

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

Test d'hypothèse (statistique) et prise de la décision

Présenté par :
BEDDDANE LATIFA

Soutenu : Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.MOULAI KHATIR Smain	MCB	C-Univ Naâma	Président
Dr.kHELOUATI Hafida	MCB	C-Univ Naâma	Examinatrice
Dr.KENOUZA Jamel	MCA	C-Univ Naâma	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Remerciement

Je tiens à remercier en premier lieu et avant tout ALLAH le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir notre travail dans les meilleures conditions.

Je tiens également à remercier du coeur mon encadreur Dr.KENOUZA Jamel , son aide précieuse et ses conseils judicieuses.

Je voudrai également remercier les membres de jury Dr.MOULAI KHATIR Smain et Dr. kHELOUATI Hafida maîtres de conférences au centre universitaire Salhi Ahmed de Naâma, qui m'ont fait l'honneur de juger ce modeste travail.

Table des matières

1	Un bref historique	7
2	Test d'hypothèse	11
2.1	Présentation	11
2.1.1	Les modèles statistiques paramétriques	12
2.1.2	Les modèles statistiques non paramétriques	12
2.1.3	Les caractères statistique	12
2.1.3.1	Population	12
2.1.3.2	Echantillon	13
2.1.4	l'estimation statistique	13
2.1.4.1	Estimation ponctuelle	13
2.1.5	Construction d'estimateurs	14
2.1.6	La méthode des moments	14
2.1.6.1	L'estimateur par la méthode des moments (EMM)	14
2.1.7	La méthode du maximum de vraisemblance	14
2.1.7.1	La fonction de vraisemblance	14
2.1.7.2	L'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV)	15
2.1.8	Les estimateurs	16
2.1.8.1	Estimateur sans biais	16
2.1.8.2	Estimateur asymptotiquement sans biais	16
2.1.8.3	Estimateur convergent	16
2.1.9	Estimation par intervalle de confiance	17
2.2	Test hypothèse statistique	18
2.2.1	Ecriture des hypothèses	18
2.2.2	La statistique	19
2.2.2.1	Les étapes d'un test d'hypothèse :	22
2.2.3	Tests statistiques paramétriques	23
2.3	Test non paramétriques	24
2.3.1	Test de Wilcoxon (Wilcoxon signed rank test)	25
2.3.2	Test de Mann-Whitney	26

3	Application	30
3.1	Comparaison d'un test paramétrique et un test non-paramétrique (test de Wilcoxon signed rank test et test de mann-whitney)	30
3.1.1	Les test paramétrique	30
3.1.2	Le test non paramétrique	32
3.2	Les commandes de logiciel R :	38
	Bibliographie	39

Table des figures

2.1	Principe de l'estimation statistique paramétrique	13
2.2	Estimateurs et biais	16
2.3	Intervalle de Confiance	18
2.4	Test unilatéral	20
2.5	Test bilatéral	20
2.6	Le choix de α et β	21

Liste des tableaux

2.1	Types d'erreurs et test d'hypothèses	21
-----	--	----

Introduction

Introduction Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous nous parlons sur un bref historique des tests d'hypothèses et essentiellement sur l'historique de test statistique paramétrique qui basent sur les distributions statistiques supposées dans les données et test statistique non paramétrique qui ne basent pas sur les distributions statistiques .

Dans le deuxième chapitre nous exposons l'idée des notions générales des tests d'hypothèses et nous nous intéressons sur le test statistique paramétrique le test statistique non paramétrique et on utilisé type des tests (test de Student, test de Wilcoxon (Wilcoxon signed rank test), test de mann-whitney) .

Dans le troisième chapitre, nous posons un exercice d'un comparaison de test paramétrique et non paramétrique (test de Wilcoxon signed rank test, test de mann-whitney) .

Chapitre 1: Un bref historique

Le terme statistique inférentielle d'abord désignée comme "statistique mathématique" (la théorie des probabilités y a une large place) ou "statistique inductive" (la démarche y est souvent inductive, plutôt que déductive, avec toute l'incertitude que cela sous-tend), elle prend son essor en Angleterre au début du XXe siècle, avec Ronald A. Fisher et Karl Pearson, pour répondre à des problèmes pratiques, en agronomie et en biologie.

La statistique inférentielle a un aspect décisionnel et le calcul des probabilités y joue un rôle fondamental, en particulier pour calculer les risques d'erreur.

Il s'agit d'estimer un paramètre inconnu dans la population à l'aide d'un échantillon, de valider ou affirmer une hypothèse dite « hypothèse de travail » formulée après une phase exploratoire et descriptive.

La statistique inférentielle a un aspect décisionnel et le calcul des probabilités y joue un rôle fondamental, en particulier pour calculer les risques d'erreur. La statistique inférentielle vise à étendre les propriétés constatées sur un échantillon à la population toute entière. Il s'agit d'estimer un paramètre inconnu dans la population à l'aide d'un échantillon, de valider ou affirmer une hypothèse dite « hypothèse de travail » formulée après une phase exploratoire et descriptive.

Les statisticiens de la recherche ont découvert que les tests d'hypothèses ne sont utiles que lors de l'étude de la population entière est impossible et que le chercheur doit plutôt analyser un échantillon de cette population (Blais, 1991).

Dans ce cas, comme l'échantillonnage comporte inévitablement une marge d'erreur, le test d'hypothèses vise à indiquer la probabilité d'obtenir les statistiques observées sur la base d'une hypothèse quant à la valeur d'un paramètre de la population.

Si le premier test d'hypothèses connu, le test du khi-carré, peut être attribué à Karl Pearson (1857-1936).[2]

Ronald Fisher (1890-1962) qui a d'abord esquissé la logique méthodologique des tests d'hypothèses, le test d'hypothèses vise à réfuter une hypothèse donnée, sans lui adjoindre d'hypothèse concurrente.

La logique de Fisher débute donc avec la formulation d'une hypothèse H , selon laquelle la statistique (la moyenne, par exemple) d'un échantillon aléatoire, tiré d'une population

hypothétique infinie, est égale à une valeur donnée.

Le test de la différence entre le paramètre de la distribution d'échantillonnage théorique et la statistique observée dans l'échantillon.

L'hypothèse sera rejetée si les valeurs comparées diffèrent de plus d'un écart convenu d'avance (Blais, 1991 ; Chow, 1996). Au départ, une certaine confusion peut provenir de l'évolution dans le temps du discours de Fisher : dans ses premiers écrits, il prône l'adoption de critères de signification fixes, alors que, dans les années 1950, il change de position et propose que ces critères puissent être variables.

Le chercheur statisticien devrait alors choisir la probabilité exacte obtenue, et non la valeur retenue du critère de signification (Gigerenzer, 1993).

Par ailleurs, en l'absence de résultats significatifs, c'est-à-dire de résultats permettant de rejeter H_0 , l'hypothèse n'est pas acceptée : le chercheur statisticien suspend alors son jugement. Selon Fisher, la finalité des tests était l'inférence inductive, bien que la probabilité obtenue soit d'obtenir les données observées en postulant la véracité de l'hypothèse nulle, donc $P(D|H_0)$. [2]

Le but des tests d'hypothèses :

- clarifier et définir le cadre rigoureux de ces études.
- fournir un formalisme précis pour toutes les situations.
- savoir si les différences mises en jeu sont importantes ("significatives" pour un seuil donné) ou non. [3]

Historiquement le test du khi-deux et le test de Pearson est le premier à avoir été proposé bien avant le développement formel de la théorie des tests par Jerzy Neyman et par Egon Pearson à partir de 1930.

Il a été mis au point vers 1900 par Karl Pearson, le père d'Egon, afin de vérifier sur des données biologiques certaines hypothèses tenant aux facteurs d'hérédité.

Jerzy Neyman (1894-1981) et Egon Pearson (1895-1980) font une contribution de tentative de consolider les travaux de Fisher de la transformer en une approche plus cohérente et rigoureuse (Gigerenzer, 1993).

Par conséquent, Neyman et Pearson délaissent l'inférence inductive pour mettre les tests d'hypothèses au service de la prise de décision dans des contextes pragmatiques.

Ainsi, ils ajoutent notamment à l'approche de Fisher une analyse dans une logique de coûts et de bénéfices (Chow, 1996). [2]

Fisher posait une seule hypothèse, Neyman et Pearson formulent une hypothèse testée

(H_0) et une contre-hypothèse ou hypothèse alternative (H_1). Ces deux hypothèses se doivent d'être exhaustives et mutuellement exclusives, de sorte que le rejet de l'une implique l'acceptation de l'autre, et vice-versa (Poitevineau, 2004).

