REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre universitaire Salhi Ahmed -Naâma
Institut des Sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour obtenir le diplôme de
Master En Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Filière :Mathématiques

Thème

Problème de Stokes stationnaire compressible avec E.O.S générale

Présenté par :
Hachifa Saara

Devant le jury composé de :

Encadrant :	Mme *Fettah* Amel	Pr.C-Univ Salhi Ahmed -Naâma.
Président :	Melle *Moussaoui* Fatima	Pr.C-Univ Salhi Ahmed -Naâma.
Examinateur :	Mr *Khaldi* Brahim	Pr.C-Univ Salhi Ahmed -Naâma.

Année universitaire 2018/2019

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener á bien ce modeste travail, également je remercie respectueusement ma chère tante Rabiha pour mon cœur, qui Dieu ait pitié d'elle.Je remercie infiniment mes parents,qui mon encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.Mes sinceres remerciment à mon encadrante Amel Fettah ,qui mà accompagne durant toute la période de la formation. Je remercie vivement les membres du jury d'avoir accepté d'évoluer ce travail.
Et enfin je remercie infiniment mon oncle Hachifa Slimane qui m'a aidé aux déplacement pendant toute la formation.

Finalement, un grand merci à toute les administrateurs et les employés du directeur de la fac au agent de securité du center universitaire de Nâama.

Dédicace

Je dédie ce travail à la personne la plus précieuse pour qui elle était et sera la plus belle personne à mes yeux pour ma tante que Dieu la bénisse et fasse de son paradis. Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de mes chers parents qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui.Que dieux vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

Je dédie aussi ce travail à :

- ▶ Ma chère tante .
- ▶ Mes grands-parents.
- ▶ Mon encadrante Amel Belabbess
- ▶ Mes frère, mes sœurs et leur famille.
- ▶ Mes oncles, mes tantes et leur famille.
- ▶ Tous mes cousins et cousines.
- ▶ Tous mes amis, mes collègues , mes proches et tous ceux qui m'estiment.

Notations

Notations générales :

$x, y \in \mathbb{R}^d : \; x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x et y dans $\mathbb{R}^d$

$x \in \mathbb{R}^d : \; |x|^2 = x \cdot x$ norme induite du produit scalaire

$x = (x_1, ..., x_d), \; y = (y_1, ..., y_d) \,/\, x_i, y_i \in \mathbb{R}^d :$ $\quad x : y = \sum_{i=1}^{d} x_i \cdot y_i$

$|x|^2 = x : x$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} / \quad x \geq 0\}$

Ω partie de $\mathbb{R}^d$

$\partial\Omega$ frontière de Ω

$\lambda_d(\Omega)$ mesure (de Lebesgue) de l'ensemble Ω

B_R boule ouverte de centre en 0 de rayon R (dans un espace donné)

$u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$m(u) = \frac{1}{\lambda_d(\Omega)} \int_\Omega u \, dx = \text{valeur moyenne de } u$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)^{\mathrm{T}} = \text{gradient u}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = \text{Laplacien de u}$$

$u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$:

$$\nabla u = (\nabla u_1, \nabla u_2, ..., \nabla u_d)$$

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_d)^{\mathrm{T}}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{divergence de u}$$

Espaces Fonctionnels :

$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty.$

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$: espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$: Fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$: Fonctions k fois continûement différentiables sur Ω (k entier ≥ 1).

$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega).$

$\mathcal{C}_c^\infty = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega).$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \, tq \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi, \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \, \forall i = \overline{1..n}\} \, , \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^p(\Omega)}.$$

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$

$W_0^{1,p}(\Omega)$: fermeture de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$

$H_0^1(\Omega)^d$: espace des fonctions définies de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dont toutes les fonctions coordonnées appartiennent à $H_0^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)^d$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)^d} = \left(\int_\Omega \nabla u : \nabla u \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \| \, |\nabla u| \, \|_{L^2(\Omega)}.$$

Table des matières

Introduction

Un fluide est un milieu matériel parfaitement déformable. On regroupe sous cette appellation les liquides , les gaz et les plasmas. Gaz et plasmas sont très compressibles, tandis que les liquides le sont très peu (à peine plus que les solides).

La mécanique des fluides est un domaine de la physique consacré à l'étude du comportement des fluides et des force internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues.

