

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique



Centre universitaire Salhi Ahmed -Naàma  
Institut des Sciences et technologies  
Département de Mathématiques et Informatique

## *Mémoire de fin d'étude*

Pour obtenir le diplôme de  
Master en Mathématiques

**Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs**

**Filière : Mathématiques**

## **Thème**

---

**Étude de quelques équations elliptiques de type  
Kirchhoff**

---

Présenté par :  
*Sattaf Mebarka*

Soutenu le :10/07/2019

Devant le jury composé de :

**Encadreur :** *M<sup>r</sup> Khaldi Brahim* MCB C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-.

**Président :** *M<sup>r</sup> Bendoukha Berrabah* Pr. C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-.

**Examineur :** *M<sup>r</sup> Mekki Slimane* MAA C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-.

Année universitaire 2018/2019

# *Remerciements*

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté pour terminer ce travail.

Je tiens à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, Monsieur **Khaldi Brahim**, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercie Monsieur le Professeur **Bendoukha Berrabah** pour avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur **Mekki Slimane**, d'avoir accepté de se joindre à ce jury comme examinateur.

Il est important pour moi de remercier ma famille :

mes parents, ma soeurs, mes frères qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants de centre université de naàma.

Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

Enfin je remercie toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# *Dédicaces*

## **Je dédie ce modeste travail**

A mes très chers parents.

A ma chère grand mère : Baya rahimaha Allahe.

A ma soeur : Ahlam.

A mes chers frères : Mohammed, Abdelkader et Rayane.

A toute ma famille.

A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.

A tous mes enseignants.

A tout ceux qui m'a aidé et encouragé pour finir ce travail.

# *Résumé*

Dans ce mémoire, nous focalisons notre attention essentiellement sur l'étude de problèmes elliptiques de type Kirchhoff de la forme suivante :

$$\begin{cases} -M \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En premier lieu on étudie l'existence d'une solution positive de ce problème quand la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz est satisfaite.

En second lieu notre étude domine sur l'existence d'une solution positive où la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz n'est pas satisfaite.

Pour prouver ces résultats en utilisant un argument variationnel (théorème du col) et la technique de troncature.

**Mots Clés :** Problème elliptiques de type Kirchhoff, la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz, théorème du col, solution positive, la technique de troncature.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Notations et résultats préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Notations . . . . .	5
1.2 Espaces fonctionnels . . . . .	6
1.2.1 Espaces de Lebesgue . . . . .	6
1.2.2 Espaces de Sobolev . . . . .	7
1.3 Injections de Sobolev . . . . .	9
1.4 Quelques définitions et théorèmes . . . . .	10
1.4.1 Convergence forte et Convergence faible . . . . .	10
1.4.2 Principes de maximum . . . . .	10
1.4.3 Théorème de la moyenne . . . . .	10
1.5 Problème aux valeurs propres . . . . .	11
1.5.1 Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien . . . . .	11
1.6 Méthode variationnelle . . . . .	12
1.6.1 Formulation variationnelle . . . . .	12
1.6.2 Condition de Palais-Smale . . . . .	13
1.6.3 Théorème du col . . . . .	14
<b>2 Résultat d'existence pour un problème elliptique de type Kirchhoff avec la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.2 La fonction M est décroissante . . . . .	17
2.2.1 Résultat d'existence . . . . .	17
2.2.2 Preuve du Théorème 12 . . . . .	18
2.3 La fonction M est bornée et croissante . . . . .	22
2.3.1 Résultat d'existence . . . . .	23
2.3.2 Preuve du Théorème 13 . . . . .	23
2.4 la fonction M est croissante . . . . .	26
2.4.1 Résultat d'existence . . . . .	26
2.4.2 Preuve du Théorème 14. . . . .	29

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>3</b>	<b>Sur une équation elliptique de type Kirchhoff sans condition d'Ambrosetti-Rabinowitz</b>	<b>30</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	La fonction $M$ est bornée . . . . .	32
3.2.1	Résultat d'existence et non existence . . . . .	32
3.2.2	Preuve du Théorème 15 . . . . .	34
3.3	La fonction $M$ est croissante . . . . .	40
3.3.1	Résultat d'existence . . . . .	40
3.3.2	Preuve du Théorème 16 . . . . .	42
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

---

# Introduction

Les découvertes des savants de l'époque moderne sont à l'origine de nos connaissances en acoustique. Ainsi, Brook Taylor a établi les équations des courbes de vibration des cordes. Ses recherches furent complétées par celles de Jean d'Alembert, ce dernier s'intéressa aux petites vibrations et leur forme en général. Il déduit du principe fondamental de la dynamique une équation aux dérivées partielles satisfaite par le déplacement vertical de la corde. De nos jours, elle est connue sous le nom d'équation des ondes.

D'Alembert résolut cette équation et montra que toute solution est la somme de deux ondes progressives, de son côté Daniel Bernoulli montra également qu'une corde en vibration produit simultanément une multitude d'oscillations élémentaires dont la somme donne le son résultant, c'est le principe de superposition.

Les études des vibrations des corps solides ne purent se développer que avec la mise au point de la théorie mathématique des vibrations élastiques entreprise par Robert Hooke entre 1660 et 1676.

En 1876, Kirchhoff [13] proposa ce type de problèmes comme étant une généralisation aux cordes vibrantes de l'équation classique des ondes de D'Alembert. Le modèle initialement étudié fût,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left\{ p_0 + p_1 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (K)$$

où  $p_0$  dépend de la tension initiale,  $p_1$  est une caractéristique du matériau du fil,  $u(x, t)$  dénote le déplacement vertical du point  $x$  du fil à l'instant  $t$ . De tels problèmes sont souvent appelés non locaux car l'équation contient une intégrale sur  $\Omega$ .

Après le fameux article de Lions [14], ce type de problèmes a attiré l'attention de plusieurs auteurs et depuis des dizaines d'articles sont tombés. On peut citer en particulier les travaux de Chipot [6], [7]. Corrêa et al. [11] et leurs références.

Dans [11], et en se basant sur la méthode de Galerkin, les auteurs montrent l'existence

---

de solutions positives dans le cas sous-linéaire.

$$f(u) = u^\alpha, 0 < \alpha < 1.$$

Le but de ce mémoire, basé essentiellement sur les articles [1] et [3], on s'intéresse à l'équation stationnaire associée à (K).

Ce mémoire comporte trois chapitres :

**Chapitre 1** : on rappelle quelques outils de base de l'analyse fonctionnelle et quelques éléments de base de la théorie des points critiques, des théorèmes fondamentaux, et nous citons quelques définitions et résultats connus utilisés dans ce mémoire.

**Chapitre 2** : on va étudier l'existence de la solution de problème du type Kirchhoff dans le cas où la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz est satisfaite et on utilise le théorème du col pour montrer l'existence de solutions.

**Chapitre 3** : on va étudier l'existence et la non existence du problème du type Kirchhoff sans condition d'Ambrosetti-Rabinowitz.

---

# Notations et résultats préliminaires

## 1.1 Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

Symbole	Signification
$\Omega$	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ .
$\partial\Omega$	Le bord de $\Omega$ .
$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$	Élément de $\mathbb{R}^N$ .
$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_N)$	Mesure de Lebesgue sur $\Omega$ .
$\Delta u$	Laplacien de la fonction $u$ .
$\nabla u$	Gradient de $u$ .
$u^+$	Partie positive de la fonction $u$ , $u^+ = \max(u; 0)$ .
$u^-$	Partie négative de la fonction $u$ , $u^- = \max(-u; 0)$ .
$u_n \rightarrow u$	Convergence forte de $u_n$ vers $u$ .
$u_n \rightharpoonup u$	Convergence faible de $u_n$ vers $u$ .
$ u _p$	La norme de l'espace $L^p(\Omega)$ , $1 \leq p \leq \infty$ .
$\ u\ $	La norme de l'espace $H_0^1(\Omega)$ .
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	Exposant critique de Sobolev.
$p'$	Exposant conjugué de $p$ .i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec $(1 \leq p < \infty)$ .
$E'$	Espace dual de $E$ .
p.p	Presque partout.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E, E'}$	Crochet de dualité entre $E$ et son dual.
$(\cdot, \cdot)$	Le produit scalaire
$o(1)$	Désigne toute quantité qui tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini.
$\lambda_1$	La première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ .

# 1.2 Espaces fonctionnels

## 1.2.1 Espaces de Lebesgue

**Définition 1.2.1.** [4]

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert, et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ .

