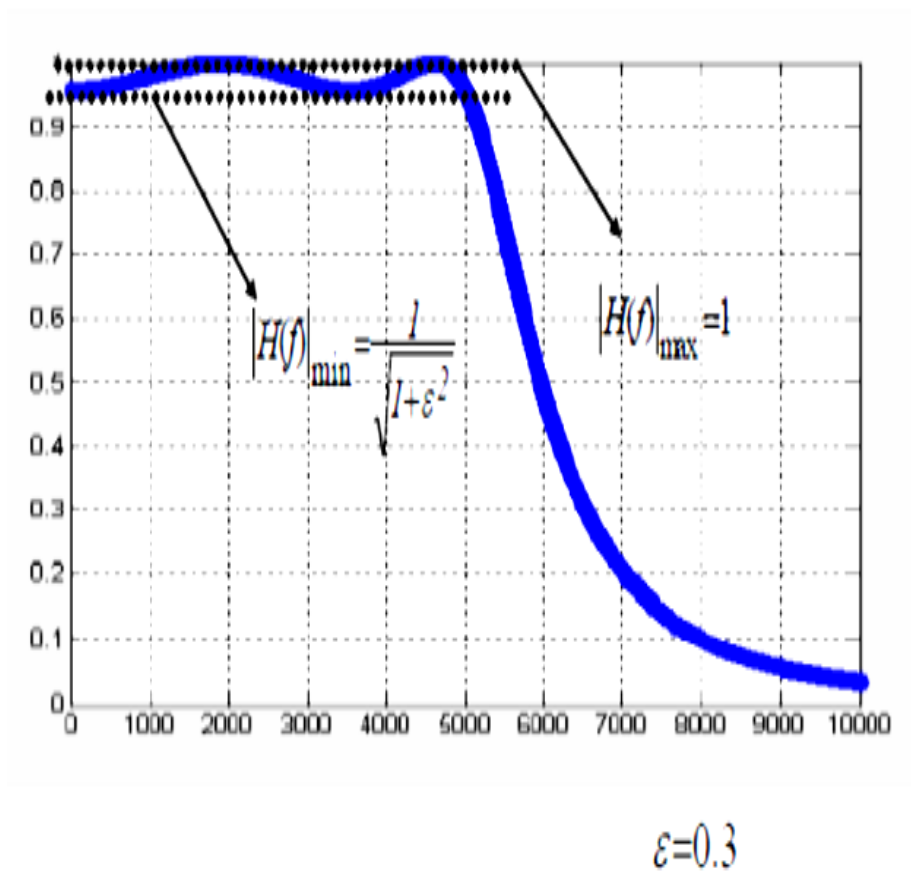


Figure 3.7 Filtre Tchebychev I et II

Dans la bande passante, on remarque des ondulations qui oscillent entre $H(f)_{\max}$ et $H(f)_{\min}$. On a $H(f)_{\max} = H(0) = 1$ et $H(f)_{\min} = H(f_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$

3.8 Analyse temporelle et fréquentielle des filtres analogiques

Les filtres analogiques forment une classe importante des systèmes linéaires et stationnaires à constantes localisées. Ces constantes localisées peuvent être des résistances, des selfs (bobines), des capacités ou des amplificateurs opérationnels. Ceci conduit à représenter les filtres par des équations différentielles à coefficients constants.

3.8.1 Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

Soit le circuit RC suivant :

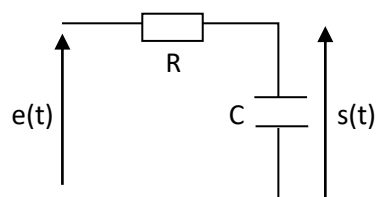


Figure 3.8 Filtres passe-bas (Circuit RC)

$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$

$$e(t) = RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \xrightarrow{TL}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCP} = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}$$

3.8.1.1 Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \delta(t) \xrightarrow{TL} E(p) = 1$$

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \cdot 1 \rightarrow s(t) = TL^{-1}\{S(p)\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

3.8.1.2 Réponse indicielle

$$e(t) = U(t) \xrightarrow{TL} E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{p} \rightarrow s(t) = TL^{-1}\{S(p)\} = U(t) \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$

3.8.2 Filtre passe-bas du 2^{ième} ordre

Soit le circuit RLC suivant :

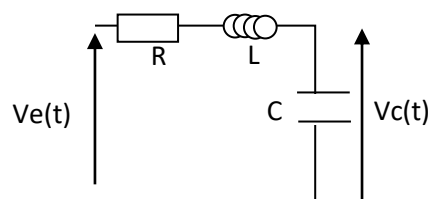


Figure 3.9 Filtres passe-bas (Circuit RLC)

$$v_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$v_c(t) = v_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

On applique la transformée de Laplace

$$V_e(P) = RI(P) + LPI(P) + V_c(P)$$

$$V_c(P) = V_s(P) = \frac{I(P)}{CP} \rightarrow I(P) = CPV_s(P)$$

Donc

$$V_e(P) = RCPV_s(P) + LPCPV_s(P) + V_c(P)$$

$$\text{La fonction de transfert } H(P) = \frac{V_s(P)}{V_e(P)} = \frac{1}{1 + RCPLCP^2}$$

Sous forme normalisée

$$H(P) = \frac{\omega_n^2}{P^2 + 2\gamma\omega_n P + \omega_n^2} \rightarrow H(P) = \frac{\omega_n^2}{P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}}$$

L'étude se fait selon la nature des pôles de dénominateur

3.9 La synthèse des filtres analogiques

Soit la fonction de transfert du filtre prototype de Butterworth d'ordre n donnée par la formule suivante :

$$|H_p(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

1. Ordre du filtre

L'atténuation maximale de la caractéristique (la courbe) doit être inférieure à A_{\max} dans la bande passante à une certaine pulsation ω_p et supérieur à A_{\min} dans la bande coupée une certaine pulsation ω_a

$$\begin{cases} -10 \log \left[|H_p(\omega_p)|^2 \right] \leq A_{\max} \\ -10 \log \left[|H_p(\omega_a)|^2 \right] \geq A_{\min} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\omega_p/\omega_c)^{2n} \leq 10^{A_{\max}/10} - 1 \\ (\omega_a/\omega_c)^{2n} \leq 10^{A_{\min}/10} - 1 \end{cases}$$

$$\frac{(\omega_p/\omega_c)^{2n}}{(\omega_a/\omega_c)^{2n}} \geq \frac{10^{A_{\max}/10} - 1}{10^{A_{\min}/10} - 1}$$

$$n \geq \frac{\log \left[(10^{A_{\max}/10} - 1) / (10^{A_{\min}/10} - 1) \right]}{2 \log(\omega_p/\omega_a)}$$

L'ordre du filtre n doit être une valeur entière.

2. Les pôles

$$|H_p(\omega)|^2 = |H_p(P)|^2 = \frac{1}{1+(P/j)^{2n}}; P = j\omega$$

Les pôles à partie réelle négative sont attribués à $H_p(P)$ pour un filtre stable.

Les pôles sont obtenus en posant :

$$1+(P/j)^{2n} = 0 \rightarrow (P/j)^{2n} = -1 = e^{j\pi}$$

Posant $P = e^{j\theta}$ et distinguons deux cas : n impair et n pair

- Pour n impair :

$$(P/j)^{2n} = (e^{j\theta}/j)^{2n} = -e^{j2n\theta} = -1$$

$$\rightarrow e^{j2n\theta} = 1 = e^{j2\pi k}$$

$$\rightarrow \theta = k\pi/n, \quad 0 \leq k \leq 2n-1$$

$$\rightarrow P_k = e^{jk\pi/n} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq 2n-1$$

On sélectionne les pôles à partie réelle négative :

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq 0 \rightarrow \frac{n}{2} \leq k \leq \frac{3n}{2}$$

$$P_k = e^{jk\pi/n} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right); \quad k = \frac{n+1}{2}, \dots, \frac{3n-1}{2}$$

- Pour n pair :

$$(P/j)^{2n} = (e^{j\theta}/j)^{2n} = e^{j2n\theta} = -1$$

$$\rightarrow e^{j2n\theta} = e^{j\pi(2k+1)}$$

$$\rightarrow \theta = (2k+1)\pi/2n, \quad 0 \leq k \leq 2n-1$$

$$\rightarrow P_k = e^{j(2k+1)\pi/2n} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + j \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad 0 \leq k \leq 2n-1$$

On sélectionne les pôles à partie réelle négative :

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \leq 0 \rightarrow \frac{n-1}{2} \leq k \leq \frac{3n-1}{2}$$

$$P_k = e^{j(2k+1)\pi/2n} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + j \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right); \frac{n}{2} \leq k \leq \frac{3n-1}{2}$$

3. Dénormalisation

Pour obtenir la $H(P)$ du filtre passe-bas ayant la pulsation de coupure ω_c on remplace P par P/ω_c dans $H_p(P)$:

$$H_p(P) = H_p(P)\Big|_{P=P/\omega_c}$$

3.10 Exercices à résoudre

Exercice # n°1

Déterminer la fonction de transfert des systèmes suivants dont les signaux d'entrée et de sortie sont liés par les équations différentielles suivantes :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t); \quad y'(t) + y(t) = x(t - T)$$

Exercice # n°2

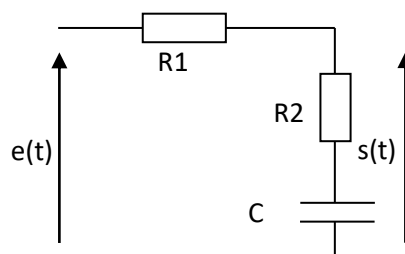
Trouver la fonction de transfert ainsi que l'équation différentielle qui régit le système pour chacun des cas suivants :

1. $e(t) = \delta(t); s(t) = e^{-2t}$
2. $e(t) = \delta(t); s(t) = \sin t$

Exercice # n°3

Soit le filtre passe bas représenté ci-dessous.

1. Déterminer la fonction de transfert du système suivant.
2. Donner sa sortie pour une entrée $e(t) = eU(t)$
3. Déterminer la réponse impulsionnelle et indicielle.



Exercice # n°4

- Déterminer l'ordre 'n' du filtre Butterworth, la fonction de transfert, la pulsation de coupure ' ω_c ' et dénormaliser le filtre qui répond aux spécifications de filtre passe-bas suivantes:

$$f_c=1000\text{Hz}; f_a=3000\text{Hz}; a_{\max}=3\text{dB}; a_{\min}=30\text{dB};$$

CHAPITRE 4
ECHANTILLONNAGE DES SIGNAUX

Chapitre 4: Echantillonnage des signaux

4.1 Echantillonnage

L'échantillonnage est une opération essentielle dans le traitement du signal numérique qui permet la conversion d'un signal analogique $x(t)$ en une séquence d'échantillons $x_k = x(t_k)$ à des instants équidistants (Période d'échantillonnage T_e).

$$x(t_k) = \{x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots\} \quad (4.1)$$

t_k : instants d'échantillonnage.