Il s'ensuit l'introduction de deux types d'erreurs et de leur probabilité associée : l'erreur de type I (α), soit rejeter H_0 à tort, et l'erreur de type II (β), soit conserver H_0 à tort. Dans cette logique, les valeurs acceptables de α et β sont fixées a priori : il appartient au chercheur de déterminer les risques d'erreurs qu'il est prêt à assumer, et ce, en tenant compte des coûts relatifs à chaque type d'erreurs.

Soulignons qu'avec le concept d'erreur de type II apparaît aussi le concept de puissance statistique, qui est son complément en termes de probabilités ($1 - \beta$).[2]

Le caractère pragmatique de l'approche de Neyman et Pearson qui confère son utilité au calcul de la taille des effets observés (Blais, 1991).

Précisons finalement que, contrairement à Fisher, qui posait l'hypothèse d'une population infinie pour pouvoir utiliser le concept de distribution d'échantillonnage, Neyman et Pearson entendent leur interprétation des tests d'hypothèses dans un contexte de répétition ; ainsi, la probabilité α devient le pourcentage d'erreurs de type I, commises par le chercheur sur une grande série de répétitions de la même expérience et provenant du tirage successif d'échantillons aléatoires d'une même population (Blais, 1991).[2]

Thomas Bayes (1702-1761) fait des travaux et se distingue des approches précédentes en ce qu'elle vise à établir le degré de certitude par rapport à une hypothèse sur la base des données obtenues.

Il s'agit donc de $P(H|D)$, soit la probabilité de l'hypothèse H conditionnelle à l'observation des données D, le Saint Graal de l'inférence statistique, à une nuance près, c'est-à-dire le degré de certitude envers la vraisemblance de l'hypothèse et non de la probabilité que l'hypothèse soit effectivement vraie.

Or, le calcul de cette vraisemblance (évaluée comme une probabilité) requiert notamment du chercheur qu'il attribue une probabilité initiale à la véracité de l'hypothèse, ce qui devient subjectif dans la mesure où cette probabilité théorique est généralement inconnue. Ce procédé devient d'autant plus subjectif que l'ignorance du chercheur quant au phénomène observé est grande.

De plus, comme plusieurs chercheurs pourraient attribuer des probabilités initiales différentes à une même hypothèse, le procédé risque de refléter davantage les opinions du chercheur que la réalité (Blais, 1991 ; Chow, 1996).[2]

Que ce soit dans les textes que publient les revues en sciences et humaines et sociales les manuels de statistique, (pout le cadre de la formation des chercheurs); (Clark-Carter, 1997 ; Giguère, Hélie et Cousineau, 2004 ; Poitevineau, 2004), l'interprétation des tests

d'hypothèses fait appel à une logique mixte combinant des éléments des trois approches présentées.

D'abord, en accord avec Fisher, seule l'hypothèse nulle est généralement formulée (lorsqu'elle l'est explicitement), la visée est surtout l'inférence inductive où, conformément à sa position la plus récente, plusieurs seuils de signification sont utilisés (0,05 ; 0,01 et 0,001) et, souvent, les probabilités exactes sont publiées.

Puis, dans la veine des travaux de Neyman et Pearson, apparaissent les concepts d'erreurs de types I et II et, plus rarement, des considérations sur la taille de l'effet (maintenant largement utilisée en psychologie) et la puissance statistique.

L'interprétation des résultats est souvent bayésienne, dans le sens où l'on généralise régulièrement les résultats des tests d'hypothèses en les associant à la population de référence (et ce, bien que la probabilité conditionnelle obtenue en réalité aille dans l'autre sens). [2] Historiquement, le test de Wilcoxon (1945) est antérieur celui de Mann et Whitney (1947) sont proposé initialement par Wilcoxon .

Par la suite Mann et Whitney ont proposé une forme équivalente qui permet de préciser ses propriétés. Ils sont totalement équivalents.

Chapitre 2: Test d'hypothèse

2.1 Présentation

Dans ce chapitre, on va aborder deux types de statistique sont envisagés statistique paramétrique et statistique non paramétrique.

Dans la statistique paramétrique (l'estimation paramétrique) on suppose que l'échantillon que l'on a est extrait d'une population dont on connaît la forme de la distribution, et dont on cherche la meilleure valeur des paramètres qui la caractérisent (estimation ponctuelle) ou un intervalle de confiance qui contient ces paramètres avec une certaine probabilité (estimation par intervalle de confiance). [5]

Après on va étudier le test d'hypothèse c'est la méthode qui permettant de prendre une décision (accepter ou rejeter) à partir de l'étude d'un ou plusieurs échantillons aléatoires. Les tests statistiques ou les tests d'hypothèses ont donc pour but de vérifier, à partir de données observées dans un ou plusieurs échantillons, la validité de certaines hypothèses relatives à une ou plusieurs populations.

Les méthodes de l'inférence statistique nous permettent de déterminer, avec une probabilité donnée, si les différences constatées au niveau des échantillons peuvent être imputables au hasard ou si elles sont suffisamment importantes pour signifier que les échantillons proviennent de populations vraisemblablement différentes.

On distinguera deux classes de tests :

- Les tests paramétriques, requièrent un modèle à forte contraintes (normalité des distributions ou approximation normale pour des grands échantillons).
Quand ses conditions sont remplies, ils sont plus puissants que les tests non paramétriques.
- Les tests non paramétriques s'emploient lorsque les conditions d'applications des autres méthodes ne sont pas satisfaites, même après d'éventuelles transformations de variables. Ils peuvent s'utiliser même pour des échantillons de taille très faible. il n'y a pas d'hypothèse de normalité au préalable.[6]

2.1.1 Les modèles statistiques paramétriques

Le modèle statistique est décrit par un nombre fini de paramètres. Typiquement $\mathcal{M} = \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \mathbb{R}^P\}$ est le modèle statistique qui décrit la distribution des variables aléatoires observées.

Exemple : 1

— Observations réelles avec un seul mode :

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*\}, \text{ modèle Gaussien.}$$

$$\mathcal{M} = \{\Gamma(\alpha, \beta)I(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*\}, \text{ modèle loi Gamma.}$$

— Observations réelles avec plusieurs modes :

$$\mathcal{M}_K = \left\{ \sum_{i=1}^K p_i \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), (p_1, \dots, p_K) \in (0, 1)^K, \sum_i p_i = 1, (\mu_1, \dots, \mu_K) \in \mathbb{R}^K, \sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*} \right\}, \text{ modèle de mélange Gaussien.}$$

— Observations de comptage :

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{P}(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}, \text{ modèle loi Poisson.}$$

2.1.2 Les modèles statistiques non paramétriques

En statistique non paramétrique, le modèle n'est pas décrit par un nombre fini de paramètres.

Exemple : 2

— On s'autorise toutes les distributions possibles, i.e on ne fait aucune hypothèse sur la forme de la distribution des variables aléatoires.

— On travaille sur des espaces fonctionnels, de dimension infinie.

Exemple : les densités continues sur $[0; 1]$, ou les densités monotones sur \mathbb{R} .

— Le nombre de paramètres du modèle n'est pas fixé et varie avec le nombre d'observations (infini).[11]

2.1.3 Les caractères statistique

2.1.3.1 Population

La statistique des populations a occupé une place centrale aux débuts de la statistique le terme de populations s'applique à tout objet statistique étudié qu'il s'agisse d'étudiants (d'une université ou d'un pays), déménages ou de n'importe quel autre ensemble sur lequel on fait des observations statistiques.[7]

Définition 1

On appelle une population est l'ensemble sur lequel porte notre étude statistique. Cette ensemble est noté, par exemple : Ensemble des habitants d'une ville, ensemble des étudiants d'une école.[7]

2.1.3.2 Echantillon

En générale , un échantillon est une petite quantité d'une matière, d'information, ou d'une solution. En statistique, un échantillon est un ensemble d'individus extraits d'une population initiale de manière aléatoire de façon à ce qu'il soit représentatif de cette population.

2.1.4 l'estimation statistique

Il existe deux formes d'estimation dont l'objectif principal est d'approcher numériquement la valeur du paramètre inconnu.