- L'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  est défini par :

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

L'espace  $L^p(\Omega)$  muni de la norme

$$|u|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- L'espace de Lebesgue  $L^\infty(\Omega)$  est défini par :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mesurable, } \exists C \geq 0 \text{ telque } |u(x)| \leq C \text{ } \mu\text{-p.p. sur } \Omega\}.$$

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  muni de la norme

$$|u|_\infty = \inf\{C, |u(x)| \leq C \text{ } \mu\text{-p.p. sur } \Omega\}.$$

**Remarque 1.2.1.** Si  $u \in L^\infty(\Omega)$  on a

$$|u(x)| \leq |u|_\infty \quad \mu\text{-p.p. sur } \Omega.$$

**Théorème 1.** [4] Soient  $(u_n)$  une suite de  $L^p(\Omega)$  et  $u \in L^p(\Omega)$  tels que,

$$|u_n - u|_p \rightarrow 0.$$

Alors il existe une sous suite  $(u_{n_k})$  tel que :

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x) \quad \mu\text{-p.p. sur } \Omega.$$

**Lemme 1. (Lemme de Fatou)** [4] Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$  telle que

1. pour chaque  $n$ ,  $(f_n(x)) \geq 0$   $\mu\text{-p.p. sur } \Omega$ .

2.  $\sup_n \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty$ .

## 1.2 Espaces fonctionnels

---

3. pour chaque  $x \in \Omega$ , on pose  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Proposition 1.2.1. (Inégalité de Hölder)** [4] Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

Alors

$$f.g \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq |f|_p |g|_{p'}.$$

### 1.2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert,  $p \in \mathbb{R}$  et  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 1.2.2.** [4]

L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que :} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right\}$$

On note  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ .

**Théorème 2.** [4] L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |u|_p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p.$$

$W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ . Il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$  et separable pour  $1 \leq p < \infty$ .

On pose  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ .

- Il est clair que l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

## 1.2 Espaces fonctionnels

---

**Définition 1.2.3.** [4]  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

- L'espace  $H_0^1(\Omega)$  peut-être défini comme suit

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On note  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ .

**Proposition 1.2.2. (Inégalité de Poincaré)**[4]

L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné, alors il existe  $C > 0$  (dépendant de  $\Omega$ ) telle que

$$|u|_2 \leq C|\nabla u|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Une conséquence très importante de cette inégalité est que

$$\|u\| = |\nabla u|_2,$$

est une norme pour  $H_0^1(\Omega)$ .

L'expression  $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$  est un produit scalaire qui induit la norme  $|\nabla u|_2$  équivalent à la norme  $\|u\|$ .

**Définition 1.2.4.** Soit  $B_1, B_2$  deux espaces de Banach, on dit que  $B_1$  s'injecte d'une façon continue dans  $B_2$  si

- $B_1 \subset B_2$ ,
- Si l'application identité  $i : B_1 \rightarrow B_2$  est continue i.e  $\|v\|_{B_2} \leq C\|v\|_{B_1}$ .

et on dit que  $B_1$  s'injecte d'une façon compacte dans  $B_2$ , si l'image de tout borné de  $B_1$  est relativement compact dans  $B_2$ .

**Définition 1.2.5.** [4] On désigne par  $W_0^{-1,p'}(\Omega)$  l'espace dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ )

On note par  $H^{-1}(\Omega)$  le dual de  $H_0^1(\Omega)$ .

Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut identifier  $L^2(\Omega)$  et son dual. Par conséquent, on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

avec injections continues.

### 1.3 Injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

**Théorème 3.** [4] Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . On a

- si  $p < N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ,
- si  $p = N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [p; +\infty[$ ,
- si  $p > N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ ,

avec injections continues.

**Théorème 4. (Théorème Rellich-Kondrachov)** [4] Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . Alors on a les injections compactes suivantes :

- si  $p < N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1; p^*[$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ,
- si  $p = N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1; +\infty[$ ,
- si  $p > N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ .

**Remarque 1.3.1.**

- Si on remplace l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  alors les injections précédentes sont vérifiées indépendamment de la régularité du domaine  $\Omega$ .
- La condition sur le domaine  $\Omega$  est nécessaire, si  $\Omega$  n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes.

**Théorème 5.** [17] Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  alors l'injection canonique de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est un opérateur compact.

**Corollaire 5.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , si  $u \in H_0^1(\Omega)$  alors  $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$  quand  $N \geq 3$  et il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|u\|_r \leq C \|u\|,$$

pour tout  $r \in [1, \frac{2N}{N-2}]$  et pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

De plus l'injection  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$  est compacte pour tout  $r \in [1, \frac{2N}{N-2}[$ .

**Remarque 1.3.2.** Soit  $F, G$  deux espaces réflexifs, si l'espace  $F$  s'injecte d'une façon compacte dans l'espace  $G$ , cela signifie que : de toute suite bornée de  $F$  on peut extraire un sous suite qui converge faiblement dans  $F$  et fortement dans  $G$ .

## 1.4 Quelques définitions et théorèmes

### 1.4.1 Convergence forte et Convergence faible

Soient  $E$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $E$ .

**Définition 1.4.1.** On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$  dans  $E$  si

$$\|u_n - u\|_E \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

**Définition 1.4.2.**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite convergente faiblement vers  $u$  dans  $E$  si

$$\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in E'.$$

**Proposition 1.4.1.** [4] Soit  $(u_n)$  une suite de  $E$  et  $u$  un élément de  $E$ . On a

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } E \iff \langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle, \quad \forall f \in E'.$$

**Théorème 6.** [4] Soit  $E$  un espace réflexif et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $E$ . Alors il existe une sous-suite, encore notée  $(u_n)$  et  $u \in E$  telle que  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $E$ .

### 1.4.2 Principes de maximum

**Théorème 7.** [12] Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné de classe  $C^1$  et  $u \in H^1(\Omega)$  telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors  $u \geq 0$  dans  $\bar{\Omega}$ , et s'il existe  $x_0 \in \Omega$  tel que  $u(x_0) > 0$  alors  $u > 0$  dans  $\Omega$ .

### 1.4.3 Théorème de la moyenne

**Théorème 8.** Pour toute fonction  $f$  à valeurs réelles, définie et continue sur un segment  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , il existe un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

## 1.5 Problème aux valeurs propres

---

### 1.5 Problème aux valeurs propres

**Définition 1.5.1.** [15] Un problème aux valeurs propres, relatif à un opérateur  $A$ , consiste à chercher les solutions à :

$$Au = \lambda u,$$

où  $u$  est une fonction propre non identiquement nulle et  $\lambda$  la valeur propre.

#### 1.5.1 Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Théorème 9.** [8]

- \* Les valeurs propres de  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  sont réelles.
- \* Ces valeurs propres constitue une suite croissante,  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty.$$

- \* Les fonctions propres correspondantes forment une base orthonormée de  $L^2(\Omega)$ .

**Définition 1.5.2.** [15] Pour  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $u \neq 0$  on définit le quotient de Rayleigh de  $u$  par

$$R[u] = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Le numérateur est appelé l'énergie de Dirichlet de  $u$ .

**Proposition 1.5.1.** [15] La caractérisation variationnelle classique de Rayleigh de  $\lambda_1$

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} R[u].$$

## 1.6 Méthode variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des EDPs est de remplacer l'équation par une formulation équivalente dite variationnelle obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque dite fonction teste.

Nous commençons par donner quelque resultat essentielle.

### **Théorème 10. (Formules de Green) [15]**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . Alors si  $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$  on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} u(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} u \phi \eta_i \, ds,$$

où  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^T$  est la normale extérieure à  $\Omega$ .

Cette formule est la généralisation de l'intégration par parties dans  $\mathbb{R}^N$ .

**Corollaire 10.1.** si  $u \in H^2(\Omega)$  et  $\phi \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \phi(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \phi(x) \, ds,$$

avec  $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, \eta)$ .

**Définition 1.6.1.** Soit  $E$  un espace de Banach,  $V$  un ouvert de  $E$  et  $J : V \mapsto \mathbb{R}$  une fonctionnelle de classe  $C^1$ .

- On dit que  $u \in V$  est un point critique de  $J$  si  $J'(u) = 0$ .
- On dit que  $u$  est un point régulier s'il n'est pas un point critique.
- Une valeur critique de  $J$  est un nombre réel  $c$  tel que  $J(u) = c$  et  $J'(u) = 0$ .

### 1.6.1 Formulation variationnelle

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

## 1.6 Méthode variationnelle

---

Multiplions les deux membres de l'équation par  $\phi \in H^2(\Omega)$  et intégrons sur  $\Omega$  on aura,

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \phi(x) \, dx = - \int_{\Omega} g(x, u) \phi(x) \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

en utilisant la formule de Green on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \phi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x, u) \phi(x) \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

cette écriture s'appelle la formulation variationnelle du problème.

la solution  $u$  de ce problème est un point critique de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx - \int_{\Omega} G(x, u) \, dx,$$

avec

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, s) \, ds,$$

$J$  est dite la fonctionnelle d'énergie.

### 1.6.2 Condition de Palais-Smale

Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point dont on espère montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la condition de Palais-Smale.