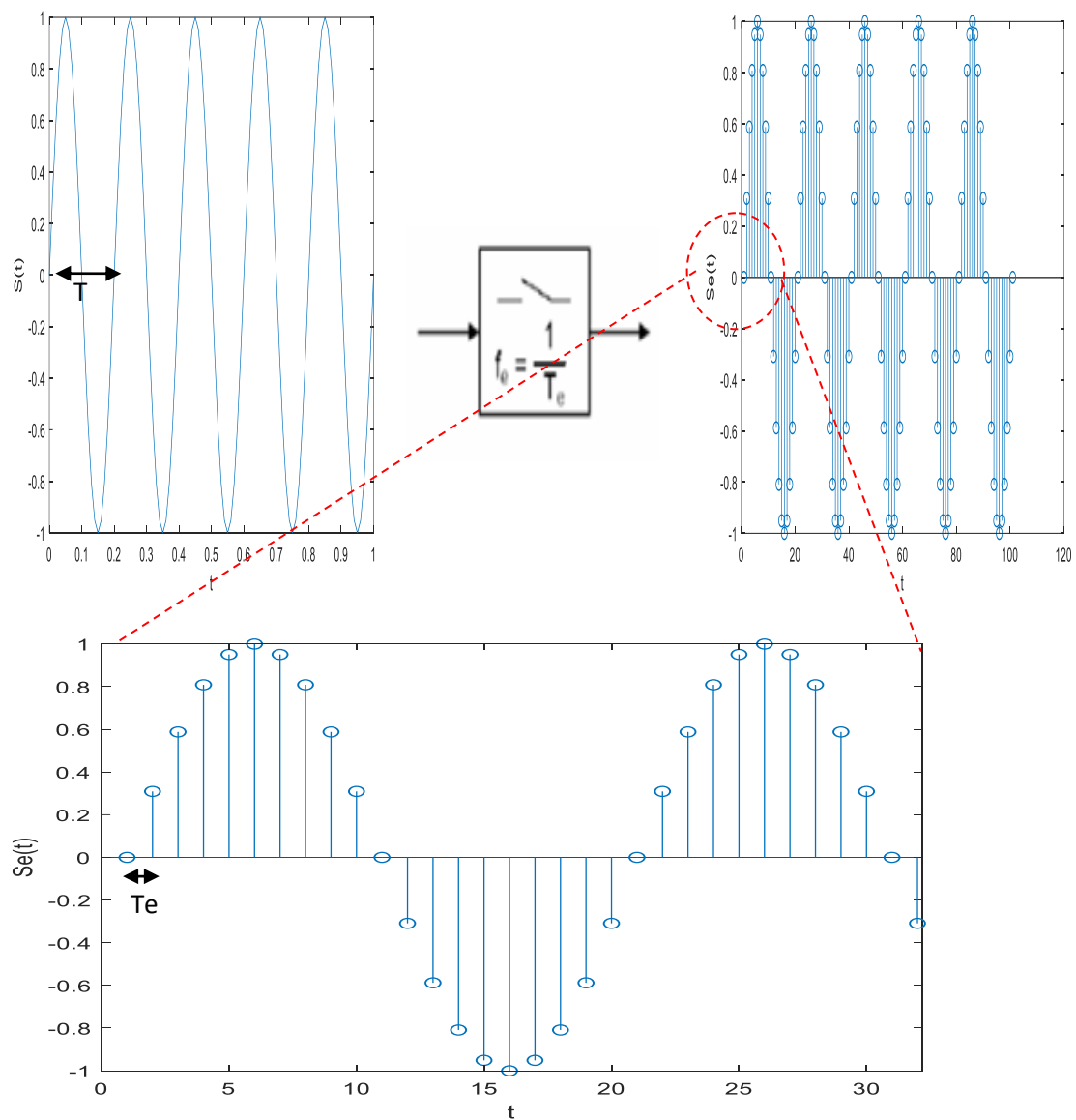
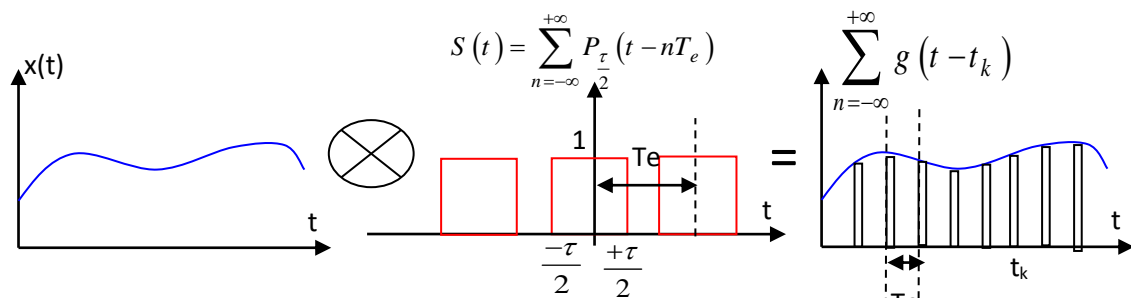
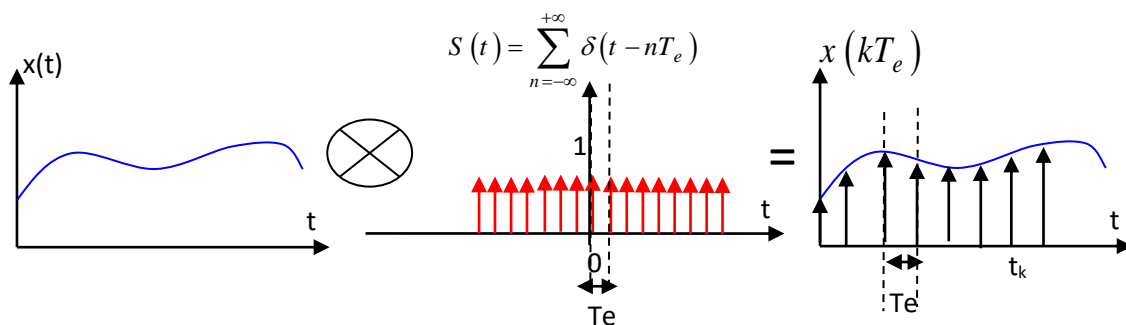


Figure 4.1 Echantillonnage

L'échantillonneur est assimilé à un interrupteur qui s'ouvre et se ferme périodiquement à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$. Le signal échantillonné est une multiplication du signal analogique par une fonction d'échantillonnage. Si la fonction d'échantillonnage est une suite d'impulsions rectangulaires de période T_e , de durée τ et d'amplitude unité alors on a un échantillonnage réel et si la fonction d'échantillonnage est une suite d'impulsions de Dirac espacés de T_e on a un échantillonnage idéal.



(a) Echantillonnage réel



(b) Echantillonnage idéal

Figure 4.2 Types d'échantillonnage

Dans ce qui suit, on s'intéresse par l'échantillonnage idéal.

4.2 Analyse fréquentielle

Pour analyser le comportement fréquentiel de l'échantillonneur on détermine la Transformée du Fourier (TF) sur le signal échantillonné (Spectre du signal échantillonné)

.

$$\begin{aligned}
 f_e(t) &= f(t) \cdot s(t) \\
 f_e(t) &= f(t) \cdot P_{gn_{T_e}}(t) \\
 f_e(t) &= f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \\
 f_e(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
 f_e(t) &= f(t) \cdot P_{gn_{T_e}}(t) \xrightarrow{TF} F_e(f) = F(f) \otimes TF\{P_{gn_{T_e}}(t)\} \\
 F_e(f) &= F(f) \otimes \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \\
 F_e(f) &= \frac{1}{T_e} F(f) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) \\
 F_e(f) &= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(f - nf_e) \quad (F(f) \otimes \delta(f) = F(f))
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Le spectre $F_e(f)$ d'un signal échantillonné $f_e(t)$ est une répétition cyclique (périodicité) de $F(f)$ dans l'espace des fréquences.

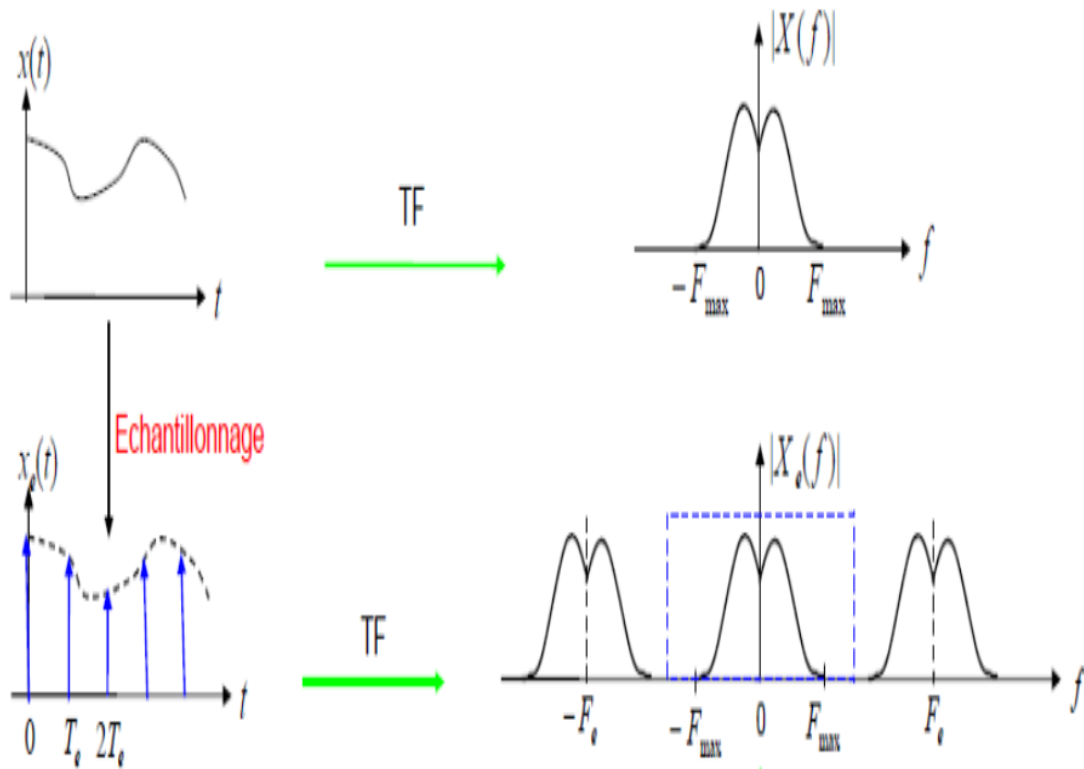


Figure 4.3 Spectre d'un signal échantillonné

4.3 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Pour avoir une numérisation parfaite du signal analogique, il faut que F_e d'un signal à bande limitée ($|F(f)| < 0, |f| < F_{\max}$) doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale F_{\max} contenue dans ce signal (Condition de Shannon).

$$F_e - F_{\max} \geq F_{\max} \Rightarrow F_e \geq 2F_{\max} \quad (4.4)$$

$2F_{\max}$: la fréquence d'échantillonnage critique

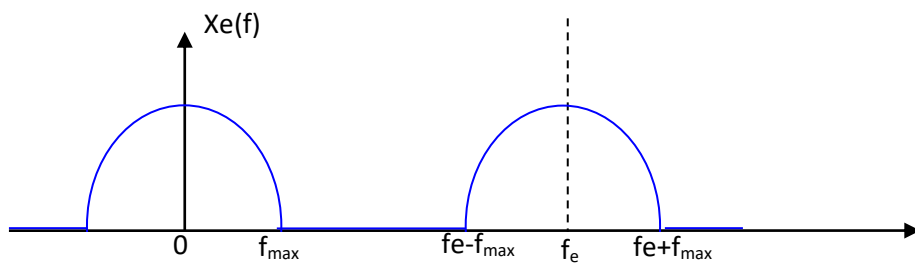


Figure 4.4 Théorème de Shannon

Tableau 4.1 Condition de Shannon (C.Sh)

Condition	Remarque
$F_e > 2F_{\max}$	La C.Sh est respectée et pas de recouvrement (conservation de l'information)
$F_e = 2F_{\max}$	La C.Sh est respectée à la limite et pas de recouvrement (échantillonnage à la limite)
$F_e < 2F_{\max}$	La C.Sh n'est pas respectée, certaines fréquences vont se chevaucher et va se produire un phénomène de repliement (recouvrement spectral, perte de l'information).