1. Estimation ponctuelle attribuer une valeur unique à θ (ou encore à θ).
2. Estimation par intervalle de confiance : attribuer un ensemble de valeurs à θ .[4]

2.1.4.1 Estimation ponctuelle

Définition 2

La statistique dont la valeur est la fonction des observations qui est utilisée pour obtenir un estimation est appelée l'estimateur du paramètre θ qui demande que les valeurs que peut prendre cette statistique appartiennent à l'ensemble des valeurs que peut prendre le paramètre θ .[5]

Définition 3

On dit que un estimateur de θ est une variable aléatoire θ^n telle que la fonction $T_n : \mathbb{E}^n \rightarrow \Theta$ avec $\tilde{\theta}_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$, donc est une fonction de l'échantillon.[5]

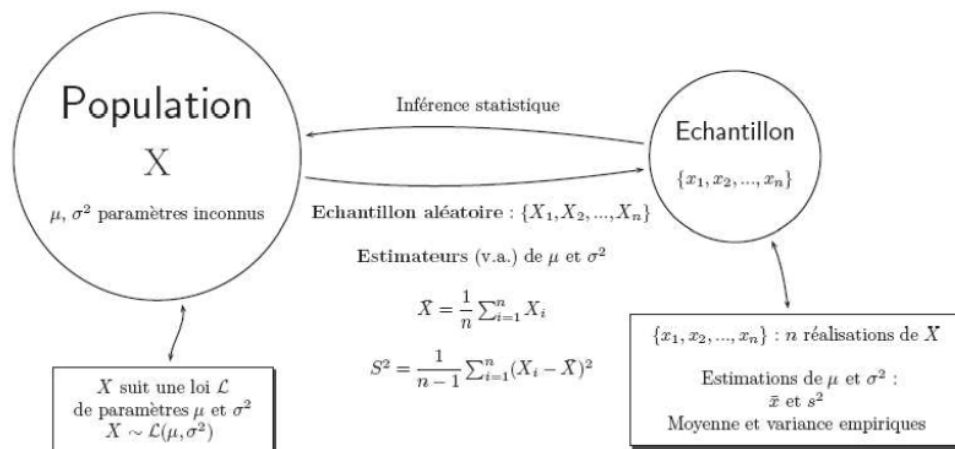


FIGURE 2.1 – Principe de l'estimation statistique paramétrique

2.1.5 Construction d'estimateurs

On distingue des nombreuses méthodes pour estimer un paramètre θ , nous ne nous intéressons qu'aux deux méthodes d'estimation les plus usuelles, la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance.[5]

2.1.6 La méthode des moments

2.1.6.1 L'estimateur par la méthode des moments (EMM)

Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi des X_i , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon.

Autrement dit, si $\theta = E(X)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments (EMM) est $\tilde{\theta}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

De la même manière, on estime la variance de la loi des X_i par la variance empirique de l'échantillon

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$$

Plus généralement, si la loi des X_i a deux paramètres θ_1 et θ_2 tels que :

$(E(X), Var(X)) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$, où φ est une fonction inversible, alors les estimateurs de θ_1 et θ_2 par la méthode des moments sont $(\tilde{\theta}_{1n}, \tilde{\theta}_{2n}) = \varphi^{-1}(\bar{X}_n, S_n^2)$.

Exemple : 3 (Loi normale)

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de même loi normale $N(m, \sigma^2)$, $E(X) = m$ et $Var(X) = \sigma^2$, donc les estimateurs de m et σ^2 par la méthode des moments sont $m_n = \bar{X}_n$ et $\tilde{\sigma}^2$. [9]

2.1.7 La méthode du maximum de vraisemblance

2.1.7.1 La fonction de vraisemblance

Définition 4

C'est les observations sont toutes discrètes ou toutes continues, on appelle fonction de vraisemblance (ou plus simplement vraisemblance) pour l'échantillon x_1, \dots, x_n , la fonction du paramètre θ :

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont discrètes .} \\ f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{si les } X_i \text{ sont continues .} \end{cases}$$

les X_i sont indépendantes et de même loi. Dans ce cas, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i; \theta) \\ \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \end{cases} \quad [5]$$

Remarque 1

La probabilité et la densité utilisées dans cette définition sont des fonctions des observations x_1, \dots, x_n , dépendant du paramètre θ . A l'inverse, la fonction de vraisemblance est considérée comme une fonction de θ dépendant des observations x_1, \dots, x_n , ce qui permet, par exemple, de dériver cette fonction par rapport à θ . [5]

2.1.7.2 L'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV)

Définition 5

L'estimation de maximum de vraisemblance de θ est la valeur $\tilde{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n)$. L'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) de θ est la variable aléatoire correspondante.

Exemple : 4 (Loi normale)

Si les X_i sont de loi $N(m, \sigma^2)$, la fonction de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-m)^2} \end{aligned}$$

D'où $\ln \mathcal{L}(m, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$.

On doit annuler les dérivées partielles de ce logarithme par rapport à m et σ^2 . On a :

$$- \frac{\partial}{\partial m} \ln \mathcal{L}(m, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n -2(x_i - m) = \frac{1}{\sigma^2} (\sum_{i=1}^n x_i - nm),$$

qui s'annule pour $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n$.

$$- \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln \mathcal{L}(m, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2,$$

qui s'annule pour $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$.

\hat{m}_n et $\hat{\sigma}_n^2$ sont les valeurs de m et σ^2 qui vérifient les deux conditions en même temps.

On a donc $\hat{m}_n = \bar{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = S_n^2$. [9]

2.1.8 Les estimateurs

2.1.8.1 Estimateur sans biais

Définition 6

On dit que la quantité $b_n(\theta) = E_\theta(T_n) - \theta$ s'appelle biais de l'estimateur T_n . Un estimateur T_n de θ est dit sans biais ou non-biaisé si :

$$b_n(\theta) = 0 \text{ soit } E(T_n) = \theta [5]$$

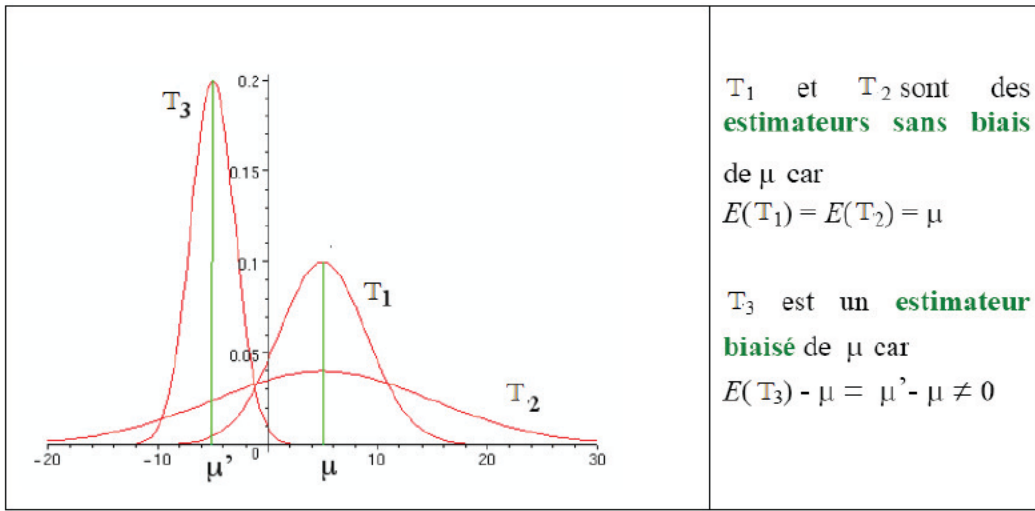


FIGURE 2.2 – Estimateurs et biais

2.1.8.2 Estimateur asymptotiquement sans biais

Définition 7

On définit un estimateur T_n de θ est dit asymptotiquement sans biais si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(\theta) = 0$$

[5]

2.1.8.3 Estimateur convergent

Définition 8 (Estimateur convergent)

L'estimateur est dit convergent si la suite (T_n) converge en probabilité vers θ :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P} (|T_n - \theta| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour qu'un estimateur asymptotiquement sans biais soit convergent il suffit que

$$\text{Var}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque 2

On a l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff (B-T) dit que :

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) < 1$. Alors pour tout $t > 0$,

$$P(|X - E(X)| > t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$$

[13]

2.1.9 Estimation par intervalle de confiance

Définition 9 (Définition général)

On dit que pour une probabilité α petite, de l'ordre de 0.01 ou 0.05, si on fixe α , avec la probabilité $(1 - \alpha)$ et le paramètre θ il existe une infinité de tels intervalles, appelés intervalles de confiance de niveau α de la forme $[\theta_1, \theta_2]$ vérifiant $P(\theta \in [\theta_1, \theta_2]) = 1 - \alpha$, ou $P(\theta < \theta_1) = \alpha/2$; $P(\theta > \theta_2) = \alpha/2$; $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. En pratique on utilise deux sortes d'intervalles de confiance :