**Définition 1.6.2.** [12] Soit  $E$  un espace de Banach, et  $J : E \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  est une suite de Palais-Smale de  $J$  si elle vérifie

$$(J(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée et } \|J'(u_n)\|_{E'} \rightarrow 0.$$

On dit que la fonctionnelle  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale (en abrégé (PS) ) si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Palais-Smale de  $J$  contient une sous-suite  $(u_{nk})_k$  convergente.

**Définition 1.6.3.** [12] Soit  $E$  un espace de Banach, et  $J : E \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $c \in \mathbb{R}$ . On dit que  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau  $c$  ) si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  telle que

$$J(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \|J'(u_n)\|_{E'} \rightarrow 0,$$

contient une sous-suite  $(u_{nk})_k$  convergente.

## 1.6 Méthode variationnelle

---

**Remarque 1.6.1.** *La condition de Palais-Smale ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.*

### 1.6.3 Théorème du col

Pour une fonctionnelle  $J$  qui n'est pas bornée (ni majorée, ni minorée), chercher ses points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminées par un argument de type min-max, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne, (en Anglais : mountain pass theorem).

**Théorème 11.** [12] *Supposons que la fonctionnelle  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale et que*

(i)  $J(0)=0$ ,

(ii) *Il existe  $\rho > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $\|u\| = \rho$ , alors  $J(u) \geq \alpha$ ,*

(iii) *Il existe  $v \in E$  tel que  $\|v\| > \rho$  et  $J(v) < \alpha$ .*

*Alors  $J$  admet une valeur critique  $c$  telle que  $c \geq \alpha$ .*

**Lemme 2.** [5] *Soit  $E$  un espace de Banach réel et  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  une fonctionnelle satisfaisant la condition suivante :*

$$\max(J(0), J(u_1)) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|_E=\rho} J(u),$$

*où  $\alpha, \beta$  et  $\rho$  sont des réels positifs et  $u_1 \in E$  avec  $\|u_1\|_E > \rho$ . Soit  $c \geq \beta$  caractérisé par*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\tau \in [1,0]} J(\gamma(\tau)) \text{ avec } \Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\},$$

*$\Gamma$  étant l'ensemble des chemins continus joignant 0 à  $u_1$ . Alors il existe une suite  $(u_n)$  dans  $E$  telle que*

$$J(u_n) \xrightarrow{n} c \geq \beta \text{ et } (1 + \|u_n\|_E)\|J'(u_n)\|_{E'} \xrightarrow{n} 0.$$

---

## Résultat d'existence pour un problème elliptique de type Kirchhoff avec la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions positives du problème suivant :

$$\begin{cases} -M \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine borné dont le bord est régulier,  $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'objectif de cette chapitre est d'utiliser la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz suivante, il existe  $\mu > 2$  et  $R > 0$  tels que,

$$0 < \mu F(x, t) \leq f(x, t)t, \quad \text{pour tout } |t| \geq R, \quad x \in \Omega. \quad (AR)$$

Il est bien connu que (AR) est une condition technique importante pour l'application du théorème de col, et pour établir des conditions sur les fonctions  $f$  et  $M$  pour lesquelles le problème (P) admette une solution positive.

**Notation** : Le long de ce chapitre une sous-suite d'une suite  $(u_n)$  sera notée de la même façon.

## 2.1 Introduction

---

On suppose que

(M<sub>0</sub>)  $M$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$  telle que pour un certain  $m_0 > 0$  on ait :

$$M(t) \geq m_0, \quad \forall t \geq 0.$$

(H<sub>0</sub>) la fonction  $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  est localement lipschitzienne.

(H<sub>1</sub>) la fonction  $f$  est à croissance sous critique et satisfait la condition suivante :

$$|f(x, s)| \leq C(1 + |s|^p) \quad \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

où  $C > 0, p \in ]1, +\infty[$  si  $N = \{1, 2\}$  et  $p \in ]1, (N + 2)/(N - 2)[$  si  $N \geq 3$ .

(H<sub>2</sub>)  $f(x, t) = o(t)$  (quand  $t \rightarrow 0$ ).

(AR) il existe  $\mu > 2$  et  $R > 0$  tels que ,

$$0 < \mu F(x, t) \leq f(x, t)t, \quad \text{pour tout } |t| \geq R, x \in \Omega.$$

Les solutions de ce problème sont exactement les points critiques de la fonctionnelle  $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$I(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx,$$

avec  $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) \, ds$  et  $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) \, ds$ .

Puisque  $M$  est une fonction continue et  $f$  est à croissance sous critique, la fonctionnelle  $I$  est de class  $C^1$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  est dite solution faible du problème (P) si

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \phi(x) \, dx - \int_{\Omega} f(x, u) \phi(x) \, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Si  $f$  est fonction localement lipschitzienne, alors la solution faible de (P) sera encore une solution classique.

Ce chapitre est organisé comme suit : La section 2.2 est consacrée à étudier le problème (P) où la fonction  $M$  est décroissante, quant à la section 2.3, elle traitera le problème (P) où  $M$  est supposée bornée et croissante. Dans la section 2.4 on montre l'existence de solutions positives dans le cas où la fonction  $M$  est croissante.

## 2.2 La fonction M est décroissante

### 2.2.1 Résultat d'existence

Avant d'établir le résultat d'existence, commençons par démontrer le lemme suivant.

**Lemme 3.** *Supposons que  $f$  satisfait la condition  $(H_1)$  et que  $M$  vérifie  $(M_0)$ , alors toute suite de Palais-Smale bornée relative à  $I$  contient une sous suite fortement convergente.*

**Démonstration :**

Soit  $(u_n)$  une suite de Palais-Smale bornée de  $I$ , alors il existe une sous-suite  $(u_n)$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f(x, u_n)(u_n - u)| \, dx, \\ &\leq C \int_{\Omega} (1 + |u_n|^p) |u_n - u| \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on écrit

$$\int_{\Omega} |u_n|^p |u_n - u| \, dx \leq \left( \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left( \int_{\Omega} |u_n - u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Ainsi

$$\left| \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \, dx \right| \leq C \left( |u_n - u|_1 + |u_n|_{p+1}^p |u_n - u|_{p+1} \right).$$

D'après le théorème de Rellich-Kondrachov, les injections  $H_0^1(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$  sont compactes car  $(2 < p+1 < 2^*)$ , on en déduit que

$$\int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \, dx \rightarrow 0.$$

Et puisque

$$\langle I'(u_n), (u_n - u) \rangle = M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx - \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) \, dx \rightarrow 0.$$

## 2.2 La fonction M est décroissante

---

Alors

$$M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx \rightarrow 0,$$

et comme  $M(\|u_n\|^2) \geq m_0 > 0$  on obtient,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx \rightarrow 0,$$

et par suite,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \, dx = \|u_n\|^2 - (u_n, u),$$

donc

$$\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2.$$

On conclut que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

**Théorème 12.** *Supposons que la fonction  $f$  satisfait  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(AR)$ . Alors si  $M$  satisfait  $M_0$  et*

$$(M_1) \quad \widehat{M}(t) \geq M(t)t, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

*le problème (P) admet une solution positive.*

### 2.2.2 Preuve du Théorème 12

La fonctionnelle I admet un point critique si elle vérifie les conditions du théorème du col.

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

- Dans la première, on montre que I vérifie les conditions géométriques (les hypothèses (ii) et (iii) du théorème du col).
- Dans la 2<sup>ème</sup> étape, on montre que I satisfait la condition de Palais-Smale.

#### a) les conditions géométriques

On a évidemment,  $I(0) = 0$ .

**Vérifions la condition (ii).**

## 2.2 La fonction M est décroissante

---

D'après les conditions  $(M_0)$  et  $(M_1)$  on a

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx, \\ &\geq \frac{1}{2} M(\|u\|^2) \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx, \\ &\geq \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx. \end{aligned}$$

La condition  $(H_2)$  implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t| \leq \eta \implies |f(x, t)| \leq \varepsilon |t|.$$

Ainsi pour  $|u| \leq \eta$ , on a

$$|F(x, u)| = \left| \int_0^u f(x, t) \, dt \right| \leq \varepsilon \int_0^u |t| \, dt,$$

d'où

$$|F(x, u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |u|^2. \quad (2.1)$$

Et pour tout  $x \in \Omega$ , la condition de croissance  $(H_1)$  entraîne l'existence d'une constante  $C_\eta = C(\eta) > 0$ , tel que pour  $|u| \geq \eta$ , on a

$$|F(x, u)| \leq C_\eta |u|^{p+1}. \quad (2.2)$$

En combinant les deux inégalités (2.1) et (2.2) on obtient

$$\forall x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R} \quad |F(x, u)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |u|^2 + C_\eta |u|^{p+1}. \quad (2.3)$$

Par conséquent

$$I(u) \geq \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon}{2} |u|^2 + C_\eta |u|^{p+1} \right) \, dx,$$

d'après le théorème d'injection de Sobolev et de l'inégalité de Poincaré, on a

$$I(u) \geq \left( \frac{1}{2} m_0 - \frac{\varepsilon}{2} C_1 \right) \|u\|^2 - C_2 \|u\|^{p+1}.$$

En étudiant le signe de l'expression  $\left( \frac{1}{2} m_0 - \frac{\varepsilon}{2} C_1 \right) t^2 - C_2 t^{p+1}$  pour  $t \geq 0$ , en on déduit que  $I(u) \geq \alpha > 0$  pour  $0 < \|u\| = \rho < \left( \frac{\frac{1}{2} m_0 - \frac{\varepsilon}{2} C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ , la condition (ii) est vérifiée.