Elle se divise en deux parties, la statique des fluides qui est l'étude des fluides au repos i.e à l'équilibre et la dynamique des fluides, qui est l'étude des fluides en mouvement, ainsi que l'étude de l'interaction de ces derniers avec les corps solides.

Son importance s'explique par le fondement théorique qu'elle offre à de nombreuses disciplines l'astrophysique,la biomédecine,la météorologie,la géophysique,la physique du plasma, l'aérodynamique,l'hydraulique ... Ce qui indique l'ampleur de son champ d'investigation.

La maîtrise de l'eau, comme de l'air, a intéressé les hommes depuis la préhistoire, pour résoudre les problèmes d'irrigation et utiliser la force du vent pour propulser les bateaux. C'est Archimède,au IIIème siècle av. J.-C., qui a été le véritable initiateur de la mécanique des fluides .

La présence irrésistible de la mécanique des fluides dans la nature a motivé l'intérêt de l'investigation de ce domaine durant des sciècles, principalement marquée par les contributions de : Léonard de Vinci, Pascal, Torricelli, Pitot , Venturi ... Et à partir du XVIII ème siècle les travaux de Bernouilli et Euler, et en suite Navier et Barré de Saint-Venant, complétés par Stokes, ont fait avancer de maniére décisive la mécanique des fluides.

Mais il a fallu attendre le XXème siècle, avec la convergence de connaissances mathématiques et expérimentales et l'utilisation de calculateurs de plus en plus puissants, pour que soient véritablement abordés des problèmes aussi complexes que : écoulements de fluides visqueux dans des tuyaux cylindriques,écoulements laminaires et turbulents, problèmes de couche limite... etc

Aujourd'hui, la mécanique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes d'EDPs (équations aux dérivées partielles) non résolus ou partiellement résolus .

En effet la résolution d'un problème de mécanique des fluides nécéssite l'élaboration d'un modèle mathématique décrivant ces mouvements et permettant de déterminer les diverses quantités comme la vitesse, la pression, la densité ... etc

Un modèle capital en mécanique des fluides : équations de Navier-Stokes. Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides dans le cas compressible ou incompressible.

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues en appliquant des lois de conservation à un volume élémentaire Ω (ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3), d'un fluide :

Conservation de la masse :

$$\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\rho u}) = 0.$$

où : $\boldsymbol{\rho}$ représente la densité du fluide à l'instant t et à la position X

$\boldsymbol{u}$ représente la vitesse.

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{\rho u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) - \int_\Omega \sigma \boldsymbol{n} = \int_\Omega \boldsymbol{\rho f}.$$

où : $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante de Ω, σ est le tenseur des contaraintes de l'écoulement

$\boldsymbol{f}$ est la densité massique des forces appliquées au fluide.

Conservation de l'énergie :

$$\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{\rho E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\rho E u}) - \int_{\partial\Omega} (\phi - \sigma \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = \int_\Omega \boldsymbol{\rho f}.\boldsymbol{u}.$$

où : $\boldsymbol{E}$ est l'énergie spécifique totale

ϕ est le flux de chaleur.

La définition du système de Navier-Stokes dépend des propriétés du fluide ou de l'écoulement : Par exemple dans le cas d'un écoulement isovolume, isotherme, l'équation de conservation de l'énergie devient inutile et on a :

$\nabla\boldsymbol{\rho} = 0$ écoulement homogène

$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$ (1) écoulement isovolume

(1) est aussi applelée condition d'incompréssiblité

En effet un écoulement est dit **incompressible** si le volume du fluide demeure constant sous l'action d'une pression externe. Ceci se traduit mathématiquement par une masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ constante et donc l'équation de conservation de la masse prend la forme particulièrement simple (1).

Les équations de Navier-Stokes, dans le cas d'un fluide Newtonien compressible peuvent se présenter (en négligeant les termes sources) comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho u}) = 0. \\ \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\rho u}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla\boldsymbol{p} - \mathrm{div}(\tau(\boldsymbol{u})) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\rho E}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho E u}) + \mathrm{div}(\boldsymbol{p u}) + \mathrm{div}(-\kappa\nabla\boldsymbol{e}) = \mathrm{div}(\tau(\boldsymbol{u}).\boldsymbol{u}) \\ \\ \boldsymbol{p} = \varphi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{e}),\ \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{e} \end{cases}$$