- les intervalles de confiance bilatéraux symétrique $[\theta_1, \theta_2]$ désormais unique puisque $P(\theta < \theta_1) = P(\theta > \theta_2) = \alpha/2$; ces intervalles standard conviennent parfaitement au cas où la loi de l'estimateur $\hat{\theta}$ est symétrique (Normale, Student,...), mais ils conviennent aussi de façon générale.
- les intervalles unilatéraux à gauche $]-\infty, \theta_1]$, ou à droite $[\theta_2, +\infty[$ qui conviennent à des situations spécifiques; par exemple, s'il s'agit d'estimer la proportion p de pièces défectueuses d'un lot, on cherche à borner supérieurement p , donc $p \leq p_1$: dans ce cas $P(p \leq p_1) = 1 - \alpha$ [5]

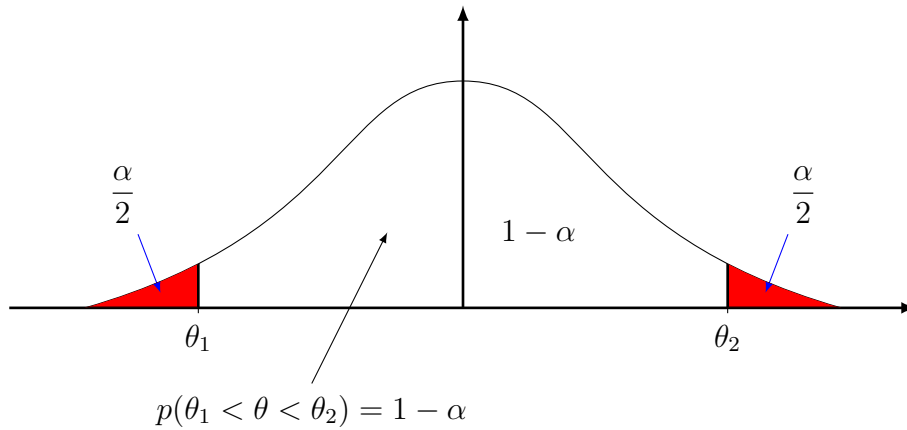


FIGURE 2.3 – Intervalle de Confiance

2.2 Test hypothèse statistique

Définition 10 (Test hypothèse)

Pour formuler l'hypothèse statistique on a :

- Une hypothèse nulle : notée H_0 , est celui qui l'on considère vraie à priori
- Une hypothèse alternative : notée H_1 , est un hypothèse complémentaire de H_0 .

Remarque 3

Le but du test est de décider si cet à priori est crédible. [12]

Exemple : 5

Sous H_0 , le médicament n'a pas d'inuence, sous H_1 il en a une.[12]

2.2.1 Ecriture des hypothèses

Soit μ_1 et μ_2 les moyennes de tension des deux échantillon correspondant à la prise de médicament .

Pour démontrer que le médicament augmente la tension est de montrer que μ_2 est different de μ_1 . Les hypothèses mécrit alors { H_0 : les moyennes des deux échantillon sont égales } et { H_0 : les moyennes des deux échantillon sont differentes } . On la formule de l'hypothèse :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2[12]$$

Remarque 4

- On remarque que les deux hypothèses ne sont pas symétriques. H_1 est choisie uniquement par d'efaut si H_0 n'est pas considérée comme crédible.
- En général pour le choix de H_0 et de H_1 estimposé par le test qu'on utilise et ne relève donc pas de l'utilisateur.[12]

2.2.2 La statistique

La statistique S est une fonction qui résume l'information sur l'échantillon qu'on veut tester.

- La statistique observée et notée S_{obs} est une variable aléatoire, définie indépendamment des données observées.
- La statistique critique et notée S_{crit} ou S_{tabul} , car elle choisi par un tableau statistique [12]

Définition 11 (Test statistique)

Un test statistique est une procédure de décision entre deux hypothèses concernant un ou plusieurs échantillons.[12]

La taille de l'échantillon	$T(X_0, \dots, X_n)$	La variance de population σ^2
	$Z = \frac{(X_n - \mu_0)}{\sigma}$	connue
$n \leq 30$	$t = \frac{(X_n - \mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	inconnue
$n > 30$	$t_n = \frac{(X_n - \mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	inconnue

Avec :

$$Z = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \text{ est un test de moyenne}$$

$$t = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \text{ est un test de Student}$$

$$t_n = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \text{ est test de loi normal}$$

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

Définition 12 (Probabilité critique)

La probabilité critique (ou p-valeur) est la probabilité ,sous H_0 , que la statistique soit au moins aussi éloignée de son espérance que la valeur observée.

- Si le test est unilatéral à gauche, la probabilité critique est $P(S < S_{obs})$.

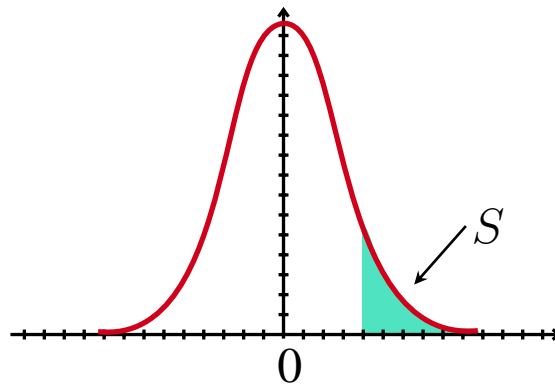


FIGURE 2.4 – Test unilatéral

— Si le test est bilatéral et que la loi de la statistique est symétrique par rapport à 0, la probabilité critique est $P(S > S_{obs})$. [12]

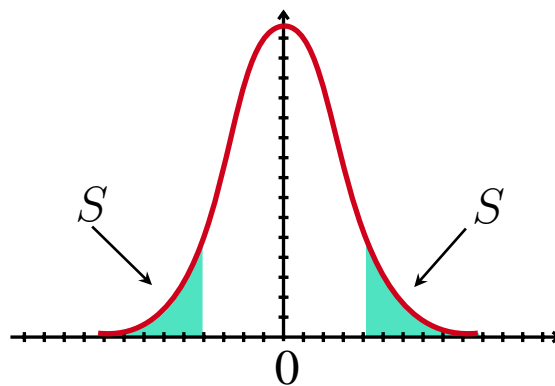


FIGURE 2.5 – Test bilatéral

Définition 13 (Le risque d'erreur)

Il y a plusieurs type de risque d'erreur Pour choisi une la probabilité qui permet de prendre une l'hypothèse (H_0 , H_1) on pose :

1. Risque d'erreur de première espèce α (confiance) :

Le risque est la probabilité sous H_0 de la région de rejet. $\alpha = P_{H_0}(H_1)$

La quantité $1 - \alpha$ est la confiance du test.

- Dans le cas de variables continues, on choisir une valeur de décision de α et obtenir une région de rejet présentant exactement le risque α .
- Dans le cas de variables discrètes, le risques possibles est dénombrable danc on fixe un risque, dit risque nominal.
- Dans le cas de test multiple, α varie généralement entre 0.01 et 0.05.

2. *Risque d'erreur de deuxième espèce β (puissance) :*

c'est la probabilité qui d'accepter H_0 et H_1 est considérée comme fausse. alors que la vérité est H_1 . $\beta = P_{H_1}(H_0)$ La quantité $1 - \beta$ est la puissance du test.