## 2.2 La fonction $M$ est décroissante

---

**Vérifions la condition (iii).**

Soit  $\phi_1$  la fonction propre associée à la première valeur propre  $\lambda_1$  de l'opérateur  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  avec  $\|\phi_1\| = 1$ .

$$\begin{aligned} I(t\phi_1) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\phi_1\|^2) - \int_{\Omega} F(x, t\phi_1) \, dx, \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \int_{\Omega} F(x, t\phi_1) \, dx. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $\theta \in ]0, t^2[$  tel que :

$$\widehat{M}(t^2) = t^2 M(\theta),$$

et par la condition (AR) on a :

$$\int_{R+1}^u \frac{\mu}{s} \, ds \leq \int_{R+1}^u \frac{f(x, s)}{F(x, s)} \, ds \implies F(x, u) \geq (R+1)^{-\mu} F(x, R+1)u^{\mu}, \quad \forall u \geq R+1.$$

Et comme  $M$  est une fonction décroissante on obtient

$$I(t\phi_1) \leq \frac{1}{2}M(0)t^2 - t^{\mu}(R+1)^{-\mu} \int_{\Omega} |F(x, R+1)| |\phi_1|^{\mu} \, dx,$$

en faisant tendre  $t$  vers  $+\infty$ , alors  $I(t\phi_1) \rightarrow -\infty$  car  $\mu > 2$ , on conclut donc qu'il existe  $t_0 > 0$  assez grand tel que  $I(t_0\phi_1) < 0$ .

Pour  $v = t_0\phi_1$  et  $t_0 > \rho$  on a

$$\|v\| = \|t_0\phi_1\| = t_0 > \rho \text{ et } I(v) < 0,$$

la condition (iii) est vérifiée .

**b) Vérifions la condition de (PS).**

Pour vérifier la condition de Palais-Smale on montre d'abord que toute suite de Palais-Smale est bornée.

Soit  $(u_n)$  une suite de Palais-Smale, alors il existe  $C_3, C_4 > 0$  telles que

$$I(u_n) \leq C_3 \quad \text{et} \quad -\langle I'(u_n), u_n \rangle \leq C_4 \|u_n\|,$$

donc pour  $C = \max\{C_3, \frac{C_4}{\mu}\}$ , on a

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'(u_n), u_n \rangle \leq C(1 + \|u_n\|). \quad (2.4)$$

## 2.2 La fonction M est décroissante

---

D'autre part, on a

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'(u_n), u_n \rangle = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu} M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx,$$

en utilisant les conditions  $(M_0)$  et  $(M_1)$  on arrive à

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'(u_n), u_n \rangle &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|u_n\|^2 + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx, \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|u_n\|^2 + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \int_{\{\Omega \cap |u_n| \geq R\}} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx,$$

et

$$I_2 = \int_{\{\Omega \cap |u_n| < R\}} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx.$$

Ainsi le terme  $I_1$  est positif car

$$\frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \geq 0 \quad \text{sur} \quad \{\Omega \cap |u_n| \geq R\},$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx \geq \int_{\{\Omega \cap |u_n| < R\}} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx.$$

Et grâce à l'hypothèse  $(H_2)$  le terme  $I_2$  est borné par une constante indépendante de  $n$ ,

donc

$$\int_{\{\Omega \cap |u_n| < R\}} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx \geq -C',$$

avec  $C' = C_5 \text{mes}(\Omega)$

Alors

### 2.3 La fonction M est bornée et croissante

---

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'(u_n), u_n \rangle \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|u_n\|^2 + \int_{\{\Omega \cap |u_n| < R\}} \left( \frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right) dx.$$

ce qui implique que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'(u_n), u_n \rangle \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|u_n\|^2 - C'. \quad (2.5)$$

(2.4) et (2.5) impliquent que

$$C \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|u_n\|^2 - C \|u_n\| - C'.$$

Supposons que  $\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$  alors

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0 \|u_n\|^2 - C \|u_n\| - C' \rightarrow +\infty \quad \text{car } \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} > 0.$$

contradiction.

On conclut que la suite  $(u_n)$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$  et d'après le lemme 3 la suite  $(u_n)$  admet une sous-suite convergente vers  $u \in H_0^1(\Omega)$ , la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Le théorème du col assure l'existence d'une valeur critique  $c$  strictement positive. Il existe donc un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque  $I(0) = 0 < c$ . Ainsi le problème (P) admet une solution non triviale.

Comme la démonstration de l'existence de la solution reste valable pour  $u^+ = \max\{u, 0\}$ , on conclut que le problème admet une solution positive.

**Remarque 2.2.1.** *si la fonction M est croissante la condition  $(M_1)$  n'est plus satisfaite.*

### 2.3 La fonction M est bornée et croissante

Dans cette section on suppose que M est bornée et croissante. Plus précisément, on suppose qu'il y a existe  $m_1 > m_0$  et  $t_0 > 0$ , tels que

## 2.3 La fonction M est bornée et croissante

---

$$(M_2) \quad M(t) = m_1 \quad \forall t \geq t_0$$

### 2.3.1 Résultat d'existence

**Théorème 13.** *Supposons que la fonction M satisfait  $(M_0)$  et  $(M_2)$  avec*

$$\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} > 0, \quad (2.6)$$

*et supposons aussi que f satisfaisant  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(AR)$ .*

*Alors le problème (P) admet une solution positive.*

### 2.3.2 Preuve du Théorème 13

Comme dans le théorème 12, on montre que la fonctionnelle I admet un point critique.

D'après  $(M_0)$ , on a

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) \, ds \geq \int_0^t m_0 \, ds.$$

D'où

$$\widehat{M}(t) \geq m_0 t. \quad (2.7)$$

D'après  $(M_2)$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^{t_0} M(s) \, ds + \int_{t_0}^t m_1 \, ds \quad \text{pour tout } t \geq t_0, \\ &= \widehat{M}(t_0) - m_1 t_0 + m_1 t, \\ &\leq m_2 + m_1 t, \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec  $m_2 = |\widehat{M}(t_0) - m_1 t_0|$ .

#### a) les conditions géométriques

On a évidemment,  $I(0) = 0$ .

**Vérifions la condition (ii).**

Rappelons que

$$I(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx.$$

### 2.3 La fonction M est bornée et croissante

---

D'après (2.7) et (2.3) et par le inégalité de Poincaré et le théorème d'injection on obtient

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2}m_0 - \frac{\epsilon}{2}C_1\right)\|u\|^2 - C_2\|u\|^{p+1},$$

et puisque  $p + 1 > 2$  donc il existe  $\rho > 0$ , assez petit tel que  $I(u) \geq \alpha$  pour  $\|u\| = \rho$  (ii) est alors vérifiée.

#### Vérifons la condition (iii).

Soit  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  avec  $\phi \geq 0$ .

$$I(t\phi) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\phi\|^2) - \int_{\Omega} F(x, t\phi) \, dx,$$

d'après (2.8) on a

$$I(t\phi) \leq \frac{m_1}{2}t^2\|\phi\|^2 + \frac{m_2}{2} - \int_{\Omega} F(x, t\phi) \, dx.$$

Et pour tout  $x \in \overline{\Omega}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , il existe deux constantes  $a_1$  et  $a_2$  positives telles que :

$$F(x, t) \geq a_1|t|^\mu - a_2, \tag{2.9}$$

en effet, de (AR) on a :

$$0 < \mu F(x, t) \leq f(x, t)t, \quad \text{pour tout } |t| \geq R \implies \frac{f(x, t)}{F(x, t)} \geq \frac{\mu}{t}.$$

- Si  $t \geq R$

$$\int_R^t \frac{f(x, s)}{F(x, s)} \, ds \geq \int_R^t \frac{\mu}{s} \, ds \implies |F(x, t)| \geq \left| \frac{F(x, R)}{R^\mu} \right| |t|^\mu.$$

- Si  $t \leq -R$

$$\int_t^{-R} \frac{f(x, s)}{F(x, s)} \, ds \leq \int_t^{-R} \frac{\mu}{s} \, ds \implies |F(x, t)| \geq \left| \frac{F(x, -R)}{R^\mu} \right| |t|^\mu.$$

Donc

$$\forall |t| \geq R \implies F(x, t) \geq \min \left( \frac{F(x, -R)}{R^\mu}, \frac{F(x, R)}{R^\mu} \right) |t|^\mu.$$

### 2.3 La fonction M est bornée et croissante

---

Alors

$$F(x, t) \geq a_1 |t|^\mu . \quad (2.10)$$

D'autre part

F est continue pour  $\forall |t| \leq R$  ,

$$|F(x, t)| \leq a_2 . \quad (2.11)$$

En combinant les deux inégalités (2.10) et (2.11), on obtien

$$F(x, t) \geq a_1 |t|^\mu - a_2 . \quad (2.12)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I(t\phi) &\leq \frac{m_1}{2} t^2 \|\phi\|^2 + \frac{m_2}{2} - \int_{\Omega} F(x, t\phi) \, dx, \\ &\leq \frac{m_1}{2} t^2 \|\phi\|^2 - C_6 t^\mu \|\phi\|^\mu + C_7, \end{aligned}$$

d'où

$$I(t\phi) \rightarrow -\infty \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,$$

(iii) est alors vérifiée.