où : τ est le tenseur des contraintes visqueuses

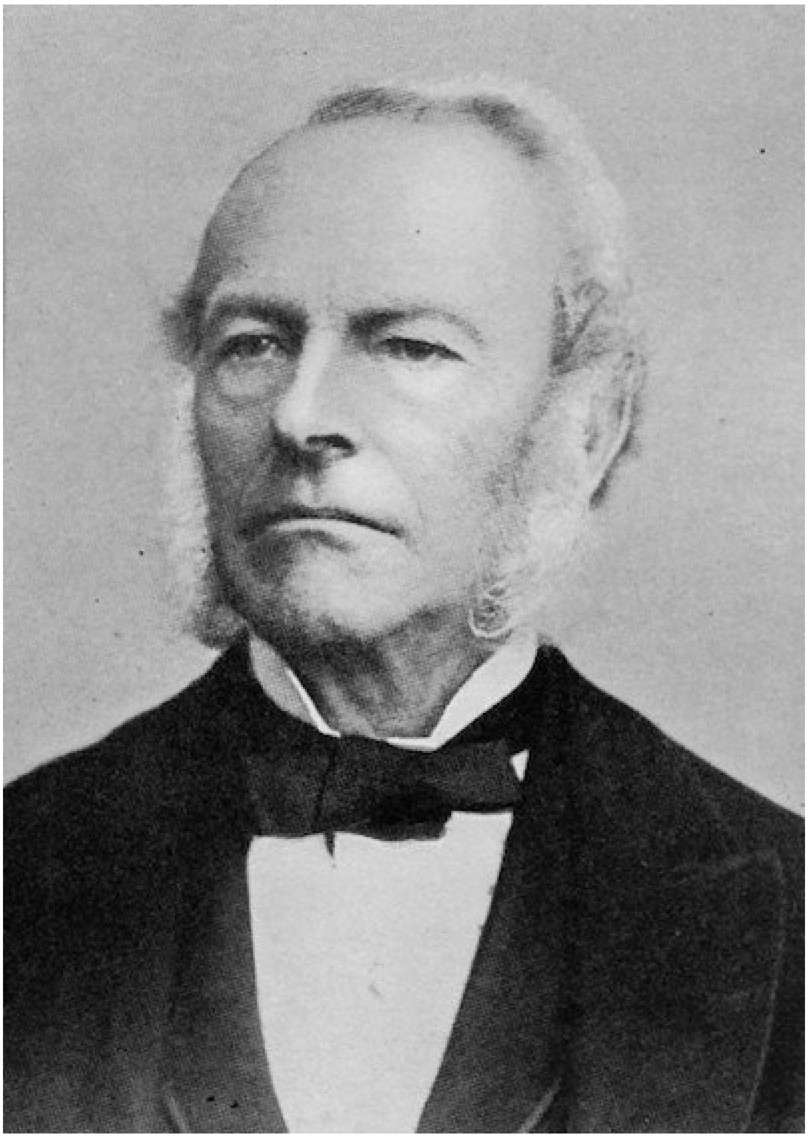
κ est la conductivité thermique.

Les équations de Stokes s'obtiennent à partir des équations de Navier-Stokes en négligeant les termes non linéaires.

Elle peuvent se présenter, sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{u} - \dfrac{\mu}{3}\nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) + \nabla\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f},\ (\mu > 0) \\ \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho u}) = 0, \\ \\ \boldsymbol{p} = \varphi(\boldsymbol{\rho}). \end{cases}$$

George Gabriel Stokes :



Chapitre 1

Problème de Stokes compressible avec E.O.S générale

1.1 Motivation

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $(d = 2 \,\text{ou}\, 3)$. Pour $M > 0$, $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\eta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et f une fonction de Caratheodory.

On considère le problème de Stokes, stationnaire, compressible, avec une loi d'état générale, à savoir le problème suivant :

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\rho}) \quad \text{dans } \Omega, \quad \boldsymbol{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{1.1a}$$

$$\operatorname{div}(\varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1b}$$

$$\boldsymbol{\rho} \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx = M \tag{1.1c}$$

$$\boldsymbol{p} = \eta(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1d}$$

Les inconnus du problème de Stokes sont les trois fonctions : $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{\rho}$:

$\boldsymbol{u}$: une fonction à valeurs vectorielles, repréresente **la vitessse** du fluide.