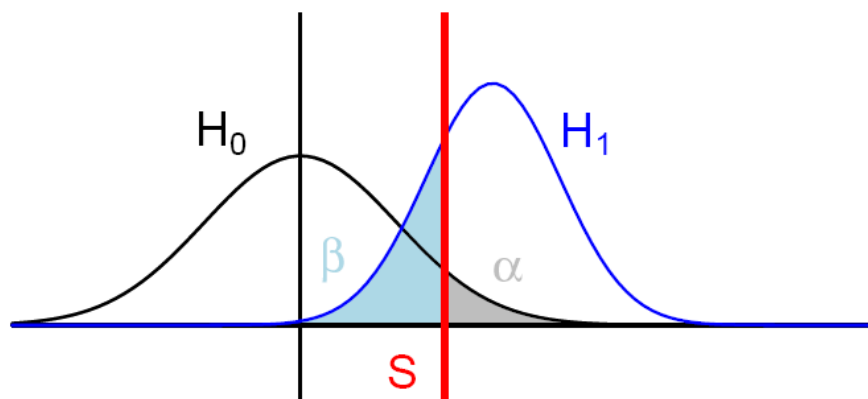


FIGURE 2.6 – Le choix de α et β

Remarque 5

On resumé les risques d'erreurs et la décision en 4 cas possibles schématisés dans le tableau ci-dessous avec les probabilités correspondantes

Décision \ Réalité	H_0 est vraie	H_1 est vraie
H_0 est retenue	$1 - \alpha$	β
H_1 est retenue	α	$1 - \beta$

TABLE 2.1 – Types d'erreurs et test d'hypothèses

— Il y a le type de statistique on peut , le test paramétrique ou le test non-paramétrique. [12]

Définition 14 (Règles de décision)

les tests hypothèses (test unilatéral ou test bilatéral) sont posées, pour choisi la statistique et pour le réaliser. En comparant la valeur de cette statistique observée dans l'échantillon à sa valeur sous l'hypothèse H_0 que nous pourrons prendre une décision c'est-à-dire donner la conclusion du test.[8]

— Règle de décision 1 :

— si la valeur de la statistique S calculée ou observée est supérieure à la valeur critique de S : $S_{obs} > S_{crit}$.

Alors l'hypothèse H_0 est rejetée au risque d'erreur α et l'hypothèse H_1 est acceptée au risque d'erreur α .

— si la valeur de la statistique S calculée est inférieure à la valeur critique S théorique :

$$S_{obs} \leq S_{crit}$$

Alors l'hypothèse H_0 ne peut être rejetée au risque d'erreur α .

— Règles de décision 2 :

La probabilité critique α telle que : $P(S \geq S_{obs}) = \alpha_{obs}$ est évaluée.

Si le risque d'erreur α est fixé à 0,05 :

— si $\alpha_{obs} \geq 0,05$ l'hypothèse H_0 ne peut être rejetée car le risque d'erreur de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie est trop important.

— si $\alpha_{obs} \leq 0,05$ l'hypothèse H_0 est rejetée car le risque d'erreur de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie est très faible.

— si $\alpha_{obs} < 0,05$ l'hypothèse H_0 est rejetée car le risque d'erreur de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie est très faible.[8]

— Règle de décision de NEYMAN et PEARSON

Neyman et Pearson proposée une décision par consiste à déterminer la région critique pour laquelle la puissance est maximum sous la contrainte $\alpha \leq \alpha_0$.

la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle , si On fixe un critique maximum α_0 au risque de première espèce et on cherche un test qui minimise le risque de seconde espèce.

Alour la formule de test d'hypothèses est :

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

2.2.2.1 Les étapes d'un test d'hypothèse :

1. Formuler les hypothèses H_0 et H_1 .
2. Déterminer la statistique utilisée T ainsi que sa distributio .
3. Choisir la suil signification (typiquement 1% au 5%) .

4. Prelever un échantion et calculer la valeur théorique t de la statistique utilisée qui sera comparée au suil critique(S)a fin de prendre la décision .
5. Adopter une règle de décision (à partir des valeurs critique).
Il existe un seuil critique S au delà duquel une observation t de T tendra à rejeter l'hypothèse H_0 .D'où la règle :
Si $t < S$, on "accepte" l'hypothèse H_0 .
Si $t > S$, on "rejete" l'hypothèse H_0 .

2.2.3 Tests statistiques paramétriques

On parle sur un tests paramétriques lorsque l'on stipule que les données sont issues d'une distribution paramétrée. Dans ce cas, les caractéristiques des données peuvent être résumées à l'aide de paramètres estimés sur l'échantillon, la procédure de test subséquente ne porte alors que sur ces paramètres.

Le test d'hypothèse est basé sur plusieurs types des tests d'hypothèses sont différent étudié et fonctionè selon la nature de la population dont provient l'échantillon

Le test paramétrique, on distingue généralement entre hypothèses simples et hypothèses composites :

- Une hypothèse simple est du type $H : \theta = \theta_0$ où θ_0 est une valeur isolée du paramètre.
- Une hypothèse composite ou multiple est du type $H : \theta \in A$ où A est une partie de \mathbb{R} non réduite à un élément et la plupart des hypothèses composites se ramènent aux cas :
 $\theta > \theta_0$ ou $\theta < \theta_0$ ou $\theta \neq \theta_0$.

Lorsque l'hypothèse alternative est composite,la région critique puissance $1 - \beta(\theta)$.

Définition 15 (Test paramétrique)

Un test paramétrique est un test pour lequel on fait une hypothèse sur la forme des données sous H_0 (normale, Poisson, ...). Les hypothèses du test concernant alors les paramètres gouvernant cette loi.[6]

Définition 16 (Test de Student)

Est un test paramétrique d'un seul échantillon soit n un échantillon (X_1, \dots, X_n) de la loi $N(\mu, \sigma^2)$ aves μ et σ inconnu on veut tester par la statistique le test Student :

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Exemple : 6

Une forniseur déide de fixer le prix de son produit chez ses clients au niveau national . On suppose que la distribution des prix suit une loi normale de paramètres $m = 100$ DA et $\sigma = 10$ DA . On vérifie le prix de vente de 36 clients , on trouve que $\bar{X} = 105$. Tester l'hyposèse suivant :

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m \neq m_0 \end{cases}$$

avec : $\alpha = 0.05$

on a :

$n = 36$, $\bar{X} = 105$, $\sigma = 10$, $\alpha = 0.05$.

La formulation du test :

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 = 100 \\ H_1 : m \neq m_0 \end{cases}$$

Puisque $n > 30, \sigma$ connu donc :

La statistique :

$$t = \frac{(\bar{X} - m_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Suit approximativement une $N(0, 1)$.

Puisque $H_1 : m \neq m_0$ alour il sagit d'un test bélatéral .

$$t_{crit} = t_{1-\alpha/2} = t_{0.975} = 1.96$$

$$t_{obs} = (105 - 100)/(10/6) = 3.01$$

Donc $t_{obs} > t_{crit}$ alour On rejet H_0

2.3 Test non paramétriques

Les tests non paramétriques ne font aucune hypothèse quant à la loi de distribution de la variable étudié.

Les statistiques utilisées basées sur les rangs et nécessitent l'utilisation de tables spécifiques.

Bien qu'il existe un grand nombre de tests non paramétriques, nous allons : le test de Mann-Whitney, le test de Wilcoxon

Définition 17 (Test non-paramétrique)

Un test non paramétrique est un test ne nécessitant pas d'hypothèse sur la forme des données. Les données sont alors remplacées par des statistiques ne dépendant pas des moyennes variances des données initiales (tables de contingence, statistique d'ordre ...). [12]

Définition 18 (Test non-paramétrique)

En statistique non paramétrique , le modèle décrit par un nombre infini des paramètres soit x_1, \dots, x_n une suite des variables aléatoires réelles de f de F on suppose que $f \in F$ espace fonctionnelle et on note \tilde{f}_n un estimateur non paramétrique de f

2.3.1 Test de Wilcoxon (Wilcoxon signed rank test)

Le test de Wilcoxon est un test non paramétrique qui permet de tester si deux populations appariées ont même moyenne en se basant sur deux échantillons.

Sur les N paires observées, il reste qu'un échantillon de n différences non nulles (on enlève les éléments de différence nulle)

Soient d_i (pour $i = 1$ à n) les différences entre chaque paire d'observations.

Nous classons les rangs des valeurs absolues de ces différences.

La statistique de Wilcoxon tient compte uniquement des rangs des observations.

La statistique de rangs signés de Wilcoxon s'écrit :

$$W = \min\left(\sum_{d_i > 0} r_i, \sum_{d_i < 0} r_i\right)$$

Pour utilisé le test de Wilcoxon on fait les hypothèses suivantes :

- On pose un échantillons aléatoires des populations
- Indépendance des données dans chaque échantillon
- Choisi deux échantillons indépendans

Les principes du test de Wilcoxon

- On choisi deux échantillons aléatoires A et B .
- On calcule la différences entre A et B .
- On classe les valeurs des différences de façon croissante .
- On calcule les rangs et les rangs moyenne
- Formuler les hypothèses
- Calculer la statistique W
- On prend une décision [15]

Règle de décision :

On ne peut rejeter H_0 si $W \in]W_{\alpha/2}, W_1 - \alpha/2[$ avec $W_1 - \alpha/2 = n(n + 1)/2W_{\alpha/2}$. Les tables ne donnent que $W_{\alpha/2}$: on rejette H_0 lorsque $W < W_{\alpha/2}$ dans le cas bilatéral.