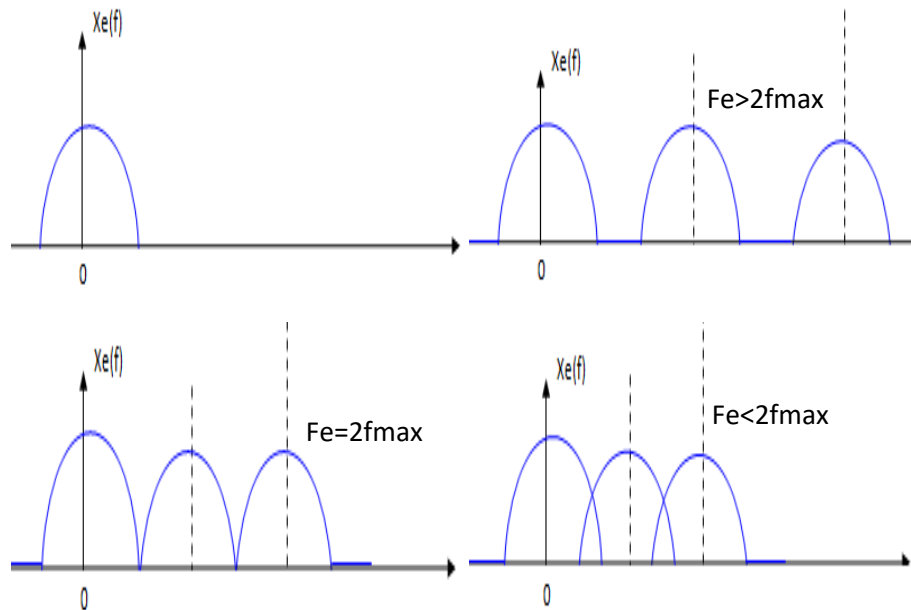


Figure 4.5 Les trois cas du théorème de Shannon

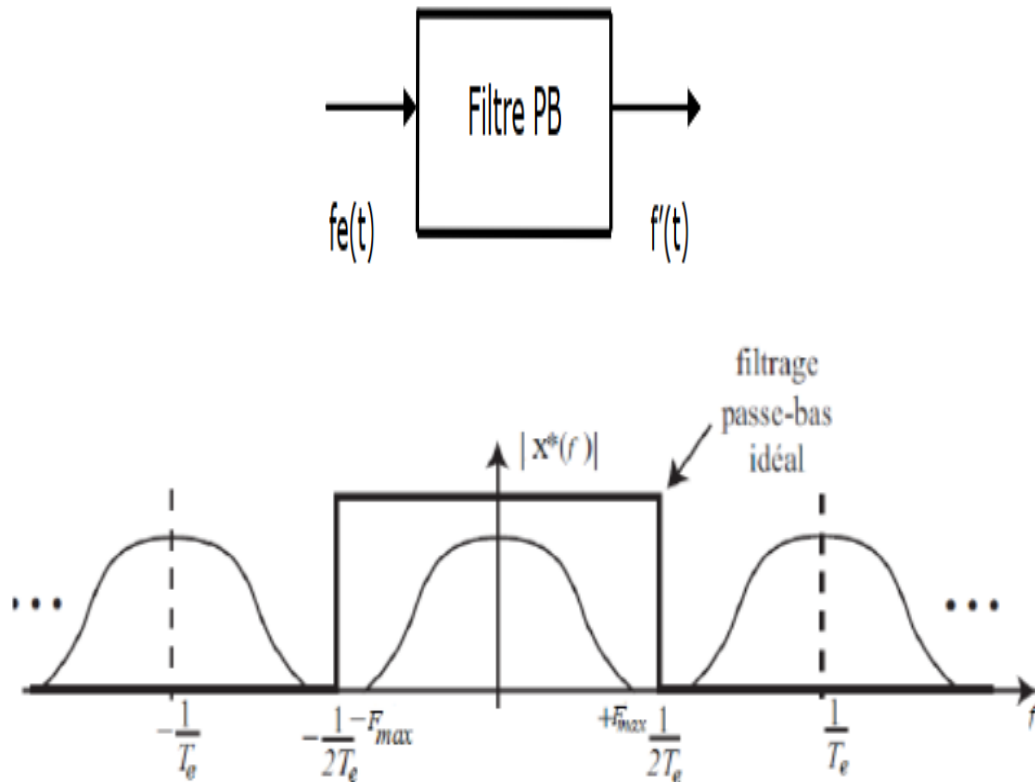
Remarques :

- Pour éviter le phénomène de repliement, on utilise un filtre pass-bas avant l'opération d'échantillonnage (Filtre anti-repliement ou anti-recouvrement) qui va atténuer les composantes hautes fréquences qui ne sont pas essentielles à l'information, ensuite on applique la condition de Shannon.
- Le théorème d'échantillonnage était appliqué que pour les signaux à bande limitées.
- Le phénomène de repliement dépend de la largeur du spectre et de la F_e .

4.4 Reconstitution du signal analogique (SA)

La restitution d'un SA $f(t)$ à partir de son signal échantillonné $f_e(t)$ nécessite une isolation du spectre $F(f)$ à l'aide d'un filtre passe bas (PB) (filtre d'interpolation ou de reconstruction ou de lissage) de fréquence de coupure F_c et de fonction de transfert $H(f)$. Il est nécessaire que la fréquence de coupure du filtre d'interpolation vérifiée la condition suivante :

$$F_{\max} \leq F_c \leq F_e - F_{\max} \quad (4.5)$$

Figure 4.6 Isolation du spectre $F(f)$

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= h(t) \otimes f_e(t) \\
 f'(t) &= h(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e) \\
 f'(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) h(t - nT_e)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

On suppose que $h(t) = \frac{F_c}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{F_c}{2\pi} t \Rightarrow h(t - nT_e) = \frac{F_c}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{F_c}{2\pi} (t - nT_e)$

Donc

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \frac{F_c}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{F_c}{2\pi} (t - nT_e) \tag{4.7}$$

La sommation d'une multiplication entre chaque échantillon $f(nT_e)$ avec la version retardée de la fonction d'interpolation $\operatorname{sinc} \frac{F_c}{2\pi} (t - nT_e)$ permet d'avoir le signal $f'(t)$.

Exemple 4.1

Soit un signal téléphonique émis occupant la bande [300 Hz, 3300Hz].

1. Peut-on éviter le recouvrement pour $F_e=4000\text{Hz}$ et $F_e=8000\text{Hz}$?
2. A quelle condition peut-on récupérer le signal téléphonique ?
3. Proposer une solution pour récupérer le signal téléphonique émis.

Solution 4.1

1. Non, pour 4000Hz et oui, pour 8000Hz
2. $F_e \geq 2f_{\max} = 6600\text{Hz}$
3. Pour $F_e=8000\text{Hz}$, on doit appliquer un filtre passe bas de $3300\text{Hz} < f_c < 4700\text{Hz}$

4.5 Quantification

La quantification est le processus de conversion d'une fonction analogique ou continue en un ensemble discret de valeurs. Un signal échantillonné et quantifié devient alors une suite de nombres. Cette double discrétisation horizontale sur l'axe du temps avec un pas T (période d'échantillonnage) et verticale sur l'axe d'amplitude avec un pas q dit de quantification, convertit un signal analogique en un signal numérique. A chaque amplitude du signal échantillonné est associée une valeur binaire codée sur n bits, opération réalisée par un convertisseur Analogique-Numérique (CAN) . Ceci permet de distinguer $N = 2^n$ niveaux sur une plage de variation d'amplitude de $-V_m$ et

$+V_m$ donnant un pas de quantification égal à: $q = \frac{2V_m}{2^n - 1}$

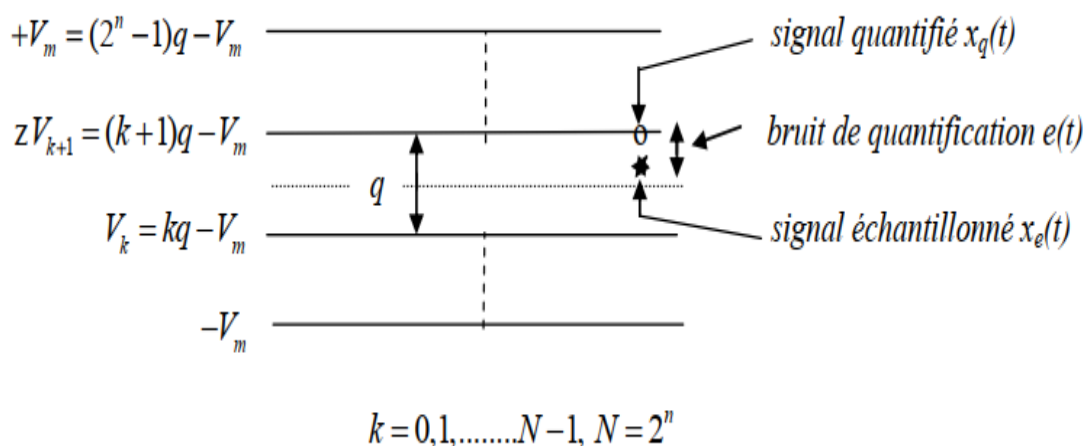


Figure 4.7 Quantification

- Bruit de quantification

On peut modéliser le bruit de quantification par un signal aléatoire $e(t)$ uniformément réparti entre $+\frac{q}{2}$ et $-\frac{q}{2}$. Sa variance est donnée par:

$$\sigma_e^2 = E[e^2(t)] = \frac{q^2}{12} = \frac{V_m^2}{3 \cdot 2^{2n}}$$

Le rapport signal-sur-bruit pour un signal $x(t)$ donné est :

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}$$

Avec : σ_x^2 : variance du signal.