#### b) Vérifions la condition de (PS)

d'après (AR) et  $(M_0)$ ,  $(M_2)$  en procédant comme dans le théorème 12,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'(u_n), u_n \rangle \geq \left( \frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + \int_{\{\Omega \cap |u_n| < R\}} F(x, u_n) \, dx, \quad (2.13)$$

$$\implies C + C \|u_n\| \geq \left( \frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C'.$$

Supposons que  $\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$  alors

$$\frac{C}{\|u_n\|} + C \geq \left( \frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} \right) \|u_n\| - \frac{C'}{\|u_n\|} \rightarrow +\infty \quad \text{car } \frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} > 0,$$

ce qui implique que  $C \geq +\infty$ .

On déduit que  $(u_n)$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$  et d'après le lemme 3 la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Donc le théorème du col assure l'existence d'une valeur critique strictement positive.

Ainsi le problème (P) admet une solution positive.

## 2.4 la fonction M est croissante

Dans cette section on va traiter le problème dans le cas où la fonction  $M$  est croissante.

### Propriétés de la solution

Pour résoudre le problème (P), on utilisera une technique de troncation et pour donner des propriétés sur la solution de problème (P), on utilisera les estimations de Gidas et Spruck [10], affirmant que si

$$(H_3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t^p} = h(x) \quad \text{uniformément dans } \bar{\Omega},$$

pour une certaine fonction continue  $h > 0$ .

Alors toute solution classique positive  $u$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

est bornée c'est-à-dire, il existe  $A > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $\Omega$  telle que  $u(x) \leq A$ .

### 2.4.1 Résultat d'existence

Avant d'établir le résultat d'existence, on commence par la proposition suivante qui nous fournit une estimation a priori pour la solution de (P).

**Proposition 2.4.1.** *soit  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  et satisfait la condition suivante :*

$$(H_4) \quad |f(x, s)| \leq C_0 |s|^q + C_1 |s|^p, \quad \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

où  $C_0 \geq 0, C_1 > 0$  et  $0 < q \leq p, p \in ]1, (N+2)/(N-2)[$  si  $N \geq 3$  et  $p \in ]1, +\infty[$  si  $N = \{1, 2\}$ .

Et si  $f$  satisfait  $(H_3)$  et  $M$  satisfait  $(M_0)$ , alors toute solution positive  $u$  de (P) est telle que

$$\|u\|^2 \leq \max\{M(\|u\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(\|u\|^2)^{(2/p-1)}\}\theta. \quad (2.14)$$

où  $\theta > 0$  est une constante positive indépendante de  $M$ .

## 2.4 la fonction M est croissante

---

### Démonstration :

Soit  $u$  une solution positive de (P). Posons,

$$\omega = \frac{u}{M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}},$$

on voit que  $\omega > 0$  résout le problème

$$\begin{cases} -\Delta\omega = g(x, \omega) \\ \omega \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Avec

$$g(x, s) = \frac{f\left(x, M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s\right)}{M(\|u\|^2)^{p/(p-1)}}.$$

### vérification :

D'une part, on a

$$\begin{aligned} -\Delta\omega &= \frac{-\Delta u}{M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}}, \\ &= \frac{f(x, u)}{M(\|u\|^2)^{p/(p-1)}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} g(x, \omega) &= \frac{f\left(x, M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}\omega\right)}{M(\|u\|^2)^{p/(p-1)}}, \\ &= \frac{f(x, u)}{M(\|u\|^2)^{p/(p-1)}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} -\Delta\omega = g(x, \omega) & \text{dans } \Omega \\ \omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, on obtient

## 2.4 la fonction $M$ est croissante

---

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(x, s)}{s^p} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s)}{(M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s)^p} = h(x).$$

Et on peut assurer, d'après l'estimation de Gidas-Spruck, l'existence d'une constante  $A > 0$  telle que

$$|\omega|_\infty \leq A,$$

et donc

$$|u|_\infty \leq M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}A,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= M(\|u\|^2)^{-1} \int_{\Omega} f(x, u)u \, dx, \\ &\leq M(\|u\|^2)^{-1} (C_0|u|_\infty^{q+1} + C_1|u|_\infty^{p+1}) \text{mes}(\Omega), \end{aligned} \tag{2.15}$$

d'où

$$\|u\|^2 \leq \max\{M(\|u\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(\|u\|^2)^{2/(p-1)}\} (C_0A^{q+1} + C_1A^{p+1}) \text{mes}(\Omega).$$

Ensuite, on prend  $\theta = (C_0A^{q+1} + C_1A^{p+1}) \text{mes}(\Omega)$ .

**Théorème 14.** *Supposons que la fonction  $f$  satisfait  $(H_0)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$  et  $(AR)$ , Supposons de plus que  $M$  est une fonction continue satisfait la condition  $(M_0)$  et qu'il existe  $k > 0$  tel que*

$$M(k) < \frac{\mu m_0}{2}, \tag{2.16}$$

et

$$\max\{M(k)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(k)^{2/(p-1)}\} \leq \frac{k}{\theta}, \tag{2.17}$$

où  $p$ ,  $q$  et  $\theta > 0$  sont donnés dans la proposition 2.4.1.

Alors le problème  $(P)$  admet une solution positive.

La démonstration est basée sur une troncature de la fonction  $M$  en une fonction  $M_k$  égale à  $M$  sur un intervalle  $[0; k]$ . On montrera ensuite que le problème tronqué admet une solution positive et on s'assurera que cette dernière est aussi solution du problème initial  $(P)$ .

## 2.4 la fonction M est croissante

---

### 2.4.2 Preuve du Théorème 14.

La fonction M étant croissante, définissons alors le problème tronqué suivant :

$$\begin{cases} -M_k(\|u\|^2)\Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_k)$$

où la fonction  $M_k$  est définie comme suit,

$$M_k(t) = \begin{cases} M(t) & \text{si } t \leq k, \\ M(k) & \text{si } t > k. \end{cases}$$

Premièrement, nous notons que les hypothèses  $(H_2)$  et  $(H_3)$  impliquent que  $(H_4)$  est valable.

Ensuite, on remarque que la fonction  $M_k$  satisfait l'hypothèse  $(M_2)$  avec  $m_1 = M(k)$  d'autre part  $(H_3)$  implique que  $(H_1)$  est satisfaite, alors on peut appliquer le théorème 13 pour avoir que  $u_k > 0$  soit une solution du problème tronqué.

D'après la proposition 2.4.1 on a

$$\|u_k\|^2 \leq \max\{M(\|u_k\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(\|u_k\|^2)^{2/(p-1)}\}\theta.$$

- Si  $\|u_k\|^2 > k$  alors, on obtient

$$k < \max\{M(k)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(k)^{2/(p-1)}\}\theta,$$

ce qui contredit avec (2.17) donc  $\|u_k\|^2 \leq k$  ce qui prouve que  $u_k$  est une solution positive du problème (P).

---

## Sur une équation elliptique de type Kirchhoff sans condition d'Ambrosetti-Rabinowitz

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions positives du problème suivant :

$$\begin{cases} -M \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  à frontière régulière  $\partial\Omega$ ,  $f(x, t)$  est une fonction continue sur  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ , asymptotiquement linéaire à l'infini en  $t$  pour tout  $x \in \Omega$ , et  $M$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

Une question légitime se pose alors : Pour  $M$  non identiquement constante et  $f(x, t)$  asymptotiquement linéaire à l'infini en  $t$ , peut-on assurer l'existence de solutions dans le cas où  $(AR)$  n'est pas satisfaite ?

Le but du présent chapitre est d'apporter une réponse positive à cette question. Nous serons donc amenés à trouver des conditions suffisantes sur  $M$  et  $f$  pour lesquelles le problème (P) admette des solutions au sens faible.