Dans le cas des « grands » échantillons, lorsque n est supérieur à 25, il peut être démontré que la somme des rangs est pratiquement normale ; on utilise alors l'approximation normale

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

[3]

Remarque 6

Le test de Mann-Whitney est très général et n'utilise que les valeurs relatives des variables entre elles.[11]

Exemple : 7

Un échantillon aléatoire de dix étudiants est consulté pour noter, dans un test à l'aveugle, la qualité de deux types de bière, l'une locale, l'autre importée. Les notes sont sur une échelle de 1 (pas bon) à 10 (excellent). Utiliser le test de Wilcoxon pour tester l'hypothèse nulle "la distribution des différences entre paires est centrée sur zéro" contre l'hypothèse alternative "La population des étudiants buveurs de bières préfère la catégorie d'importation.

Etudiant	Locale	Import
A	2	6
B	3	5
C	7	6
D	8	8
E	7	5
F	4	8
G	3	9
H	4	6
I	5	4
J	6	9

Différences	-4	-2	1	0	2	-4	-6	-2	1	-3
Tri	0	1	1	-2	2	-2	-3	-4	-4	-6
rang		1	2	3	4	5	6	7	8	9
RANG moyen		1,5	1,5	4	4	4	6	7,5	7,5	9
$r_i > 0$		1,5	1,5		4					
$r_i < 0$				4		4	6	7,5	7,5	9

Ainsi $W = \min(7, 38) = 7$

On a $W_{0,05} = 8$ (test unilatéral).[3]

2.3.2 Test de Mann-Whitney

Le test de Mann-Whitney est un test non paramétrique qui permet de considérer deux échantillons E1 et E2 de populations indépendantes ont même moyenne et d'observer la variable étudiée. Les valeurs doivent être ordonnées (numériques). Il ne nécessite pas de connaître les valeurs des échantillons mais leurs rangs. On suppose donc toujours que l'on dispose de deux échantillons x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_m issus de variables numériques ou ordinales indépendantes, de lois respectives \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_Y . On teste $H_0 : \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$ ou encore par rapport aux fonctions de distribution $H_0 : F_X = F_Y$.

Le test de Mann-Whitney compte le nombre de couples pour lesquels $X_i < Y_j$. L'alternance des X_i et des Y_j devrait être assez régulière sous H_0 . On aura des doutes sur H_0 si les Y_j sont plutôt

plus grands que les X_i , ou plus petits ou plus fréquents dans une certaine plage de valeurs.

Statistique du test de Mann-Whitney :

$$U_{n,m} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 1_{\{x < y\}}(X_i, Y_j)$$

où $1_{x < y}(X_i, Y_j)$ vaut 1 si $X_i < Y_j$, 0.5 si $X_i = Y_j$ et 0 sinon

C'est le nombre de termes Y_j supérieurs à la médiane de $X \cup Y$.

On comptera, pour chaque valeur x_i du premier échantillon, le nombre de valeurs y_j du deuxième échantillon telles que $y_j \geq x_i$ (On comptera 0.5 pour chaque y_j est égal à x_i). On notera U_1 cette valeur obtenue à partir du premier échantillon et U_2 la valeur trouvée en échangeant les rôles des échantillons. Seule la plus petite des deux valeurs trouvées sera comparée aux tables.

On peut également calculer cette statistique en considérant la somme R_1 de tous les rangs après ordonnancement des observations de la première population. On a alors

$$U_1 = n(1) * n(2) + [n(1) * (n(1) + 1)/2] - R(1)$$

$$U_2 = n(1) * n(2) + [n(2) * (n(2) + 1)/2] - R(2)$$

Règle de décision : dans le cas d'un test bilatéral, on prend $u = \min(u_1, u_2)$. On rejette H_0 si $u \in [0, m_\alpha]$ avec m_α donné par la table de Mann et Whitney.

En supposant l'hypothèse nulle que les positions centrales des deux populations sont les mêmes, la variable U de Mann-Whitney vérifie

$$E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}. \quad Var(U) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}.$$

Ainsi pour des échantillons de grande taille, la distribution de la variable aléatoire

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

est approximativement la loi normale centrée réduite.[3]

Les principes du test de Mann-Whitney

- le test de M-W est strictement équivalent au Wilcoxon
- Les hypothèses identiques au Wilcoxon .
- le test de Mann-Whitney le test de Wilcoxon, est symétrique
- On calcule les rangs et les rangs moyenne
- Idée un peu différente de celle du Wilcoxon
- Fusion des 2 échantillons

- Noter le groupe d'origine de chaque valeur
- Définir une statistique de test en comparant 2 à 2 les x_i et x_j [15]

Exemple : 8

On a noté la durée de vie d'une composante électronique produite dans deux départements différents.

On souhaite tester si la durée de vie moyenne de cette composante est la même dans deux départements.

On dispose des résultats suivants :

Département A	19	26	30	23	17	20
Département B	21	25	29	31	33	

Effectuer le test statistique qui convient.

Il s'agit d'un test de comparaison non paramétrique sur deux échantillons indépendants.

On effectue donc un test

On peut présenter les calculs de la manière suivante :

Durée de vie	17	19	20	21	23	25	26	29	30	31	33	
Département	A	A	A	B	A	B	A	B	A	B	B	
n_A	5	5	5		4		3		2			$U_1 = 24$
n_B				3		2		1				$U_2 = 6$

La formulation du test

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Le risque : $\alpha = 0.05$

La variable de décision : $U = \min(U_1, U_2) = 6$

La région critique : n_1 et n_2 sont petits, on lit U_α dans le tableau de Mann-Whitney

$$U_{0.05} = 3$$

donc $U_{0.05} = 3 < U$, alors on accepte H_0 .

Exemple : 9

La taille des feuilles de ronces ont été mesurées pour voir si il y a une différence entre la taille des feuilles qui poussent en plein soleil et celles qui poussent à l'ombre. Les résultats sont les suivants

Soleil	6.0	4.8	5.1	5.5	4.1	5.3	4.5	5.1
Ombre	6.5	5.5	6.3	7.2	6.8	5.5	5.9	5.5

Valeurs ordonnées

E_1	4.1	4.5	4.8	5.1	5.1	5.3		5.5				6.0				
E_2							5.5		5.5	5.5	5.9		6.3	6.5	6.8	7
rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
rang moyen	1	2	3	4.5	4.5	6	8.5	8.5	8.5	8.5	11	12	13	14	15	16

$$R_1 = 1 + 2 + 3 + 4.5 + 4.5 + 6 + 8.5 + 12 = 41.5$$

$$R_2 = 8.5 + 8.5 + 8.5 + 11 + 13 + 14 + 15 + 16 = 94.5$$

$$U_1 = n(1) * n(2) + [n(1) * (n(1) + 1)/2] - R(1)$$

$$U_1 = 58.5$$

$$U_2 = n(1) * n(2) + [n(2) * (n(2) + 1)/2] - R(2)$$

$$U_2 = 5.5$$

Dans tous les cas, on obtient la valeur $U = \min(U_1, U_2) = 5.5$.

Ensuite on utilise la table de Mann-Whitney au risque de 5% ($n_1 = 8, n_2 = 8$), pour obtenir une valeur $m_\alpha = 13$.

On rejettera l'hypothèse nulle si U est inférieure à la valeur m . Dans le cas de l'exemple, comme $U < m_\alpha$, on rejette H_0 . La différence entre la taille des feuilles à l'ombre et au soleil est donc significative au risqu $\alpha = 5\%$ [3]

Chapitre 3: Application

3.1 Comparaison d'un test paramétrique et un test non-paramétrique (test de Wilcoxon signed rank test et test de mann-whitney)

On dispose de deux échantillons (mâles et femelles) de Souris des Cactus (*Peromyscus eremicus*), dont on a mesuré le poids (g) chez l'individu adulte

— Echantillon femelle ($n = 6$) : 24; 30; 30; 30; 38; 40

— Echantillon mâle ($n = 4$) : 20; 24; 26; 28

Dans cette exemple les questions qui ne peut pose :

1. La population de souris femelles (F) est-elle significativement différente de celle des souris mâles (M) de par leur poids (cf. dimorphisme sexuel)? Si oui, avez vous une hypothèse a priori sur le sens de la différence?
2. Quelles sont les hypothèses H_0 et H_1 que vous allez formuler pour cet exemple?