$\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{\rho}$ représentent respectivement, la **pression** et la **densité** du fluide.

Le problème de Stokes stationnaire, compressible auquel on s'intéresse est composé de :

L'équation **(1.1a)** : l'équation de **quantité de mouvement** (complétée avec une condition au bord, du type Dirichlet homogène).

L'équation **(1.1b)** : l'équation de **conservation de la masse**

ou **de continuité**.

L'équation **(1.1c)** donne la **masse totale** du fluide plus La condition naturelle : $\boldsymbol{\rho}$ **positive**

Et enfin :

L'équation **(1.1d)** : dite la **loi d'état**.

<u>N.B</u> : Notons que dans le terme source $\boldsymbol{f}$ de l'équation **(1.1a)**, les effets gravitaires sont souvent pris en compte, en effet $\boldsymbol{f}$ est principalement sous la forme : $\boldsymbol{f} = \tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\rho}$, où $\boldsymbol{g}$ représente la gravité.

On va démontrer l'existence de solution du pb **(1.1)**, en utilisant une **approximation par viscosité**. Ce résultat sera établi en passant à la limite sur un problème régularisé.

On aura besoin des hypothèses supplémentaires suivantes :

- Ω est supposé connexe à bord régulier (continu-Lipschitzien).
- la fonction $\boldsymbol{f} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{f}(.,s) \text{ est mesurable sur } \Omega.\text{Pr p.p } x \in \Omega,\ \boldsymbol{f}(x,.) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \\ \text{Il existe } B > 0 \text{ et } H \in L^2(\Omega) \text{ tq } : \forall s \in \mathbb{R} \text{ et p.p } x \in \Omega : |f(x,s)| \leq B(H(x) + |s|). \end{cases} \tag{1.2}$$

- la fonction $\eta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\begin{cases} \eta \text{ continue, strictement croissante .} \\ \eta(0) = 0 \text{ et } \liminf\limits_{s \to +\infty} \dfrac{\eta(s)}{s} = +\infty \end{cases} \tag{1.3}$$

- la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi \text{ strictement croissante} \\ \exists L > 0 \,/\, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} :\ |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|. \end{cases} \tag{1.4}$$

<u>Position du problème</u> :

L'objectif de ce chapitre est de démontrer l'existence d'une solution **faible** du problème (1.1) au sens suivant :

Une solution faible du problème (1.1) est un triplet $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\rho})$ satisfaisant :
$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\rho}) \in H_0^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla v - \int_\Omega \boldsymbol{p} \operatorname{div}(v) = \int_\Omega \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\rho}) \cdot v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \tag{1.5a}$$

$$\int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} \cdot \nabla \psi = 0, \quad \forall \psi \in W^{1,\infty}(\Omega) \tag{1.5b}$$

$$\boldsymbol{\rho} \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega, \quad \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx \;=\; M, \quad \boldsymbol{p} = \eta(\boldsymbol{\rho}) \text{ p.p dans } \Omega \tag{1.5c}$$

N.B : La formulation faible du pb (1.1) semble classique, en particulier les équations (1.5b) et (1.5c).

Notons par contre qu'on doit être plus attentif pour écrire l'équation (1.5a), vu que l'équation (1.1a) est **vectorielle**.

Le choix des fonctions test v et ψ est légitime et sera mieux "saisi" dans la suite du document.

On s'intéresse à établir le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soit $M > 0$ et Ω un ouvert, borné de $\mathbb{R}^d$, connexe, à bord régulier. Supposons que (2.2), (2.3) et (2.4) sont vérifiées , alors le pb (1.5) admet au moins une solution.*

Proof Ceci fera l'objet de la suite de ce chapitre.

Le principe de la démonstration est de passer à la limite sur un problème régularisé, obtenu principalement par une approximation visqueuse de l'équation de continuité.

On présentera dans la section 1.2 le problème de convection-diffusion qui apparait dans le problème régularisé.

La section 1.3 sera consacrée à l'étude du problème régularisé, en particulier le passage à la limite sur ce problème qui constitue la majeure partie de la démonstration du théorème 1.1.