4.6 Convertisseur analogique-Numérique CAN

Un CAN transforme une grandeur physique (tension, courant) en une valeur numérique et peut être réalisé selon plusieurs technologies: parallèle ou flash, rampe analogique, rampe numérique, approximations successives.

La résolution d'un CAN est égale à la différence de deux niveaux successifs. Lorsque cette résolution est petite, on aura une conversion très précise.

4.7 Convertisseur Numérique- analogique CNA

Le principe de base est d'avoir une valeur analogique proportionnelle à une valeur numérique codée sur plusieurs bits. Exemple : résistances pondérées et réseau R/2R.

	CAN	CNA
Quantum	$q = \frac{v_{ref}}{2^n}$, n : nombre de bits	$q = \frac{v_{ref}}{2^n - 1}$
Caractéristique de transfert (Vs=f(Ve), N: nombre codé sur certain nombre de bits)	$N = \frac{v_e}{q}$	$v_s = N \times q$
Excursion (plein échelle) :	$E = q \times 2^n$	$E = q (2^n - 1)$

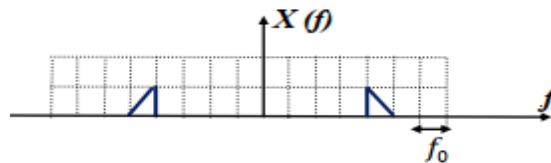
tension maximum qu'on doit prendre en entrée d'un CAN ou en sortie d'un CNA.		
Résolution (R): c'est la précision du convertisseur $R = \frac{1}{2^n}$	R en nombre de bits : $R = n$	R en tension: $R = q$
Temps de conversion	C'est le temps qu'il faut au convertisseur pour transformer une valeur analogique en valeur numérique (durée de échantillon)	
Fréquence d'échantillonnage	Le nombre d'échantillons par second	

4.8 Exercices à résoudre

Exercice # n°1

Soit le signal dont le spectre est représenté par la figure ci-dessous, on échantillonne ce signal idéalement.

1. Tracer le spectre du signal échantillonné dans les cas où la fréquence d'échantillonnage est : $f_e = 2f_0$; $f_e = 3f_0$; $f_e = 10f_0$. Chaque graduation représente f_0 .
2. Donner la plus petite fréquence d'échantillonnage qui permet d'éviter le recouvrement.



Exercice # n°2

Un signal analogique est échantillonné avec une fréquence $f_e = 2500\text{Hz}$; sachant que l'on peut restituer le signal original du signal échantillonné par un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c = 1000\text{Hz}$.

- Trouver les largeurs possibles du spectre du signal analogique (original).

Exercice # n°3

Soit le signal $(t) = \text{rect}_T(t)$; trouver la fréquence d'échantillonnage qui vérifie la condition de SHANON permettant d'éviter le recouvrement pour les 3 premiers lobes. On prendra dans le graphe $T=4\text{ms}$.

Exercice # n°4

Soit le signal $x(t)=\text{sinc}(t/T)$. peut-on éviter le recouvrement si l'échantillonnage de ce signal se fait avec une fréquence $f_e = 1/4T$; $f_e = 3/2T$.

Tracer le spectre du signal échantillonné (dans un intervalle de fréquences de 0 à $2.f_e$; On prend:

- $f_e = \frac{2}{T}$ dans le cas $x(t) = \text{sinc}(t/T)$
- $f_e = \frac{3}{2T}$ dans le cas $x(t) = \text{sinc}(2t/T)$
- $f_e = \frac{1}{T}$ dans le cas $x(t) = \text{sinc}(t/T)$

CHAPITRE 5
TRANSFORMEES DISCRETES

Chapitre 5: Transformées discrètes

5.1 Les signaux numériques

Si la variable t est représentée par des instants $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ régulièrement espacés, alors le signal est dit échantillonné (ou signal à temps discret). Ces signaux peuvent être représentés par plusieurs représentations :

- Représentation mathématiquement: $(x[n], -\infty < n < +\infty)$.

- Représentation fonctionnelle :

$$x[n] = \begin{cases} 7 & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n = 3 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Représentation tabulaire:

n	...-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5...
$x[n]$...1	1	0	0	5	3	3	3	2	2	1

- Représentation par séquence: $x[n] = \{\dots, 2, 0, 1, 3, 1, 0, 6, \dots\}$, 0 : représente l'origine.

▪ Séquence causal : $x[n] = \{0, 1, 3, 1, 0, 6, \dots\}$, ($x[n] = 0$ pour $n < 0$)

▪ Séquence de durée finie causale : $x[n] = \{0, 1, 3, 1, 0, 6\}$

▪ Séquence de durée finie: $x[n] = \{2, 0, 1, 3, 1, 0, 6, 5\}$, séquence 8 points.

▪ Représentation graphique :

$$x[n] = 2\delta[n+7] + 3\delta[n+6] + 2\delta[n+4] + \delta[n+3] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + \delta[n-1] + 2\delta[n-5] + \delta[n-7]$$

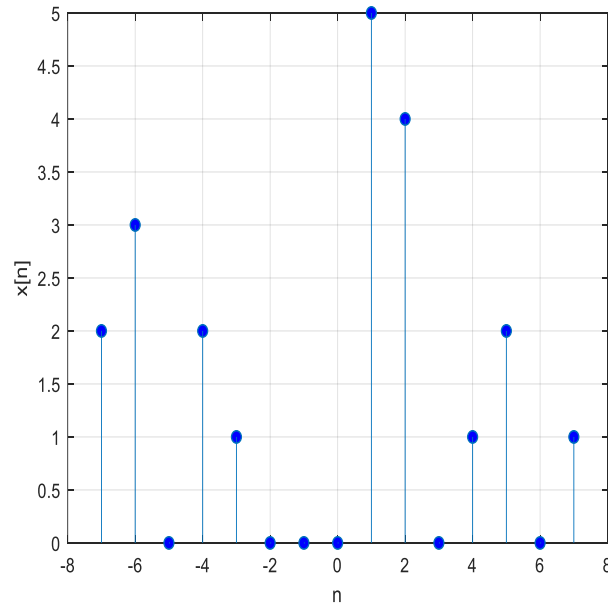


Figure 5.1 Représentation graphique

5.2 Signaux particuliers

5.2.1 L'impulsion unité: défini par

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \text{ et sa version décalée } \delta[n-k] = \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases} \quad (5.1)$$

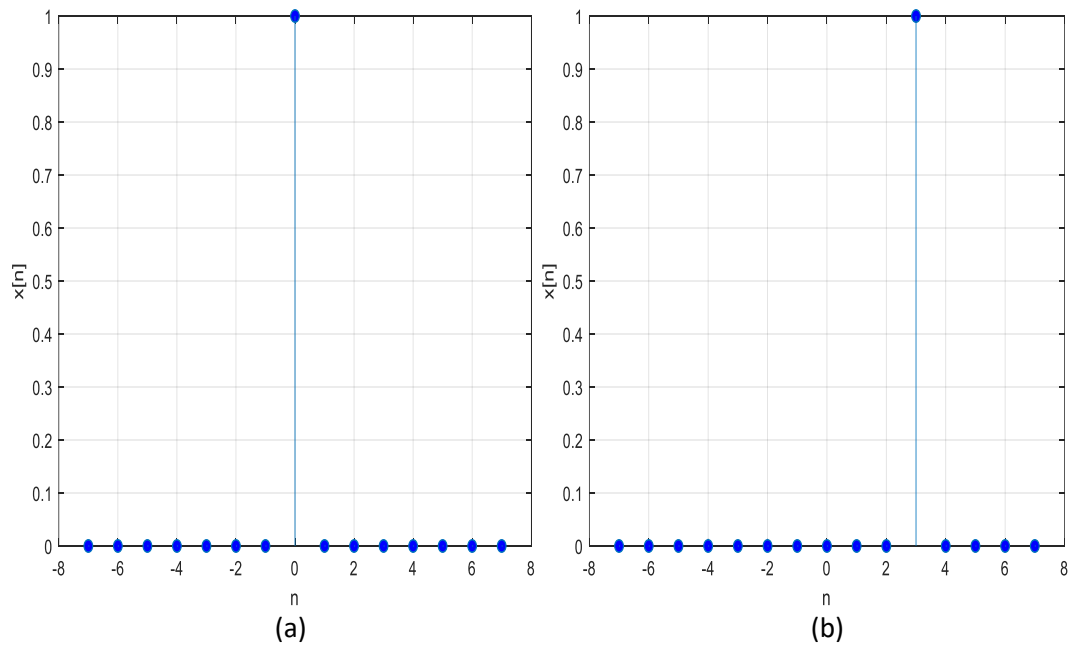


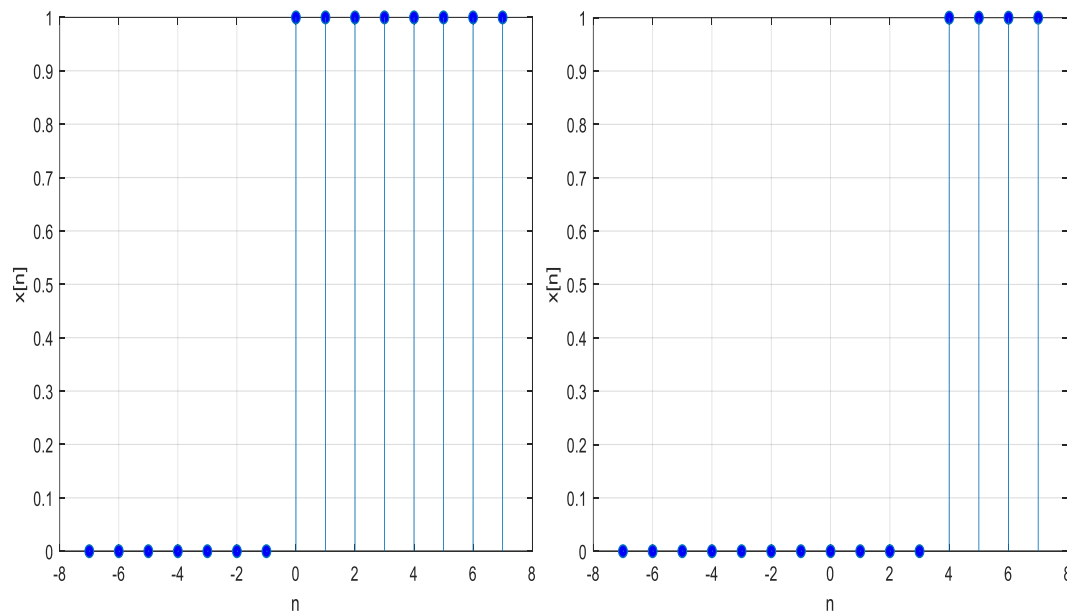
Figure 5.2 (a) Impulsion unité, (b) Impulsion unité décalée

Ce type de séquence est utilisé pour définir autre séquence. En effet, toute séquence peut être considéré comme une somme de $\delta[n-k]$ (impulsions décalées) et d'amplitude $x[k]$. La séquence est définie par l'expression suivante