[14]

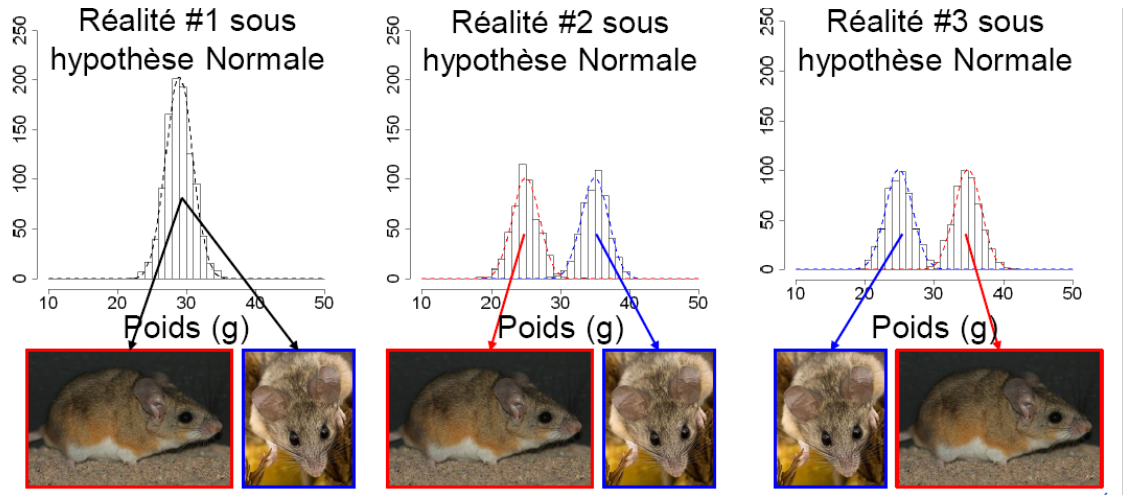
3.1.1 Les test paramétrique

On pose une hypothèse de travail :

H_0 : mâles et femelles ont le même poids

H_1 : mâles et femelles ont des poids différents

Les question qui se pose :



1. si les conditions d'utilisation des test paramétriques étaient remplies, quel type de test utiliseriez vous ?
2. sommes-nous réellement dans ce cas de figure ?

[14]

Remarque 7

On a remarqué que étant donné la taille de nos échantillons mâle et femelle, leurs variances respectives ont de fortes chances d'être différentes.[14]

La formulation du test :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2(F) = \sigma^2(M) \\ H_1 : \sigma^2(F) \neq \sigma^2(M) \end{cases}$$

$$Var(F) = 35.2$$

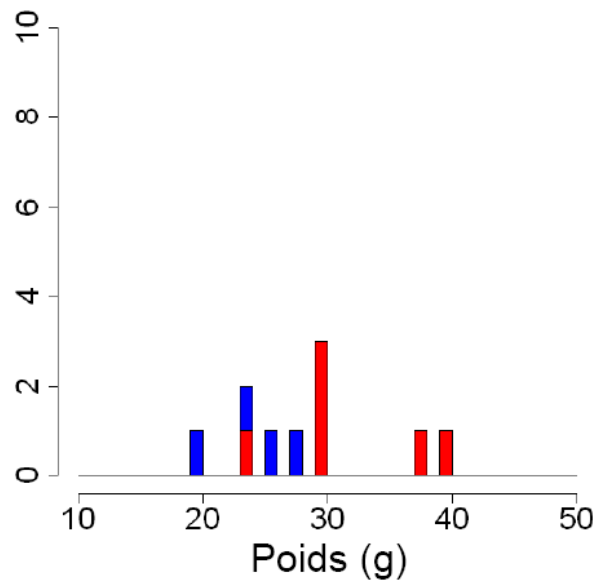
$$Var(M) = 11.7$$

La statistique de test (F) :

Et en va Suivant le test de Fisher :

$$F_{obs} = \frac{Var(F)}{Var(M)}$$

$$F_{obs} = 35.2/11.7 = 3.0 < F_{crit}(0.05, 5, 3) = 9.0$$



Règle de décision :

On ne rejette pas H_0 Comme nous n'avons pas d'éléments pour contredire H_0 "les variances sont égales" on pourrait éventuellement utiliser un test paramétrique du type test t de Student.

Ce type de test est fortement recommandé quand les échantillons sont de petites tailles car la variance est de plus en plus variable, même pour des échantillons issus de la même population $N(\mu, \sigma)$.

Donc, le risque de ne pas satisfaire la condition d'égalité des variances en paramétrique augmente.[14]

Remarque 8

Pour plus de robustesse, on utilise le test non paramétrique de Wilcoxon sur échantillons non appariés encore appelé test de Mann-Whitney suivant la manière dont on calcul les rangs pour chaque échantillon.[14]

3.1.2 Le test non paramétrique

Le test non paramétrique de Wilcoxon-Mann-Whitney ne fait aucune hypothèse sur la forme de la distribution d'origine S'il est moins précis que son homologue paramétrique, il est aussi plus robuste car permet de déceler n'importe quel type de différence entre deux échantillons.[14]

— **Méthode de calcul des rangs $W(M)$ et $W(F)$ selon Wilcoxon :**

$$W(M) = 1 + 2.5 + 4 + 5 = 12.5$$

$$W(F) = 2.5 + 21 + 9 + 10 = 42.5$$

[14]

— **Méthode de calcul des rangs $U(M)$ et $U(F)$ selon Mann-Whitney :**

Poids	20	24	26	28	30	38	40
M	1	1	1	1			
F	1				3	1	1
M+F	1	2	1	1	3	1	1
Rang	1	2 3	4	5	6 7 8	9	10
Rang moyen	1	2.5	4	5	7	9	10
Rang(M)	1	2.5	4	5			
Rang(F)		2.5			21	9	10

M	20	24	26	28						Tot
F		24			30	30	30	38	40	
					1	+1	+1	+1	+1	5
					1	+1	+1	+1	+1	5
		0.5	+		1	+1	+1	+1	+1	5.5
		1	+		1	+1	+1	+1	+1	6
F		24			30	30	30	38	40	
M	20	24	26	28						Tot
		0.5	+1	+1						2.5

$$U(M) = 5 + 5 + 5.5 + 6 = 21.5$$

$$U(F) = 2.5$$

Il existe une formule de passage entre l'indice U des rangs de Mann-Whitney et l'indice T des rangs de Wilcoxon :

$$\begin{aligned} U(M) &= n(M) * n(F) + [n(M) * (n(M) + 1)/2] - T(M) \\ &= 4 * 6 + (4 * 5)/2 - 12.5 \\ &= 21.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(F) &= n(M) * n(F) + [n(F) * (n(F) + 1)/2] - T(F) \\ &= 4 * 6 + (6 * 7)/2 - 42.5 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

On utilise l'une des deux méthodes de calcul des rangs (celle avec laquelle vous vous sentez le plus à l'aise) et calculez ensuite les indices U respectifs si vous optez pour la méthode des rangs de Wilcoxon.

Car la table de Mann-Whitney de détermination de la valeur critique est plus simple à utiliser que la table de Wilcoxon pour le cas de deux échantillons non appariés.[14]

Remarque 9

Pour comprendre la méthode du test de Wilcoxon et test Mann-Whitney, il faut (1) étudier les deux cas limites :

"les deux échantillons sont totalement identiques"

"les deux échantillons sont totalement différents" et (2) calculer les rangs $U(M)$ et $U(F)$ dans chacun de ces deux cas :

— **Le cas limite de deux échantillons "totalement" identiques de par le poids (g) :**

Echantillon femelle ($n = 6$) : 28; 28; 29; 29; 30; 30

Echantillon mâle ($n = 4$) : 28; 29; 29; 30

Poids	28	29	30
M	1	2	1
F	2	2	2
M+F	2	4	2
Rang	1 2 3	4 5 6 7	8 9 10
Rang moyen	2	5.5	9
Rang(M)	2	11	9
Rang(F)	4	11	18

$$T(M) = 2 + 11 + 9 = 22$$

$$T(F) = 4 + 11 + 18 = 33$$

$$U(M) = 4 * 6 + (4 * 5)/2 - 22 = 12$$

$$U(F) = 4 * 6 + (6 * 7)/2 - 33 = 12$$

• Dans le cas limite de deux échantillons identiques :

$$U(M) = U(F) = (n(M) * n(F))/2$$

[14]

— **Le cas limite de deux échantillons totalement différents de par le poids (g) :**