**Notation :** Le long de ce chapitre Une sous-suite d'une suite  $u_n$  sera notée de la même façon.

### 3.1 Introduction

---

on suppose que ,

(M<sub>0</sub>) M est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$  telle que pour un certain  $m_0 > 0$  on ait

$$M(t) \geq m_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

(M<sub>1</sub>) il existe  $m_1 > 0$  et  $t_0 > 0$  tels que

$$M(t) = m_1 \text{ pour } t \geq t_0.$$

(H<sub>1</sub>) la fonction  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  et est telle que,

$$f(x, t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, x \in \bar{\Omega} \quad \text{et} \quad f(x, t) = 0, \quad \forall t \leq 0, x \in \bar{\Omega}.$$

(H<sub>2</sub>) la fonction  $t \mapsto \frac{f(x, t)}{t}$  est croissante pour  $x$  fixé dans  $\bar{\Omega}$ .

(H<sub>3</sub>)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x, t)}{t} = p(x)$ ;  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} = q(x) \neq 0$  uniformément en  $x \in \Omega$ ,

où  $0 < \varepsilon_0 \leq p(x)$ ,  $q(x) \in L^\infty(\Omega)$  et  $|p|_\infty < m_0 \lambda_1$ ,  $\varepsilon_0$  est un réel positif fixé.

On sait d'après l'article de De Figueiredo [9], que la première valeur propre  $\lambda_1(q)$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda q(x) u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_1)$$

où  $q$  est une fonction continue et positive sur  $\bar{\Omega}$ . La fonction propre associée à  $\lambda_1(q)$  est notée  $\phi_1$ ,  $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ . On désigne par  $\mu_1$  et  $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$  la première valeur propre et la fonction propre associée au problème

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda q(x) u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_M)$$

Ce chapitre est organisé comme suit : La section 3.2 est consacrée à étudier le problème (P) où la fonction M est supposée bornée, Dans la section 3.3 on montre l'existence de solutions positives dans le cas où la fonction M est croissante.

## 3.2 La fonction M est bornée

### 3.2.1 Résultat d'existence et non existence

**Théorème 15.** *Supposons que  $(H_1)$  à  $(H_3)$  soient satisfaites et que la fonction M vérifie  $(M_0)$  et  $(M_1)$ . Alors*

1. *Si  $\mu_1 > 1$  alors le problème (P) n'admet pas de solution.*
2. *Si  $m_1\lambda_1(q) < 1$ , alors le problème (P) a une solution positive.*
3. *Si  $\mu_1 = 1$  et  $m_0\lambda_1(q) \geq 1$  et si le problème (P) admet une solution positive  $u \in H_0^1(\Omega)$  alors*

$$f(x, u) = \lambda_1(q)q(x)M(\|u\|^2) \text{ u p.p. dans } \Omega.$$

Avant de commencer la preuve de ce théorème nous avons besoin de la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 15 si*

$$m_1\lambda_1(q) < 1, \tag{3.1}$$

*alors la fonctionnelle I vérifie les conditions géométriques suivantes :*

- (i) *Il existe  $\rho, \alpha > 0$  tels que  $I(u) \geq \alpha$  pour  $\|u\| = \rho$ .*
- (ii) *Il existe  $v \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\|v\| > \rho$  et  $I(v) \leq 0$ .*

**Démonstration :**

Des hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_3)$  il s'ensuit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A = A(\varepsilon) \geq 0$  tel que pour tout  $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ ,

$$F(x, s) \leq \frac{1}{2}(|p|_\infty + \varepsilon)s^2 + As^{p+1}, \tag{3.2}$$

où  $1 < p < \infty$  si  $N \in \{1, 2\}$  et  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$  si  $N \geq 3$ .

Pour  $\varepsilon$  fixé dans l'intervalle  $]0, m_0\lambda_1 - |p|_\infty[$  de (3.2) et de l'inégalité de Sobolev,

### 3.2 La fonction M est bornée

---

on a

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx, \\
 &\geq \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \frac{1}{2} (|p|_{\infty} + \varepsilon) |u|_2^2 - A |u|_{p+1}^{p+1}, \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( m_0 - \frac{|p|_{\infty} + \varepsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - C \|u\|^{p+1}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Puisque  $p > 1$ , la condition (i) s'ensuit.

Pour le point (ii), on peut écrire que, pour  $t$  suffisamment grand

$$\begin{aligned}
 \widehat{M}(t) &= \int_0^t M(s) \, ds, \\
 &= \widehat{M}(t_0) - m_1 t_0 + m_1 t, \\
 &\leq m_2 + m_1 t \quad \text{avec } m_2 = |\widehat{M}(t_0) - m_1 t_0|.
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t\phi_1)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{2} \widehat{M}(\|t\phi_1\|^2) - \int_{\Omega} F(x, t\phi_1) \, dx \right), \\
 &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{t^2} + m_1 \|\phi_1\|^2 \right) - \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(x, t\phi_1)}{t^2 \phi_1^2} \phi_1^2 \, dx, \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \|\phi_1\|^2 - \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(x, t\phi_1)}{t^2 \phi_1^2} \phi_1^2 \, dx,
 \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(x, t\phi_1)}{t^2 \phi_1^2} \phi_1^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(x) |\phi_1(x)|^2 \, dx,$$

De plus, comme  $\lambda_1(q)$  est la première valeur propre du problème  $(P_1)$ ,

on obtient

$$\frac{\|\phi_1\|^2}{\lambda_1(q)} = \int_{\Omega} q(x) |\phi_1(x)|^2 \, dx,$$

### 3.2 La fonction M est bornée

---

On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t\phi_1)}{t^2} \leq \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{1}{\lambda_1(q)} \right) \|\phi_1\|^2 < 0,$$

car  $m_1 \lambda_1(q) < 1$ .

Ainsi il existe  $t_1 > \max \left( t_0, \frac{\rho}{\|\phi_1\|} \right)$  tel que  $I(t_1\phi_1) \leq 0$ .

En prenant  $v = t_1\phi_1$  le point (ii) est vérifiée.

Passons maintenant à la preuve du Théorème 15.

#### 3.2.2 Preuve du Théorème 15

**Premier point.**

Si  $\mu_1 > 1$  alors le problème (P) n'admet pas de solution.

On démontre par l'absurde en effet, si  $u \in H_0^1(\Omega)$  est une solution de (P), on a

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \phi(x) \, dx - \int_{\Omega} f(x, u) \phi(x) \, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

en prende  $u = \phi$  alors des hypothèses  $(H_1)$  à  $(H_3)$  on obtien

$$M(\|u\|^2) \|u\|^2 = \int_{\Omega} f(x, u) u \, dx \leq \int_{\Omega} q(x) u^2 \, dx,$$

donc

$$\mu_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{M(\|u\|^2) \|u\|^2}{\int_{\Omega} q(x) u^2 \, dx} \leq 1.$$

C'est une contradiction

**Deuxième point.**

Si  $m_1 \lambda_1(q) < 1$  la proposition 3.2.1 nous assure l'existence d'un  $t_1 > \max \left( t_0, \frac{\rho}{\|\phi_1\|} \right)$  tel que  $I(t_1\phi_1) < 0$ .

On définit l'ensemble des chemins suivant,

$$\Gamma = \{ \gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_1\phi_1 \},$$

### 3.2 La fonction M est bornée

---

et

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\tau \in [1,0]} I(\gamma(\tau)).$$

Du lemme 2, il existe une suite  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  telle que

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u_n\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u_n) \, dx = c + o(1), \quad (3.4)$$

et

$$(1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{H^{-1}} \xrightarrow{n} 0, \quad (3.5)$$

ceci implique que

$$\langle I'(u_n), u_n \rangle = M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n \, dx = o(1). \quad (3.6)$$

Montrons que la suite  $(u_n)$  est bornée. Supposons au contraire que  $\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$  et posons

$$\omega_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}. \quad (3.7)$$

La suite  $(\omega_n)$  ainsi définie est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ , il existe alors une sous-suite encore notée  $(\omega_n)$  telle que

$$\omega_n \rightharpoonup \omega \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

$$\omega_n \rightarrow \omega \text{ fortement dans } L^2(\Omega),$$

$$\omega_n \rightarrow \omega \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Ensuite, on vérifie que La limite  $\omega$  est non identiquement nulle. En effet, supposons par l'absurde que  $\omega \equiv 0$ .

De  $(H_1)$  et  $(H_3)$  on en déduit qu'il existe  $\theta > 0$  tel que

$$\left| \frac{f(x, t)}{t} \right| \leq \theta \text{ pour } x \in \Omega, t \geq 0.$$

D'où de (3.6) et (3.7) il vient

$$m_0 \leq M(\|u_n\|^2) = \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n^+)}{u_n^+} \omega_n^2 \, dx + o(1) \leq \theta \int_{\Omega} \omega_n^2 \, dx \xrightarrow{n} 0,$$

### 3.2 La fonction M est bornée

---

ce qui contredit l'hypothèse  $m_0 > 0$ . Ainsi  $\omega \neq 0$ .