1.2 Problème de Convection-Diffusion

1.2.1 Position du problème

Dans cette partie on s'intéresse à l'équation :

$$-\Delta\boldsymbol{\rho} + \operatorname{div}(\varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}) = 0, \text{ dans } \Omega \tag{1.6}$$

complétée avec la condition au bord, du type Neumann :

$-\nabla\boldsymbol{\rho}.n + \varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}.n = 0$, avec n le vecteur de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Sous l'hypothèse $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)^d$, avec $p > d$, on écrit la formulation faible du problème (1.6), soit le problème :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla\boldsymbol{\rho}(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}(x))\boldsymbol{u}(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = 0, \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.7}$$

<u>N.B</u> : Notons que la formulation faible ait bien un sens, en effet on a :

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, (valeurs de q dépendant de d), donne : $\boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega)$ implique $\boldsymbol{\rho} \in L^q(\Omega)$, pour tout $q \leq \dfrac{2d}{d-2}$.

Ceci permet d'avoir grâce à l'hypothèse (1.4) : $\varphi(\boldsymbol{\rho}) \in L^q(\Omega)$, pour les mêmes valeurs de q. Et suite au fait que : $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)^d$, $p > d$, on a bien : $\varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^d$, d'où le résultat.

Maintenant, on va établir un résultat d'existence de solution du problème (1.7), avec quelques propriétés utiles, soit le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, connexe avec un bord régulier. Soient $p > d$, $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)^d$, $M \geq 0$ et φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (1.4). Alors, il existe une unique solution du prolème* (1.7) *satisfaisant la condition supplémentaire $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}(x)dx = M$. De plus, on a :*

1. *Si $M > 0$ alors $\boldsymbol{\rho} > 0$ p.p. dans Ω (et $\boldsymbol{\rho} = 0$ p.p. sur Ω si $M = 0$).*
2. *Pour tout $A > 0$, il existe C uniquement dépendant de A, p, M, φ et Ω tel que si $\boldsymbol{\rho}$ est solution de* (1.7) *avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}(x)\, dx = M$, on ait :*

$$\|\,|u|\,\|_{L^p(\Omega)} \leq A \Rightarrow \|\boldsymbol{\rho}\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Remarque 1.3 *Notons que l'hypothèse de monotonie de φ est inutile dans la preuve de ce théorème. En revanche, l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ est cruciale, principalement pour démontrer la positivité de la solution.*

Proof : La démonstartion sera faite en trois étapes :

Dans un premier temps, on démontre la "a priori-positivité" et l'unicité de la solution du problème (1.7), ceci fera l'objet de la section 1.2.2.

En suite, dans la section 1.2.3 on établit l'estimation dans $H^1(\Omega)$ sur la solution, pour finir dans la section 1.2.4 avec une preuve d'existence de solution en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder.

1.2.2 Positivité et unicité de la solution

• Positivité :

Soit $\boldsymbol{\rho}$ une solution de (1.7) avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx = M$. On va démontrer que $\boldsymbol{\rho}$ est positive p.p dans Ω. Procédons par l'absurde :

Posons alors : $w = \{\boldsymbol{\rho} \leq 0\}$ avec $\lambda_d(w) > 0$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application T_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$T_n(s) = \min \left\{ \frac{1}{n}, \max\{s, 0\} \right\}$$

On considère maintenant la fonction $T_n(\boldsymbol{\rho})$, on a :

$$T_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 \ \text{ p.p dans } \ \omega \ \text{ et } \ T_n(\boldsymbol{\rho}) \in H^1(\Omega).$$

Vu que $\lambda_d(w) > 0$, d'après le lemme 3.1 (qui repose sur la connexité et la régularité de Ω), on obtient : l'existence d'une constante C seulement dépendante de Ω et ω telle que :

$$\|T_n(\boldsymbol{\rho})\|_{L^1(\Omega)} \leq C \| |\nabla T_n(\boldsymbol{\rho})| \|_{L^1(\Omega)}$$

ce qui donne :

$$\|T_n(\boldsymbol{\rho})\|_{L^1(\Omega)} \leq C\, \lambda_d(\Omega)^{\frac{1}{2}}\, \| |\nabla T_n(\boldsymbol{\rho})| \|_{L^2(\Omega)} \tag{1.8}$$

Cherchons maintenant une estimation sur $\| |\nabla T_n(\boldsymbol{\rho})| \|_{L^2(\Omega)}$. Pour ce faire, prenons $v = T_n(\boldsymbol{\rho})$ dans (1.7), tout en remarquant que :

$\nabla T_n(\boldsymbol{\rho}) = 1_{0<\boldsymbol{\rho}<\frac{1}{n}} \nabla \boldsymbol{\rho}$ p.p dans Ω.