Echantillon femelle ($n = 6$) : 29; 29; 30; 31; 31; 32

Echantillon mâle ($n = 4$) : 29; 29; 30; 31; 31; 32

$$T(M) = 1 + 5 + 4 = 10$$

$$T(F) = 11 + 7 + 17 + 10 = 45$$

$$U(M) = 4 * 6 + (4 * 5)/2 - 10 = 24$$

Poids	26	27	28	29	30	31	32
M	1	2	1				
F				2	1	2	1
M+F	1	2	1	2	1	2	1
Rang	1	2	4	5	7	8	10
		3		6		9	
Rang moyen	1	2.5	4	5	7	8.5	10
Rang(M)	1	5	4				
Rang(F)				11	7	17	10

$$U(F) = 4 * 6 + (6 * 7)/2 - 45 = 0$$

- Dans le cas limite de deux échantillons différents :

$$U(M) = n(M) * n(F)$$

$$U(F) = 0$$

[14]

- **Autre cas limite de deux échantillons totalement différents de par le poids (g) :**

Echantillon femelle ($n = 6$) : 26; 27; 27; 28; 29; 29

Echantillon mâle ($n = 4$) : 30; 31; 31; 32

Poids	26	27	28	29	30	31	32
M				2	1	2	1
F	1	2	1				
M+F	1	2	1	2	1	2	1
Rang	1	2	4	5	7	8	10
		3		6		9	
Rang moyen	1	2.5	4	5	7	8.5	10
Rang(M)				11	7	17	10
Rang(F)	1	5	4				

$$T(M) = 11 + 7 + 17 + 10 = 45$$

$$T(F) = 1 + 5 + 4 = 10$$

$$U(M) = 4 * 6 + (4 * 5)/2 - 45 = 0$$

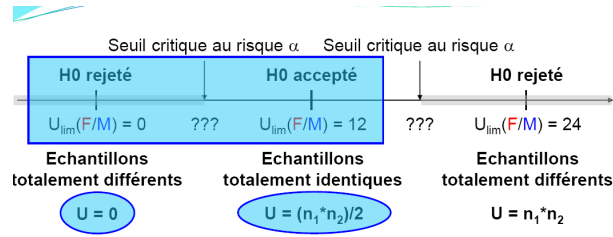
$$U(F) = 4 * 6 + (6 * 7)/2 - 10 = 24$$

- Dans le cas limite de deux échantillons différents :

$$U(M) = 0$$

$$U(F) = n(M) * n(F)$$

[14]



Remarque 10

la table de Mann-Whitney donne toujours la valeur de U critique pour les faibles valeurs de U

Car le calcul de U critique devient plus fastidieux voir difficile lorsque les deux valeurs limites de U dépendent de n_1 et n_2

- Dans ce cas :

si $U_{obs} \leq U_{crit}$ alors on rejette H_0 au risque de α

sinon si $U_{obs} > U_{crit}$ alors on ne rejette pas H_0

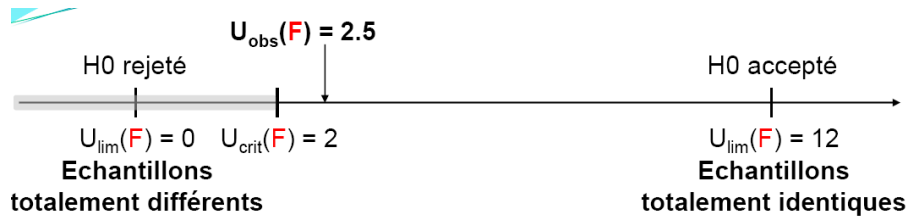
[14]

$$U_{obs}(F) = 2.5$$

$$U_{obs}(M) = 21.5$$

$$U_{obs}(F) < U_{obs}$$

[14]



Nondirectional $\alpha=0.05$ (Directional $\alpha=0.025$)

$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	-	-	-	-	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	-	-	0	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13
5	-	-	0	1	2	3	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19
6	-	-	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	-	-	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	-	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	-	0	2	4	7	10	12	15	17	21	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	-	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	-	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	-	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	-	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	-	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	-	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	-	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	-	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	-	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	-	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	-	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

conclusion 1

Nous pouvons tester l'expérience pour un échantillon libre, et il est nécessaire de connaître les propriétés statistiques de l'échantillon.

Dans cette application, nous avons pris deux échantillons de souris (mâles et femelles), nous avons donc appliqué la loi normale et probabiliste.

on ne peut pas conclure, à partir des distributions observées, on ne rejette H_0 , les souris mâles et les souris femelles sont différentes en terme de poids.

[14]

3.2 Les commandes de logiciel R :

Echantillon femelle ($n = 6$)

$X = c(24, 30, 30, 30, 38, 40)$

Echantillon mâle ($n = 4$)

$Y = c(20, 24, 26, 28)$

Dans le cas paramétrique

H_0 : mâles et femelles ont le même poids

H_1 : mâles et femelles ont des poids différents

En calcule :

$var(X)$

$var(Y)$

$F_{obs} = var(X)/var(Y)$

Pour tracer diagramme :

$bar(X, Y)$

Dans le cas non paramétrique

Pour tracer un tableau :

$tab1 < data.frame(a = c())$

Test de Wilcoxon - Mann Whitney :

$wilcox.test(x, y)$

Conclusion

Via l'application précédente , dans le cas du test expérimental (paramétrique), on prend les deux échantillons et on connaît le type de la loi auquel obéit chaque échantillon (la loi normative).

L'hypothèse a été formée de sorte que nous avons trouvé que l'écart type est $V(x) = V(y)$ sachant qu'elles ont la même loi.

Ensuite , dans le cas du test expérimental (non paramétrique) on a used un test de Wilcoxon et Mann-Whitney , pour qu'on sache s'il y a un lien entre les deux distributions et la loi et sur un fait l'hypothèse $H_0 : F_x = F_y$ pour elles de la même loi, qui est la loi normative , maintenant, nous pouvons tester l'expérience sur $V(x) = V(y)$

Bibliographie

- [1] LA STATISTIQUE INFÉRENTIELLE EN QUATRE SEANCES Carnet de stage UNIVERSITE Paris-Nord - I.R.E.M. 2002 la page (8)
- [2] L'interprétation des test d'hypothèse : p la taille de l'effet et la puissance . Revue des sciences de l'éducation, 35(1), 211–226. <https://doi.org/10.7202/029931ar> préparé par Jimmy Bourque, Jean-Guy Blais and François Larose , F. (2009) les page (213-215)
- [3] Cours de Statistiques inférentielles Pierre DUSART Année 2018 page (31-61-62-63)
- [4] Chapitre 3. Estimation - Département de mathématiques Pierre Duchesne February 2, 2017 page(5)
- [5] Cours de Eléments de la Statistique Inférentielle préparé par :BELGUERNA Abderrahmane en 2015 page(13-15-22)
- [6] Statistiques inférentiel préparé par : Mexan-Ruddy-Josip ADOUM-KAMATA Enseignant-Chercheur Laboratoire d'Economie Rurale et de Sécurité Alimentaire (LERSA) 2018 Email : akamerji27@gmail.com la page (75-100)
- [7] Test d'hypothèses tatistique - BOUBECHÉ Nouredine page (3-4)
- [8] COURS DE Statistiques mathématiques (1) - Farida LAOUDJ CHEKRAOUI Université Mohamed Sedik ben Yahia - Jijel page(44-45-47-48-51-52)
- [9] Principes et Méthodes Statistiques - Olivier Gaudoin page (34-35)
- [10] Tests statistiques préparé par Etienne Birmelé
- [11] Introduction à la statistique non paramétrique Catherine MATIAS CNRS, Laboratoire Statistique Génome, évry <http://stat.genopole.cnrs.fr/cmatias> ENSIIE - 2013/2014
- [12] Tests statistiques PRINCIPE - Université Paris Cité M1 IMSV Etienne Birmelé page (3-5-6-12-33)
- [13] Introduction à la statistique non paramétrique poly : ©Laëticia Comminges, Gabriel Turinici cours G. Turinici M_1 Math Université Paris Dauphine - PSL, 2019/20 page(7)
- [14] Chap.I.Tests paramétriques et non paramétriques -Analyse des données écologiques, modélisation et SIG. page(11-12)
- [15] Tests non paramétriques Erik-André Sauleau - Nicolas Meyer erik-andre.sauleau@medecine.u-strasbg.fr - nmeyer@unistra.fr Laboratoire de Biostatistique - Faculté de Médecine Pôle de Santé Publique CHU - STRASBOURG -2008 page(29-45-63)