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k].$$

5.2.2 Le saut unité: défini par

$$U[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \text{ et sa version décalée } U[n-k] = \begin{cases} 1, n \geq k \\ 0, n < k \end{cases} \quad (5.2)$$



- Le saut unité peut être défini par une somme d'une infinité d'impulsions unité décalées.

$$U[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \quad (5.3)$$

- L' $\delta[n]$ peut être décrite par la différence entre 2 sauts unités :

$$\delta[n] = U[n] - U[n-1] \quad (5.4)$$

5.2.3 L'exponentielle numérique: défini par

$$x[nT] = e^{-anT} \quad (5.5)$$

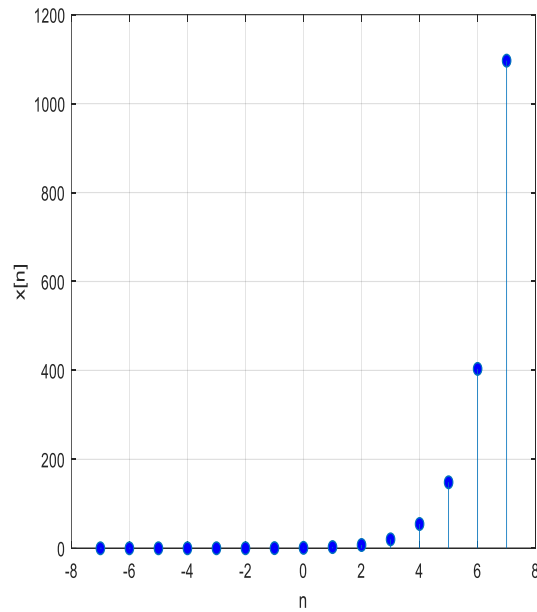


Figure 5.4 Exponentielle numérique

5.2.4 La rampe: défini par

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

5.2.5 La séquence sinusoïdale: défini par

$$x[n] = \cos(n\omega + \varphi), \omega = 2\pi f \quad (5.7)$$

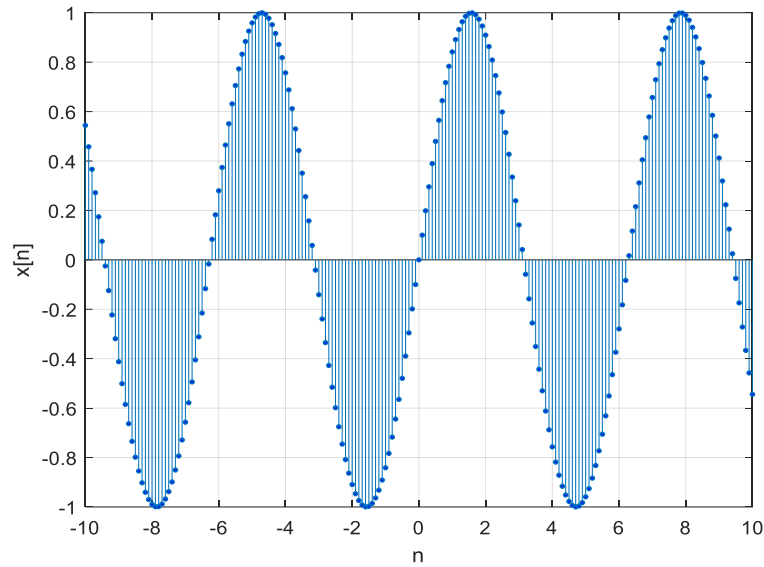


Figure 5.5 Séquence sinusoïdale

5.2.6 La séquence périodique: défini par

$$x[n] = x[n + N], N : \text{la période de la séquence.} \quad (5.8)$$

5.3 Energie et puissance

5.3.1 Energie

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (5.9)$$

Si l'énergie est finie, alors la séquence est à énergie finie.

5.3.2 Puissance

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (5.10)$$

Si $P < \infty$, alors la séquence est à puissance finie.

5.4 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Transformée de Fourier à temps discret (ou Transformée de Fourier d'un signal discret)

Le signal échantillonné : $x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$

Donc la transformée de Fourier à temps discret est définie par la relation suivante (la TF du signal échantillonné):

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{-2\pi jft} dt \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) e^{-2\pi jft} dt \\ X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si $z = e^{j2\pi f T_e}$, nous remarquons que $X(f) = X(z)$

Son inverse (TFTDI) est définie par :

$$x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(f) e^{+j2\pi nT_e f} df \quad (5.12)$$

5.4.1 Propriétés

La transformée de Fourier des signaux numériques possède les mêmes propriétés de la transformée en Z, compte tenu qu'elle est un cas particulier de cette dernière. Ce tableau résume les propriétés:

$\{x_n\}$	$X(f)$
$Ax_n + By_n$	$AX(f) + BY(f)$
x_{n-k}	$e^{-j2\pi fk} X(f)$
$e^{j2\pi f_0 n} x_n$	$X(f - f_0)$
$x_n * y_n$	$X(f)Y(f)$
$x_n \cdot y_n$	$X(f) * Y(f)$

5.4.2 Quelques transformation

Le tableau ci-dessous présente quelques transformées :

$\{x_n\}$	$X(f)$
δ_n	1
u_n	$\frac{1}{1-e^{j2\pi f}} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f+k)$
1	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f+k)$
$e^{j2\pi f_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-f_0+k)$
$\cos(2\pi f_0 n)$	$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta(f-f_0+k) + \delta(f+f_0+k))$
$\sin(2\pi f_0 n)$	$\frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta(f-f_0+k) - \delta(f+f_0+k))$
$a^n u_n; a < 1$	$\frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}$
$\frac{\sin 2\pi f_0 n}{\pi n}$	$rect_{2f_0}(f)$
$rect_{N+1}\left(n - \frac{N}{2}\right)$	$\frac{\sin(\pi f (N+1))}{\sin(\pi f)}$

5.5 Transformée de Fourier discrète (TFD) et son inverse (TFDI)

Le signal $x(n)$ est discret avec un nombre infini. Pratiquement en utilisant l'ordinateur et comme la capacité de l'ordinateur étant limitée, il faut limiter le nombre de points du $x(n)$, généralement on prendra un nombre de points correspondants à une période du signal $x(n)$ si le signal est périodique, sinon on prendra un nombre limité de $x(n)$.

Dans ce cas, on échantillonne la fréquence c-à-d on divise l'intervalle f_e par N , ainsi

$X(f)$ est échantillonné à la cadence (pas d'échantillonnage) $\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{NT_e}$

La Transformée de Fourier discrète (TFD) d'une suite de N termes (signal numérique) $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)\}$, la suite de N termes $X(k) = \{X(0), X(1), X(2), \dots, X(N-1)\}$ définie par:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi f n T_e}$$

$$f = k \frac{f_e}{N} \quad (5.13)$$

$$TFD[\{x(n)\}] = X\left(f = k \frac{f_e}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} = X(k)$$

La formule de la transformée inverse de Fourier discrète (TFDI) est donnée par

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{k=+N/2} X(k) e^{+j \frac{2\pi k n}{N}} \quad (5.14)$$

Si on pose $W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$ alors les équations (5.13) et (5.14) deviennent :

$$TFD[\{x(n)\}] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (W_N)^{kn} \quad (5.15)$$

$$TFI[\{X(k)\}] = x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot (W_N)^{-kn} \quad (5.16)$$

La relation donne les transformées de N degré, et par matrice nous avons :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}}_{X_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_N^{0,0} & W_N^{0,1} & W_N^{0,2} & \dots & W_N^{0,(N-1)} \\ W_N^{1,0} & W_N^{1,1} & W_N^{1,2} & \dots & W_N^{1,(N-1)} \\ W_N^{2,0} & W_N^{2,1} & W_N^{2,2} & \dots & W_N^{2,(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1),0} & W_N^{(N-1),1} & W_N^{(N-1),2} & \dots & W_N^{(N-1),(N-1)} \end{bmatrix}}_{W_N^{nk}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_{x_n} \quad (5.17)$$

Donc, la TFD est

$$X = W x \text{ ou } X(k) = W_N^{nk} x(n) \quad (5.18)$$

et la TFDI est

$$x = \frac{1}{N} W X \text{ ou } x(n) = \frac{1}{N} W_N^{-nk} X(k) \quad (5.19)$$

5.6 Propriétés de la transformé TFD

- **Linéarité :** $TFD [\{ax(n) + by(n)\}] = aTFD [\{x(n)\}] + bTFD [\{y(n)\}]$
- **Périodicité :** $X(k + N) = X(k)$
- **Retard et avancement (ou le décalage temporaire) :**

$$TFD [\{x(n-m)\}] = W_N^{(n-m)k} x(n-m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m) W_N^{(n-m)k}$$

Exemple 5.1

Soit le signal $x(n)=1$ pour $n=0$ et $n=3$ et 0 ailleurs.

1 TFD

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi jfnT_e} = 1 + e^{-6\pi jfT_e} = 2 \cos(3\pi fT_e) e^{-3\pi jfT_e}$$

2 TFD

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}, N : \text{nombre totale du points du signal}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\frac{j2\pi nk}{4}} = \begin{cases} X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^0 = 2 \\ X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\pi n/2} = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) e^{-\frac{3\pi j}{4}} \\ X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\pi n} = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) e^{-\frac{3\pi j}{4}} \\ X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-3j\pi n/2} = 2 \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) e^{-\frac{9\pi j}{4}} \end{cases}$$

5.7 Fenêtre de pondération (Fenêtrage)

Pour étudier un signal sur une durée finie, on le multiplie par une fenêtre d'observation (ou fenêtre de pondération ou d'apodisation) par exemple Fenêtre rectangulaire (la plus utilisée), Fenêtre triangulaire (de Bartlett), Fenêtre de Hanning, Fenêtre de Hamming, Fenêtre de Blackman et la fenêtrés de Kaiser.

❖ Fenetre de Bartlett :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T} \text{ si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ \frac{2(T-t)}{T} \text{ si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (5.20)$$

❖ Fenetre de Hanning :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \text{ si } t \in [0, T] \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (5.21)$$

❖ Fenetre de Hamming :

$$h(t) = \begin{cases} 0.45 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.22)$$

❖ Fenetre de Blackman :

$$h(t) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.23)$$

L'étude ce fait sur le signal tronqué $s_h(t) = s(t)h(t)$ au lieu de $s(t)$. L'étude dans le domaine fréquentiel est basée sur l'application de la TF. Donc on obtient un produit de convolution $S_h(f) = S(f) * H(f)$, où $H(f)$.