On obtient alors :

$$\int_\Omega |\nabla T_n(\boldsymbol{\rho})|^2\, dx = \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{u} \cdot \nabla T_n(\boldsymbol{\rho})\, dx \leq L \frac{a_n}{n} \left(\int_\Omega |\nabla T_n(\boldsymbol{\rho})|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e :

$$|||\nabla T_n(\boldsymbol{\rho})|||_{L^2(\Omega)} \leq L\,\frac{a_n}{n} \tag{1.9}$$

avec :

$$a_n = \left(\int_{0<\boldsymbol{\rho}<\frac{1}{n}} |\boldsymbol{u}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(1.8) et (1.9) donnent ainsi :

$$\|T_n(\boldsymbol{\rho})\|_{L^1(\Omega)} \leq C\,L\,\lambda_d(\Omega)^{\frac{1}{2}}\,\frac{a_n}{n} \tag{1.10}$$

D'autre part, on a :

$$\|T_n(\boldsymbol{\rho})\|_{L^1(\Omega)} \geq \frac{1}{n}\,\lambda_d(\,\{\boldsymbol{\rho} \geq \frac{1}{n}\}\,)$$

ce qui permet d'écrire avec (1.10) :

$$\lambda_d(\,\{\boldsymbol{\rho} \geq \frac{1}{n}\}\ \leq C\,L\,\lambda_d(\Omega)^{\frac{1}{2}}\,a_n$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et donc en passant à la limite sur la relation précédente, quand $n \to +\infty$, on obtient : $\lambda_d(\,\{\boldsymbol{\rho} > 0\} = 0$

i.e on a finalement :

$$\boldsymbol{\rho} \leq 0 \text{ p.p dans}\,\Omega. \tag{1.11}$$

<u>**Cas 1 :** $M > 0$ **:**</u> (1.11) donne $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\,dx = M \leq 0$ ce qui est absurde.

Ceci implique $\lambda_d(w) = 0$ i.e $\boldsymbol{\rho} > 0$ p.p dans Ω.

<u>**Cas 2 :** $M = 0$ **:**</u> dans ce cas, on a : $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\,dx = M = 0$ et donc (1.11) implique $\boldsymbol{\rho} = 0$ p.p dans Ω.
Ce qui conclut la preuve.

• **Unicité :**

Supposons l'existence de deux solutions $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$ du problème (1.7) avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_1\,dx = M = \int_\Omega \boldsymbol{\rho}_2\,dx$.

En posant $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$, et en exploitant la différence des équations satisfaites par $\boldsymbol{\rho}_2$ et $\boldsymbol{\rho}_1$ avec $v = T_n(\boldsymbol{\rho})$, on obtient, grâce à (1.4), et sans difficultés supplémentaires, comme dans l'étape précédente :

$\boldsymbol{\rho} \leq 0$ p.p dans Ω ce qui donne avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx = 0$: $\boldsymbol{\rho} = 0$ p.p dans Ω, d'où l'unicité de solution de (1.7) avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx = M$.

1.2.3 Estimation a priori

Soit $A > 0$ telle que : $\|\,|u|\,\|_{L^p(\Omega)} \leq A$. Cherchons à prouver l'estimation dans $H^1(\Omega)$ sur $\boldsymbol{\rho}$ solution de (1.7) avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx = M$.

En prenant $v = \boldsymbol{\rho}$ dans (1.7), par l'inégalité de Hölder, on obtient pour p et q comme expliqué plus haut ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$) :

$$\|\,|\nabla\boldsymbol{\rho}|\,\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{\rho}|^2\, dx \leq L\|\,|\boldsymbol{u}|\,\|_{L^p(\Omega)}\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^q(\Omega)}\|\,|\nabla\boldsymbol{\rho}|\,\|_{L^2(\Omega)}$$

i.e :

$$\|\,|\nabla\boldsymbol{\rho}|\,\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|\,|\boldsymbol{u}|\,\|_{L^p(\Omega)}\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^q(\Omega)} \tag{1.12}$$

Pour $\bar{q} > q$ et grâce aux injections de Sobolev on a : il existe $C_s > 0$ seulement dépendant de Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \leq C_s\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^1(\Omega)}$$