Montrons maintenant que

$$u_n \xrightarrow{n} +\infty \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Puisque  $\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$  et  $\omega_n \rightarrow \omega$  p.p. dans  $\Omega$ , on en déduit que

$$u_n \rightarrow +\infty \quad \text{dans p.p. dans } \Omega, \text{ si } \omega > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Il reste donc à établir que  $\omega > 0$  p.p. dans  $\Omega$ . Considérons, comme dans [18], la suite  $(p_n)$  définie par

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{f(x, u_n)}{u_n M(\|u_n\|^2)} & \text{pour } x \in \Omega \text{ et } u_n(x) > 0, \\ 0 & \text{pour } x \in \Omega \text{ et } u_n(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pour tout entier  $n$  et pour tout  $x \in \Omega$  on a

$$0 \leq p_n(x) \leq \frac{\theta}{m_0},$$

il existe donc une sous-suite encore notée  $(p_n)$  telle que

$$p_n \rightharpoonup h \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \text{ avec } 0 \leq h \leq \frac{\theta}{m_0}.$$

De la convergence forte de  $(\omega_n)$  vers  $\omega$  dans  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} p_n(x) \omega_n(x) \phi(x) \, dx = \int_{\Omega} p_n(x) \omega_n^+(x) \phi(x) \, dx \xrightarrow{n} \int_{\Omega} h(x) \omega^+(x) \phi(x) \, dx \quad \forall \phi \in L^2(\Omega),$$

donc

$$p_n \omega_n \rightharpoonup h \omega^+ \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \quad (3.8)$$

D'autre part pour tout  $\phi \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla \omega_n \nabla \phi - p_n(x) \omega_n(x) \phi(x)) \, dx = \frac{|\langle I'(u_n), \phi \rangle|}{\|u_n\| M(\|u_n\|^2)} \leq \frac{\|I'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\|u_n\| M(\|u_n\|^2)} \|\phi\|.$$

Faisons tendre  $n$  vers  $+\infty$  tout en utilisant (3.5) et (3.8), et comme  $\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$  et la convergence faible de  $(\omega_n)$  vers  $\omega$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on conclut que

$$\int_{\Omega} (\nabla \omega \nabla \phi - h(x) \omega^+(x) \phi(x)) \, dx = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

### 3.2 La fonction M est bornée

---

En remplaçant  $\phi$  par  $\omega^-$  dans cette égalité, on obtient  $\|\omega^-\| = 0$ , donc

$$\omega = \omega^+ \geq 0 \text{ dans } \Omega.$$

Enfin par application du principe du maximum on aboutit à

$$\omega(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

alors la conclusion  $u_n \xrightarrow{n} +\infty$  p.p. dans  $\Omega$ .

Estimons à présent  $I(u_n)$  pour  $n$  assez grand.

D'après les hypothèses  $(M_1)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  et de (3.6), on obtient

$$m_1 \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} q(x) u_n^2 dx \xrightarrow{n} o(1). \quad (3.9)$$

D'après le théorème de la moyenne, pour tout entier  $n$ , il existe  $t_n \in [0, \|u_n\|^2]$  tel que

$$\widehat{M}(\|u_n\|^2) = M(t_n) \|u_n\|^2. \quad (3.10)$$

Remarquons que

$$\begin{cases} M(t_n) = m_1 & \text{si } t_n \geq t_0, \\ m_0 \leq M(t_n) \leq \max_{t \in [0, t_0]} M(t) & \text{si } t_n \leq t_0. \end{cases}$$

pour  $F$  on peut écrire

$$F(x, u_n) = F(x, A) + \int_A^{u_n} f(x, s) ds,$$

où  $A$  est un nombre réel suffisamment grand. En utilisant encore une fois  $(H_3)$  on obtient, pour  $n$  assez grand,

$$F(x, u_n) = F(x, A) + \frac{1}{2} q(x) (u_n^2 - A^2) + o(1). \quad (3.11)$$

Rappelons que

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u_n\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx,$$

Les deux équations (3.9) et (3.11) donnent

$$I(u_n) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} q(x) A^2 - F(x, A) \right) dx + \frac{1}{2} (M(t_n) - m_1) \|u_n\|^2 + o(1). \quad (3.12)$$

### 3.2 La fonction M est bornée

---

- Maintenant si à partir d'un certain rang  $n_0$ ,  $M(t_n) = m_1$  ; on choisit convenablement le réel A de sorte que l'intégrale dans (3.12) soit inférieure à  $c/2$ , on obtient

$$I(u_n) \leq \frac{c}{2}.$$

Ce qui est en contradiction avec (3.4).

- Si  $M(t_n) - m_1 \rightarrow a \in \mathbb{R}^*$ , on arrive à

$$I(u_n) \xrightarrow{n} \pm\infty,$$

on ce qui contredit aussi (3.4).

- Si la suite  $(M(t_n))$  n'admet pas de limite, ce sera encore une contradiction avec (3.4).

La suite  $(u_n)$  est donc bornée dans  $H_0^1(\Omega)$  et puisque  $\Omega$  et  $M$  sont bornés et  $f(x, u)$  est sous-critique de la compacité de l'injection de Sobolev et des résultats standards, il existe une sous suite  $(u_n)$  qui converge fortement vers un point critique non trivial de I, solution du problème (P). Ceci achève la preuve du deuxième point.

#### Troisième point.

Supposons que  $\mu_1 = 1$ . De la définition de  $\mu_1$  on a

$$M(\|\psi_1\|^2) \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla v \, dx = \int_{\Omega} q(x) \psi_1 v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.13)$$

Si  $u$  est une solution positive de (P),  $\forall \psi_1 \in H_0^1(\Omega)$  on a

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi_1 \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) \psi_1 \, dx. \quad (3.14)$$

Posons  $u = v$  dans (3.13) on obtient,

$$M(\|\psi_1\|^2) \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla u \, dx = \int_{\Omega} q(x) \psi_1 u \, dx. \quad (3.15)$$

en utilisant (3.14) et (3.15), on en déduit que

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, u)}{M(\|u\|^2)} \psi_1 \, dx = \int_{\Omega} \frac{q(x)u}{M(\|\psi_1\|^2)} \psi_1 \, dx,$$

### 3.2 La fonction M est bornée

---

c-à-d

$$\int_{\Omega} \left( \frac{f(x, u)}{M(\|u\|^2)} - \frac{q(x)u}{M(\|\psi_1\|^2)} \right) \psi_1 \, dx = 0. \quad (3.16)$$

Alors, on a

$$\left( \frac{f(x, u)}{M(\|u\|^2)} - \frac{q(x)u}{M(\|\psi_1\|^2)} \right) \leq 0.$$

En effet,  $\mu_1$  implique que

$$\frac{1}{M(\|\psi_1\|^2)} = \frac{\|\psi_1\|^2}{\int_{\Omega} q(x)\psi^2 \, dx} \geq \inf_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{M(\|v\|^2)\|v\|^2}{\int_{\Omega} q(x)v^2 \, dx} = \lambda_1(q),$$

Par conséquent

$$M(\|\psi_1\|^2)\lambda_1(q) \leq 1,$$

d'autre part, on a

$$M(\|\psi_1\|^2)\lambda_1(q) \geq m_0\lambda_1(q) \geq 1,$$

donc

$$M(\|\psi_1\|^2)\lambda_1(q) = 1.$$

En utilisant cette information, on écrit,

$$\frac{f(x, u)}{M(\|u\|^2)} - \frac{q(x)u}{M(\|\psi_1\|^2)} = \lambda_1(q) \left( \frac{f(x, u)}{\lambda_1(q)M(\|u\|^2)} - q(x)u \right),$$

et comme  $\lambda_1(q)M(\|u\|^2) \geq \lambda_1(q)m_0 \geq 1$ , ce qui implique que

$$\frac{f(x, u)}{\lambda_1(q)M(\|u\|^2)} - q(x)u \leq f(x, u) - q(x)u \leq 0.$$

Puisque  $\psi_1 > 0$  p.p. dans  $\Omega$  et de (3.16) on conclut que

$$f(x, u) = \frac{M(\|u\|^2)}{M(\|\psi_1\|^2)} q(x)u = \lambda_1(q)q(x)M(\|u\|^2)u \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Ceci termine la preuve du 3<sup>ème</sup> point.

## 3.3 La fonction M est croissante

Dans cette section on va traiter le problème dans le cas où la fonction M est croissante.

### 3.3.1 Résultat d'existence

**Théorème 16.** *On suppose que la fonction M est croissante et vérifie  $(M_0)$ . On suppose de plus que les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_3)$  sont satisfaites avec  $|p|_\infty > 0$ .*

*Alors le problème (P) admet une solution positive.*

Avant de démontrer le Théorème 16, on va établir la proposition suivante qui nous fournit une estimation a priori pour la solution de (P).