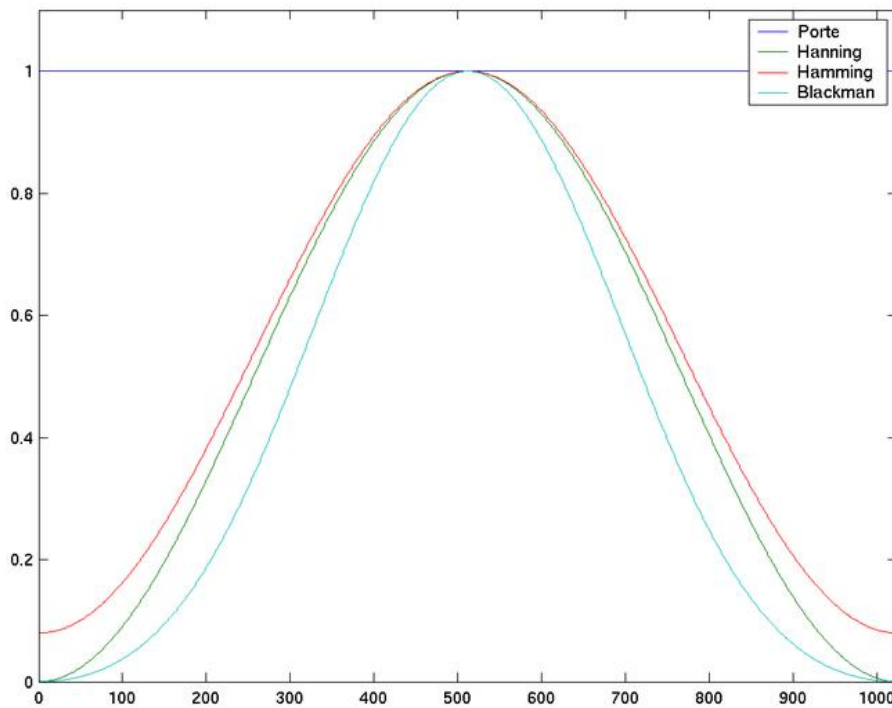


Figure 5.6 Fenêtres de pondérations

5.8 Technique du zero-padding

Le remplissage à zero est une technique généralement utilisé pour rendre la taille de la séquence d'entrée égale à une puissance de deux.

Exemple 5.2

Si vous avez dix échantillons d'un signal, vous pouvez a ajouter six zéro pour rendre le nombre total d'échantillons égal à $16(2^4)$ ou $32(2^5)$, qui est une puissance de deux.

Exemple 5.3

L'autocorrélation du signal, discret non périodisé, calculée à partir de sa définition aura $2N-1$ points. La *DSP* du signal discret périodisé calculée à partir de la définition sera N -périodique. La *TFD* inverse de cette *DSP* (théorème de Wiener-Kintchine) donne une autocorrélation N -périodique. La première autocorrélation (à $2N-1$ points) s'appelle l'autocorrélation linéaire. La deuxième autocorrélation (N périodique) s'appelle l'autocorrélation cyclique. Notre but est de calculer l'autocorrélation linéaire et par conséquent la *DSP* par la technique de la *TFD*. Autrement dit, on veut qu'une période de l'autocorrélation cyclique soit identique à l'autocorrélation linéaire. Cette dernière possédant généralement $2N-1$ points non nuls ne peut être tronquée. **Il faut donner augmenter le nombre de points du signal discret de N à au moins $2N-1$ points par l'ajout d'au moins $N-1$ zéros.**

5.9 Algorithmes rapides de la TFD (FFT)

La transformation de Fourier rapide (FFT ou fast Fourier transform) est un algorithme rapide de calcul de la transformation de Fourier discrète (TFD) proposé par James Cooley et John Tukey en 1965 (mais Gauss c'est déjà l'inventé en 1805).

L'algorithme FFT se base sur le principe **diviser pour régner** utilisant une récursivité. On subdivise une TFD de taille $N_1.N_2$ en deux TFD de tailles inférieurs N_1 et N_2 . Cet algorithme est couramment utilisé en analyse spectrale pour transformer des données discrètes du domaine temporel dans le domaine fréquentiel et en filtrage des signaux.

La TFD est donnée par :

$$TFD \left[\{x(n)\} \right] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (5.24)$$

avec $W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$

On peut écrire l'équation (5.20) sous la forme :

$$X_N(k) = W_N^{kn} x_N = W(N) x_N \quad (5.25)$$

Avec

$$x_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$$

$$X_N = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$$

$$W_N = \begin{bmatrix} W_N^{0,0} & W_N^{0,1} & W_N^{0,2} & \dots & W_N^{0,(N-1)} \\ W_N^{1,0} & W_N^{1,1} & W_N^{1,2} & & W_N^{1,(N-1)} \\ W_N^{2,0} & W_N^{2,1} & W_N^{2,2} & & W_N^{2,(N-1)} \\ \dots & & & \dots & \\ W_N^{(N-1),0} & W_N^{(N-1),1} & W_N^{(N-1),2} & & W_N^{(N-1),(N-1)} \end{bmatrix}$$

Sous l'hypothèse que N est pair le vecteur x_N peut se décomposer en deux sous vecteurs : L'un $x_{N/2}^p$ à indices paire et l'autre $x_{N/2}^i$ à indices impairs tous deux étant de dimension $N/2$.

$$x_{N/2}^p = [x(0), x(2), \dots, x(N-2)]^T$$

$$x_{N/2}^i = [x(1), x(3), \dots, x(N-1)]^T$$

Donc,

$$\begin{aligned} X_N(m) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(2n)W_N^{2mn} + x(2n+1)W_N^{2mn}W_N^{2m}] \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(2n)W_{N/2}^{mn} + x(2n+1)W_{N/2}^{mn}W_N^m] \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}
X_N(m) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(2n)e^{-j\frac{2\pi 2mn}{N}} + x(2n+1)e^{-j\frac{2\pi(2n+1)m}{N}} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(2n)e^{-j\frac{2\pi mn}{N/2}} + x(2n+1)e^{-j\frac{2\pi mn}{N/2}} e^{-j\frac{2\pi nm}{N}} \right] e^{-j\frac{2\pi mn}{N/2}} = W_{N/2}^{nm} e^{-j\frac{2\pi nm}{N}} = W_N^{nm} \\
\Rightarrow X_N(m) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(2n)W_{N/2}^{nm} + x(2n+1)W_{N/2}^{nm}W_N^{nm} \right]
\end{aligned}$$

Pour $m = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$ on peut écrire $X_N(m)$ sous forme matricielle :

$$X_N = \begin{bmatrix} W(N/2) & \Delta_N W(N/2) \\ W(N/2) & \Delta_N W(N/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N/2}^p \\ x_{N/2}^i \end{bmatrix}$$

Avec

$$W(N/2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_{N/2}^{1,1} & W_{N/2}^{1,2} & & W_{N/2}^{1,(N/2-1)} \\ 1 & W_{N/2}^{2,1} & W_{N/2}^{2,2} & & W_{N/2}^{2,(N/2-1)} \\ \dots & & & \dots & \\ 1 & W_{N/2}^{(N/2-1),1} & W_{N/2}^{(N/2-1),2} & & W_{N/2}^{(N/2-1),(N/2-1)} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & W_N & & 0 \\ 0 & 0 & W_N^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & W_N^{(N/2-1)} \end{bmatrix}$$

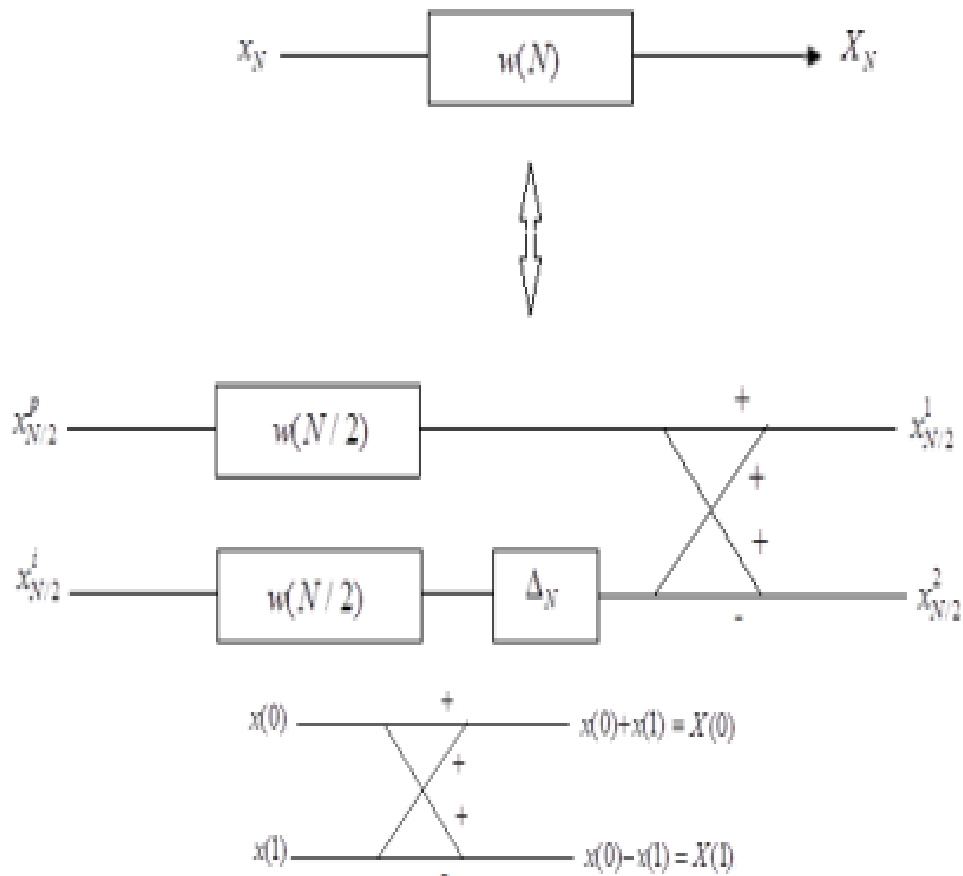


Figure 5.7 Transformation de Fourier rapide

Exemple 5.4

Un processeur FFT est utilisé pour l'analyse spectrale d'un signal. Le nombre de points doit être une puissance entière de 2. Résolution fréquentielle: $\Delta f \leq 0.5\text{Hz}$; f_{\max} du signal : 250Hz .

1. Déterminer la durée minimale du signal.
2. Déterminer le nombre minimum de points.

Solution 5.4

1. On appelle D la durée du signal, donc $\Delta f = \frac{1}{D}$; $\frac{1}{D} \leq 0.5\text{Hz} \Rightarrow D \geq 2\text{sec}$
2. N : ?

$$D \geq 2 \rightarrow NT \geq 2 \rightarrow N \geq \frac{2}{T}$$

$$D \text{ 'après shannon : } f_e \geq 2f_{\max} \rightarrow \frac{1}{T} \geq 2 \times 250$$

$$\rightarrow T \leq 2.10^{-3} \text{ sec}$$

$$\text{donc } N \geq 10^3 = 1024 = 2^{10}$$

5.10 Transformée en Z (TZ)

La TZ est l'équivalent discret de la transformation de Laplace, permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aides d'une fonction de transfert $H(z)$.