**Proposition 3.3.1.** *Supposons que les hypothèses  $(M_1)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  sont satisfaites avec  $|p|_\infty > 0$ . Si  $|q|_\infty < m_1$ , alors toute solution positive u de (P) est telle que*

$$\|u\| \leq \bar{C},$$

où  $\bar{C}$  est une constante positive dépendant seulement de  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $|p|_\infty$ ,  $|q|_\infty$  et  $t_0$ .

**Démonstration :**

En posant  $p_0 = \inf_{x \in \Omega} p(x)$ , en utilisant les hypothèses  $(H_2)$  et  $(H_3)$ , on arrive à

$$F(x, u) \geq \frac{1}{2} p_0 |u|^2,$$

d'où  $c_0 \geq c$ , où c et  $c_0$  sont les niveaux d'énergie respectifs des fonctionnelles I et  $I_0$ , avec

$$I_0(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{p_0}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Soit u une solution positive de (P). On distingue deux cas :

1. Si  $\|u\|^2 < t_0$ , on prend  $\bar{C} = \sqrt{t_0}$ .
2. Si  $\|u\|^2 \geq t_0$ , alors de  $(H_3)$ , on a

$$|p|_\infty < m_0 \lambda_1,$$

### 3.3 La fonction M est croissante

---

et avec la définition de  $\lambda_1$ , on obtient

$$|u|_2^2 \leq \frac{m_0}{|p|_\infty} \|u\|^2. \quad (3.17)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} c_0 &\geq c = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx, \\ &\geq \frac{1}{2} m_1 \|u\|^2 - \frac{1}{2} m_1 t_0 - \frac{1}{2} |q|_\infty |u|_2^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En utilisant (3.17), on obtient à partir de (3.18)

$$(2c_0 + m_1 t_0) |p|_\infty \geq (m_1 |p|_\infty - m_0 |q|_\infty) \|u\|^2.$$

Comme  $|q|_\infty < m_1$ , et la constante  $m_0$  peut être choisie inférieure ou égale à  $|p|_\infty$  on arrive finalement à

$$\|u\|^2 \leq \frac{(2c_0 + m_1 t_0) |p|_\infty}{m_1 |p|_\infty - m_0 |q|_\infty},$$

c-à-d

$$\|u\| \leq \bar{C},$$

avec

$$\bar{C} \geq \sqrt{\frac{(2c_0 + m_1 t_0) |p|_\infty}{m_1 |p|_\infty - m_0 |q|_\infty}}.$$

A noter que  $\bar{C} \geq \sqrt{t_0}$ .

Passons à présent à la démonstration du Théorème 16.

La démonstration est basée sur une troncature de la fonction  $M$  en une fonction  $M_k$  égale à  $M$  sur un intervalle  $[0, k]$ . On montrera ensuite que le problème tronqué admet une solution positive et on s'assurera que cette dernière est aussi solution du problème initial (P).

### 3.3 La fonction M est croissante

---

#### 3.3.2 Preuve du Théorème 16

La fonction M étant croissante, définissons alors le problème tronqué suivant :

$$\begin{cases} -M_k \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_k)$$

où la fonction  $M_k$  est définie comme suit,

$$M_k(t) = \begin{cases} M(t) & \text{si } t \leq k, \\ at + b & \text{si } k < t \leq k + 1, \\ \frac{\delta}{\lambda_1(q)} & \text{si } t > k + 1, \end{cases}$$

avec  $k > 0$  un entier suffisamment grand,

$$a = \frac{\delta}{\lambda_1(q)} - M(k), \quad b = (1 + k)M(k) - \frac{\delta k}{\lambda_1(q)}.$$

et

$$0 < \delta < \min(1, \lambda_1(q)m_0).$$

On remarque que la fonction  $M_k$  satisfait l'hypothèse  $(M_1)$  avec  $m_1 = \frac{\delta}{\lambda_1(q)}$  et la condition (3.1) de la proposition 3.2.1 est clairement vérifiée. Ainsi, d'après le théorème 15, le problème  $(P_k)$  admet une solution positive  $u_k$ .

- Si cette solution est telle que  $\|u_k\|^2 \leq k$ , alors elle est aussi solution du problème (P), et c'est fini.

Analysons le cas  $\|u_k\|^2 > k$ .

On a  $c_0$  et  $p_0$  étant définis dans la démonstration de la proposition 3.3.1,

$$c_0 \geq \frac{1}{2} \widehat{M}_k(\|u_k\|^2) - \frac{p_0}{2} \|u_k\|_2^2,$$

car, par construction,  $M(t) \geq M_k(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Par (3.17), on obtient

### 3.3 La fonction M est croissante

---

$$c_0 \geq \frac{1}{2} \widehat{M}_k(\|u_k\|^2) - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 \|u_k\|^2.$$

- Si  $k < \|u_k\|^2 \leq k + 1$ , on a

$$\begin{aligned} c_0 &\geq \frac{1}{2} \widehat{M}(k) - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 \|u_k\|^2, \\ &\geq \frac{1}{2} m_0 k - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0 (k + 1), \\ &= \frac{1}{2} m_0 k \left(1 - \frac{p_0}{|p|_\infty}\right) - \frac{p_0}{2|p|_\infty} m_0. \end{aligned}$$

Ce qui est impossible pour  $k$  assez grand, car  $1 - \frac{p_0}{|p|_\infty} > 0$ .

- Si  $\|u_k\|^2 > k + 1$ , on écrit

$$c_1 \geq \frac{1}{2} \widehat{M}_k(\|u_k\|^2) - \frac{p_1}{2} |u_k|_2^2, \quad (3.19)$$

où  $c_1$  est le niveau d'énergie de la fonctionnelle  $I_1$  définie par

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{p_1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Avec  $0 < p_1 < \min\left(p_0, \frac{\delta|p|_\infty}{\lambda_1(q)}\right)$ .

De (3.19) et de la définition de la fonction  $M_k$  on obtient

$$c_1 \geq \frac{1}{2} \widehat{M}(k) - \frac{p_1}{2|p|_\infty} \|u_k\|^2 + \frac{1}{4} (M(k) - m_1) + \frac{1}{2} m_1 (\|u_k\|^2 - k),$$

alors

$$c_1 \geq \frac{1}{2} (m_0 - m_1) k + \frac{1}{2} \left(m_1 - \frac{p_1}{|p|_\infty}\right) \|u_k\|^2 + \frac{1}{4} (M(k) - m_1). \quad (3.20)$$

Comme les coefficients  $m_0 - m_1$  et  $m_1 - \frac{p_1}{|p|_\infty}$  sont positifs l'inégalité (3.20) ne peut pas avoir lieu pour  $k$  assez grand. Ainsi  $\|u_k\|^2 \leq k$  et  $u_k$  est solution du problème (P).

---

## Bibliographie

- [1] C. O. Alves, A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasi-linear elliptic equation of Kirchhoff type, *Computers and mathematics with applications*, 49 (2005) 85-93.
- [2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and application. *J. Funct. Anal.*14 (1973) 348 .. 381 .
- [3] A. Bensedik On an elliptic equation of Kirchhoff-type with a potential asymptotically linear at infinity , *Mathematical and Computer Modelling*,49 (2009) 1089-1096.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle ; Théorie et Applications*, Dunod, Paris 1999.
- [5] G. Cerami, Un criterio di esistenza per i punti su varietà illimitate, *Rend. Acad. Sci. Let. Ist. Lombardo*, 112 (1978) 332-336.
- [6] M. Chipot and B. Lovat, Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, *Nonlinear Anal.*, 30 (1997) 4619-4627.
- [7] M. Chipot and J. F. Rodrigues, On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems, *RAIRO, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 26(1992) 447-467.
- [8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduates studies in mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, (1998).
- [9] D. G. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems, *Lecture in Math.*, Springer-Verlag Berlin, 957(1982) 34-87.
- [10] B. Gidas, J. Spruck, A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Comm Partial Differential Equations* ,6 (1981) 883.
- [11] F. J. S. A. Corrêa, S. D. B. Menezes and J. Ferreira, On a class of problems involving a nonlocal operator, *Applied Mathematics and Computation*,147 (2004) 475-489.
- [12] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag,(1993).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [13] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig (1876).
- [14] J. L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 30(1978) 284-346.
- [15] E. Lindgren, P. Lindqvist, *Fractional eigenvalues*. NO-7491 Trondheim, Norway (2012) .
- [16] T.F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, *Nonlinear Analysis* 63 (2005) e1967-1977.
- [17] P.A Raviart J.-M. Thomas *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod.(2004)
- [18] H. S. Zhou, An application of a Mountain Pass theorem, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 18 (2002) 27-36.