La TZ de la séquence $x[n]$ est donnée par

$$X(z) = TZ[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]Z^{-n} \quad (5.26)$$

Cette équation est la transformée en Z bilatérale. Pour les séquences causal, on utilise la transformée en Z unilatérale

$$X(z) = TZ[x[n]] = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]Z^{-n} \quad (5.27)$$

Tableau 5.1

$x[n], n \geq 0$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
U(n)	$\frac{z}{z-1}$
N	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\cos(n\omega_0)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$
$\sin(n\omega_0)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$

5.10.1 Propriétés de la Transformée en Z

- **Linéarité**

$$TZ \{ \alpha f_1(n) + \beta f_2(n) \} = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

- **Décalage temporel**

$$TZ \{ x(n + \alpha) \} = Z^\alpha X(Z)$$

- **Retard temporel**

$$TZ \{ x(n - \alpha) \} = Z^{-\alpha} X(Z)$$

- **Changement d'échelle**

$$TZ \{ a^\alpha x(n) \} = x \left(\frac{Z}{a} \right) X(Z)$$

- **Dérivation**

$$TZ \{ n^k x(n) \} = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^k X(Z)$$

- **Produit de convolution**

$$TZ \{ x(n) \otimes y(n) \} = X(Z) \times Y(Z)$$

- **Théorème de la valeur initiale**

$$x[0] = \lim_{Z \rightarrow 0} X(Z)$$

- **Théorème de la valeur initiale**

$$x[\infty] = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) X(Z)$$

Exemple 5.3

Calculer la TZ du signal $x(n) = \text{rect}_N(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \\ &= 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots + 1z^{-(N-1)} \\ &= (z^{-1})^0 + (z^{-1})^1 + (z^{-1})^2 + (z^{-1})^3 + \dots + (z^{-1})^{(N-1)} \end{aligned}$$

$$\text{si } |z^{-1}| < 1 \rightarrow X(z) = 1 \cdot \frac{1 - (z^{-1})^N}{1 - z^{-1}}$$

5.10.2 Transformée inverse de la Transformée en Z

(a) Méthode indirects

(a).1 Division polynomiale

C'est le principe de la division de deux polynômes pour avoir un polynôme en z^{-k} .

(a).2 Développement en fractions rationnelles

$F(z)$ peut être présenté sous forme de puissance en Z.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{C_0 z^1 + C_1 z^{1-l} + C_2 z^{2-l} + \dots + C_l z^0}{\prod_{m=1}^n (z - z_m)} \quad (5.28)$$

z_m : les pôles de $F(z)$

La TZ⁻¹ de $F(z)$ dépend de la nature des pôles de $F(z)$.

1^{er} cas : pôles simple

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + \frac{A_k}{z - z_k} \text{ avec } z_k : \text{pôles de } F(z) \quad (5.29)$$

Les coefficients A_k sont déterminés par la méthode des résidus

$$A_k = (z - z_k) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=z_k} \Rightarrow y(n) = \sum_k A_k (z_k)^n \quad (5.30)$$

2^{ème} cas : pôles multiples

$$F(z) = \sum_k \frac{C_k}{(z - z_i)^s} \text{ et } C_k = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{ds^{s-1}} (z - z_i)^s F(z) z^{n-1} \right] \Bigg|_{z=z_i}$$

z_i : Pôles multiples et s : ordre des pôles multiples

(b) Méthode directs: Intégration directe par les résidus

La transformée en Z inverse est donnée par

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{(c)} F(z) z^{n-1} dz \quad (5.31)$$

(c) est un contour fermé appartenant au domaine de convergence. Le théorème des résidus permet d'écrire :

$$f(n) = \sum \left[\text{résidus de } F(z) z^{n-1} \text{ aux poles intérieurs à (c)} \right] \Bigg|_{z=z_i} \quad (5.32)$$

$$F(z) z^{n-1} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^s} : z_0 \text{ est un pole d'ordre } s \text{ de } F(z) z^{n-1}$$

- Si z_0 est un pole multiple d'ordre s de $F(z) z^{n-1}$

$$\text{Res} \left[F(z) z^{n-1} \right] \Bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{ds^{s-1}} \varphi(z) \right] \Bigg|_{z=z_0} \quad (5.33)$$

- Si $s=1$ (pole simple) $F(z) z^{n-1} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)}$

$$\text{Res} \left[F(z) z^{n-1} \right] \Bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{ds^{s-1}} \varphi(z) \right] \Bigg|_{z=z_0} \quad (5.34)$$

5.11 Equations aux différences

Chaque système vérifié une équation appelé équation aux différences (EAD) (ou équations de récurrence) qui relie l'entrée à la sortie du système.

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad a, b \in \Re \text{ et } a_0 = 1 \quad (5.35)$$

Les coefficients a_k et b_k sont les coefficients du système. N est l'ordre du système. Le système est réalisable si $N \geq M$. On utilise plus fréquemment l'écriture suivante :

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (5.36)$$

Exemple 5.4

- Déterminer l'équation aux récurrences sachant que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.3484z^2 - 0.104z - 0.243}{z^3 - 2.086z^2 + 1.537z - 0.3329}$$

$$Y(z) = 2.086z^{-1}Y(z) - 1.537z^{-2}Y(z) + 0.3329z^{-3}Y(z) +$$

$$0.3484z^{-1}X(z) - 0.104z^{-2}X(z) - 0.243z^{-3}X(z)$$

donc $y(n) = 2.086y(n-1) - 1.537y(n-2) + 0.3329y(n-3) +$

$$+ 0.3484x(n-1) - 0.104x(n-2) - 0.243x(n-3)$$

5.11.1 Fonction de transfert

$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z)$; $y[n] \xrightarrow{TZ} Y(z)$ et $h[n] \xrightarrow{TZ} H(z)$

$y[n] = x[n] \otimes h[n] \xrightarrow{TZ} Y(z) = X(z)H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.37)$$

La fonction de transfert d'un système d'ordre N est donné par :

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \xrightarrow{TZ}$$

$$Y(z) + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (5.38)$$

k: ordre du système

$$y(n) = ay(n-1) + x(n), a \neq 1$$

pour un système d'ordre 1 : $\xrightarrow{TZ} Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

5.11.2 Stabilité

Pour qu'un système d'ordre N de fonction de transfert $H(z)$ soit stable, si les racines de l'équation caractéristique sont dans le cercle unité.

$$1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = 0 \quad (5.39)$$

5.11.3 Réponse fréquentielle du système

$$H(f) = H(e^{j\omega}) = H(z = e^{j\omega})$$

$$H(f) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (5.40)$$

Pour un système d'ordre 1 :

$$H(z = e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$H(z = e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - a \cos \omega) + aj \sin \omega}$$

$$|H(z = e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{1}{1 - a \cos \omega} \right)$$

5.11.4 Réponse temporelle du système

5.11.4.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est déterminée par un calcul de la transformée en Z inverse (TZ^{-1}) du $H(z)$.

$$x[n] = \delta(n) \xrightarrow{TZ} X(z) = 1$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot 1$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - a}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - a} \xrightarrow{TZ^{-1}} y(n) = a^n U(n) \quad (5.41)$$

5.11.4.2 Réponse indicielle

La réponse indicielle est déterminée par un calcul de la transformée en Z inverse (TZ^{-1}) du $H(z)$.

$$x[n] = U(n) \xrightarrow{TZ} X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-1)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-1}$$

$$A = \left. \frac{Y(z)}{z} (z-a) \right|_{z=a} = \frac{a}{a-1}$$

$$B = \left. \frac{Y(z)}{z} (z-1) \right|_{z=1} = \frac{1}{a-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{a}{(a-1)(z-a)} + \frac{1}{(1-a)(z-1)}$$

$$Y(z) = \frac{-az}{(1-a)(z-a)} + \frac{z}{(1-a)(z-1)}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-a} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a} \right]$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-a} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a} \right] \quad (5.42)$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} y(n) = \frac{1}{1-a} [1 - a^{n+1}] U(n) \quad (5.43)$$

5.11.4.3 Réponse à entrée quelconque

De la même manière, pour une entrée quelconque $x[n]$ on peut déterminer la réponse du système par un calcul de la transformée en Z inverse.

Remarque :

- Si $h(n)$ est de durée finie, alors le système est dit à réponse impulsionnelle finie (système RIF) (système non récursif : aucun bouclage de la sortie).

- Si $h(n)$ est de durée infini, alors le système est dit à réponse impulsionnelle infinie (système RII) (système récursif : bouclage de la sortie sur l'entrée).

5.12 Introduction au filtrage numérique

Un filtre numérique effectue plusieurs modifications en atténuant ou éliminant certaines parties spectrales indésirables du signal discret. Les principaux inconvénients de ces filtres sont le coût et la vitesse. Exemple sur les filtres numériques: les circuits intégrés, les processeurs programmables, etc.

5.12.1 Equation temporelle

Un filtre numérique peut être défini par une équation aux différences d'ordre N sous la forme suivante:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \quad (5.44)$$

5.12.2 Fonction de transfert

Cette fonction d'ordre N est donnée par la forme suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (5.45)$$

5.12.3 Classification

La classification se fait selon la durée de la réponse impulsionnelle :

- Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)
- Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII).

5.12.3.1 Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Le filtre RIF est un filtre numérique linéaire non récursif caractérisé par une réponse impulsionnelle (sortie du filtre) stable et de durée finie qui dépend du nombre de coefficients du filtre et de l'entrée du signal. L'élément de gain, l'élément de sommation et le retard unitaire sont les éléments de réalisation de ce filtre.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5.46)$$

Avec :

$x(k)$ $1 \leq k \leq n$: Les valeurs du signal d'entrée

$y(k)$ $1 \leq k \leq n$: Les valeurs du signal de sortie

Sa réponse impulsionnelle est égale aux coefficients de l'équation de récurrence.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) x(n-k) \quad (5.47)$$

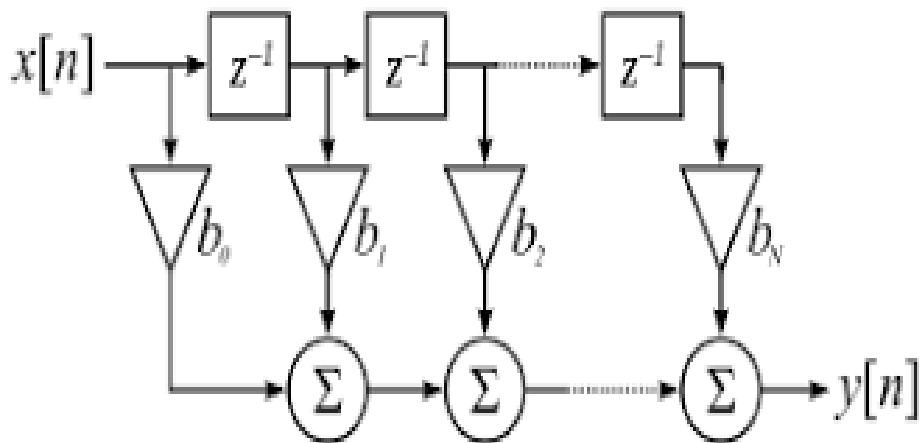


Figure 5.8 Les filtres RIF

Remarque :

- Les filtres RIF sont stables. Sa fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$
- Un filtre RIF est moins compliqué qu'un filtre RII du même ordre
- Les filtres RIF sont moins sensibles aux erreurs de quantification.
- Un filtre RIF est moins sélectif qu'un filtre RII du même ordre
- Un filtre RIF est entièrement déterminé si l'on connaît l'ensemble de ses coefficients.
-

5.12.3.2 Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Un filtre RII est un filtre numérique linéaire récursif caractérisé par une réponse impulsionnelle (sortie du filtre) de durée infinie qui dépend du nombre de coefficients du filtre et de l'entrée du signal. Les filtres analogiques peuvent être considérés comme des filtres RII.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) \quad (5.48)$$

Avec :

$x(k)$: les valeurs du signal d'entrée

$y(k)$: les valeurs du signal de sortie.

La fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad a_0 = 1 \quad (5.49)$$

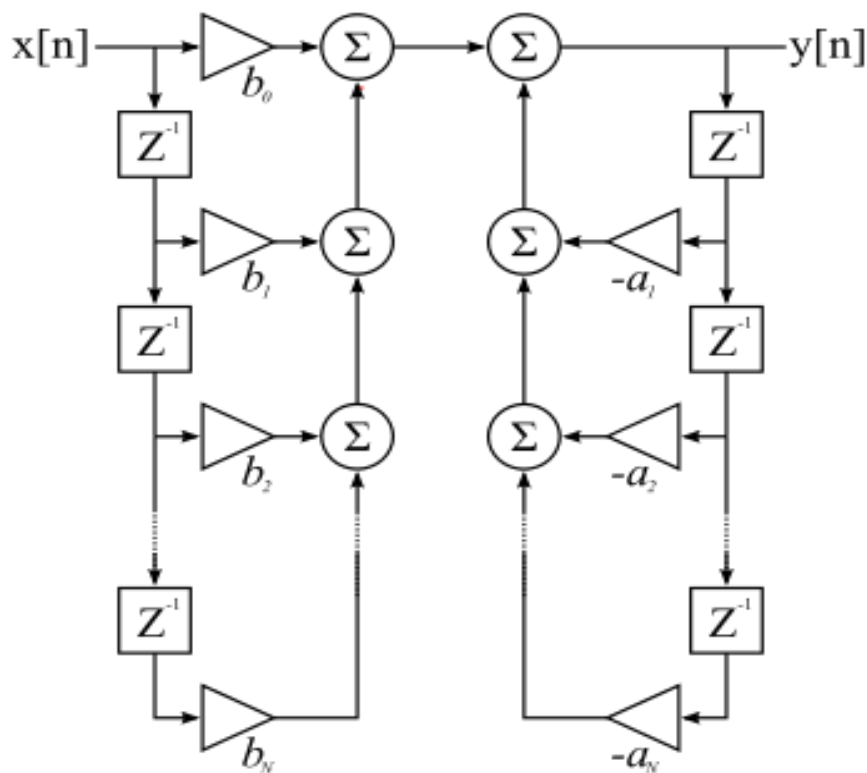


Figure 5.9 Les filtres RII

Remarque :

- Les filtres RII ne sont pas forcément stables.
- Un filtre RII est plus compliqué qu'un filtre RIF du même ordre. Les filtres
- Les filtres RII sont plus sensibles aux erreurs de quantification.
- Un filtre RII est plus sélectif qu'un filtre RIF du même ordre

5.13 Exercices à résoudre

1. Trouver la transformée en Z du signal

$$x_1(n) = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}; \quad x_2(n) = a^n, a > 0; \quad x_3(n) = \delta(n); \quad x_4(n) = \sin n\theta;$$

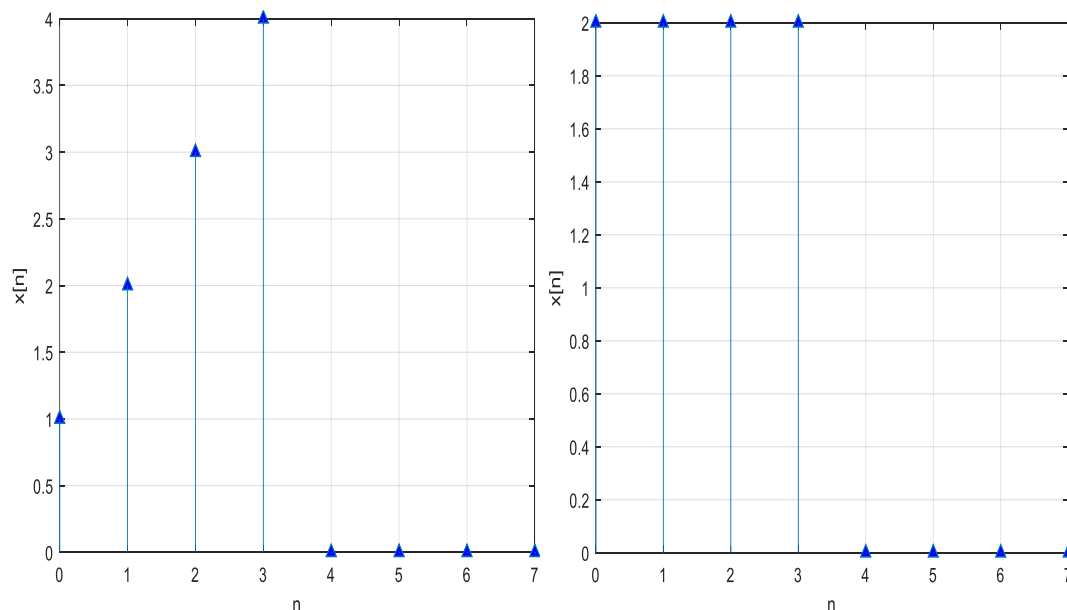
2. Trouver la transformée en Z inverse du signal

$$X_1(Z) = \frac{0.3z}{(z-1)(z-0.7)}; \quad X_2(Z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

3. Déterminer $x(n)$ du $X(Z) = \frac{z^4}{(z-1)(z-0.5)^3}$

4. Soit le signal discret $x(n)$ et $h(n)$ de la figure ci-dessous

- 4.1 Calculer les TFD de $x(n)$ et de $h(n)$
- 4.2 Calculer la convolution $x(n)*h(n)$
- 4.3 Obtenir la TFD de $x(n)*h(n)$
- 4.4 Comparer TFD $[x(n)*h(n)]$ avec $DFT[x(n)].DFT[h(n)]$
- 4.5 Calculer les puissances de $x(n)$ et de $y(n)=x(n)*h(n)$ à partir des échantillons temporels et de la DSP.



5. Soit le signal discret $x(n)$ tel que : $x(0)=1$, $x(1)=2$, $x(2)=3$, $x(3)=4$. Montrer que $\text{DSP}[\text{TFD}[x(n)]]$ donne la TFD de l'autocorrélation cyclique.

PLAN DU COURS

INFORMATIONS GENERALES

Semestre: 5

Unité d'enseignement: **UEF 3.1.1**

VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30) * 15 Semaines

Crédits: 4

Coefficient: 2

Enseignant : HABCHI Yassine

Grade : Maitre de Conférences Classe A

E-mail : habchi.jjl@gmail.com, habchi@cuniv-naama.dz**MODALITES D'EVALUATION**

L'évaluation de l'étudiant se fait par :

- 1) Examen de fin de semestre (1.5 heures) et celui du rattrapage (1.5 heures)
- 2) Contrôles continus

Travaux dirigé 40%			Examen final 60 %
Assiduité	Participation	Teste	
5pts	5pts	10pts	20pts

OBJECTIF

Familiariser l'étudiant avec les techniques de traitement numérique du signal comme l'analyse spectrale et le filtrage numérique.

DEROULEMENT DU COURS

Chapitre	Chapitre1	Chapitre2	Chapitre3	Chapitre4	Chapitre5
Temps consacré	1 semaine	4 semaines	3 semaines	3 semaines	4 semaines

REFERENCES

Livres, photocopiés, sites internet, etc

-
- [1] **S. Haykin**, Signals and systems, John Wiley & sons edition, 2 ed edit, 2003.
- [2] **A.V. Oppenheim**, Signals and systems, Prentice–Hall edition, 2004.
- [3] **J. Max**, Méthodes et techniques de traitement du signal, Dunod, 2004.
- [4] **F. de Coulon**, Traité d'Electricité - Theorie et Traitement des signaux - 3rd Ed Press polytechnique 1996.
- [5] **P. Schweitzer**, Analyse et traitement des signaux Méthodes et applications, Dunod, 2008.
- [6] **F. Cottet**, Aide-mémoire Traitement du Signal. 2005.
- [7] **C. Pascal**, Automatique, Systèmes linéaires et continus. 1998.
- [8] **M. J. Roberts**, Signals and Systems, Analysis Using Transform Methods and MATLAB, no. 1. 2007.
- [9] **M. Bellanger**, Traitement numérique du signal, 6e édition, Dunod, 1998.
- [10] **F. Cottet**, Traitement des signaux et acquisition de données, Dunod, 1997.
- [11] **F. De Coulon**, Théorie et Traitement des signaux, Dunod, 1984,
- [12] **C. Gasquet et P. Witomski**, Analyse de Fourier et applications, Masson, 1997.
- [13] **F. Manneville et J. Esquieu**, Théorie du signal et composants, 2e édition, Dunod, 2000.
- [14] **J. Max et J.L. Lacoime**, Méthode et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, 5e édition, Dunod, 2000.
- [15] **B. Picinbono**, Théorie de signaux et des systèmes, Dunod, 1989.
- [16] **H. Reinhard**, Cours de mathématiques du signal, Dunod, 1986.
- [17] **M. Benidir**, Théorie et traitement du signal, volume 1 : représentation des signaux et systèmes. Dunod, 2000.
- [18] **G. Binet**, Traitement numérique du signal : signaux et systèmes discrets, Ellipses, 2013.
- [19] **J.M. Bony**, cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier, Ellipses, 2006.
- [20] **F. De Coulon**, Théorie et traitement des signaux, volume 6, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.
- [21] **D. Ghorbanzadeh et al**, Mathématiques su signal, Dunod, 2008.
- [22] **A. V Oppenheim and A.S. Willsky**, Signals and Systems, Pearson, 2013.
- [23] **A. Papoulis**, Signal Analysis, McGraw Hill Inc, 1977.

- [24] **H. Reinhard**, Eléments de mathématiques du signal, Dunod, 2002.
- [25] **P.Struillou**, Analyse de Fourier : théorie et applications pour l'ingénieur et le physicien, Ellipses, 2012.
- [26] **Y.Thomas**, Signaux et systèmes linéaire, Masson, 1997.
- [27] **F.Auger**, Introduction à la théorie du signal et de l'information, TECHNIP, Sciences et technologies, 1999.
- [28] **M.Benidir**, Théorie et traitement du signal Tome 2 Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal, DUNOD, Sciences Sup, 2004.
- [29] **Y.Duroc**, L'essentiel en théorie et traitement du signal Traitement du signal - Signaux déterministes et aléatoires, continus et discrets, ELLIPSES, 2011.
- [30] Y Champoux, Analyse fréquentielle et traitement de signal, POLYTECHNIQUE MONTREAL, 2019.
- [31] <https://xcotton.pagesperso-orange.fr/electron/coursetdocs.htm>