De plus, l'inégalité d'interpolation donne, pour $\theta = \frac{\bar{q}-q}{q(\bar{q}-1)}$:

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\rho}\|^{\theta}_{L^1(\Omega)}\|\boldsymbol{\rho}\|^{1-\theta}_{L^{\bar{q}}(\Omega)}$$

($\theta \in (0,1)$ et θ seulement dépendant de d et de p).

i.e :

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^q(\Omega)} \leq M^{\theta} C_s^{1-\theta}\|\boldsymbol{\rho}\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega)}$$

ce qui donne avec (1.12) :

$$\|\,|\nabla\boldsymbol{\rho}|\,\|_{L^2(\Omega)} \leq L\, A\, M^{\theta}\, C_s^{1-\theta}\, \|\boldsymbol{\rho}\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega)} \tag{1.13}$$

D'un autre coté, on a : l'inégalité de Poincré-Wirtinger,(Ω connexe), donne : l'existence de C_p seulement dépendant de Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{\rho} - M\lambda_d(\Omega)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p\|\,|\nabla\boldsymbol{\rho}|\,\|_{L^2(\Omega)}$$

Et donc :

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\rho}-M\lambda_d(\Omega)^{-1}\|_{L^2(\Omega)}+M\lambda_d(\Omega)^{-\frac{1}{2}} \leq C_p\| \, |\nabla\boldsymbol{\rho}| \, \|_{L^2(\Omega)}+M\lambda_d(\Omega)^{-\frac{1}{2}}$$

Ce qui donne :

$$\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^1(\Omega)} \leq (C_p+1)\| \, |\nabla\boldsymbol{\rho}| \, \|_{L^2(\Omega)} + M\lambda_d(\Omega)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

Finalement, (1.13) et (1.14) avec $\theta > 0$, permettent d'avoir l'existence de C uniquement dépendant de A, M,p,L et Ω tel que : $\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^1(\Omega)} \leq C$.

Ce qui conclut la preuve.

1.2.4 Existence de solution

Soient $M > 0$ et $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$. On va prouver l'existence de solution du problème (1.7) avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M$, en procédant par degré topologique.

On définit alors pour $q = \dfrac{2p}{p-2}$, l'application F de $[0,1] \times L^q(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ comme suit :

$$(t, \bar{\boldsymbol{\rho}}) \in [0,1] \times L^q(\Omega) \longrightarrow F(t,\bar{\boldsymbol{\rho}}) = t(\boldsymbol{\rho} + \tfrac{M}{\lambda_d(\Omega)})$$

où $\boldsymbol{\rho}$ est l'unique solution du problème de Neumann classique :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega), \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = 0, \\ \int_\Omega \nabla\boldsymbol{\rho}.\nabla v \, dx = t\int_\Omega \boldsymbol{u} \, \varphi(\bar{\boldsymbol{\rho}}).\nabla v \, dx, \; \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.15}$$

N.B : Notons que q est choisi tel que $\boldsymbol{u}\varphi(\bar{\boldsymbol{\rho}}) \in L^2(\Omega)^d$, d'où l'application F est bien définie. De plus grâce à l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, F est bel et bien à valeurs dans $L^q(\Omega)$.

Maintenant, F telle que définie donne : $\int_\Omega F(t,\bar{\boldsymbol{\rho}}) \, dx = t\,M$ et donc si $\boldsymbol{\rho}$ est tel que $\boldsymbol{\rho} = F(1,\boldsymbol{\rho})$ alors $\boldsymbol{\rho}$ sera solution du problème (1.7) avec $\int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M$.

On va prouver l'existence d'une telle fonction $\boldsymbol{\rho}$, en appliquant l'invariance par homotopie du degré topologique de Leray-Schauder. Vérifions, tout d'abord, si F satisfait les conditions nécéssaires :

Soit alors $(\,(t_n, \bar{\boldsymbol{\rho}}_n)\,)_n$ une suite dans $[0,1] \times L^q(\Omega)$ telle que : $(t_n)_n$ converge vers t dans $\mathbb{R}$ et $(\bar{\boldsymbol{\rho}}_n)_n$ converge vers $\boldsymbol{\rho}$ dans $L^q(\Omega)$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\rho}_n$, l'unique solution du problème (1.15), avec t_n et $\bar{\boldsymbol{\rho}}_n$ au second membre au lieu de t et $\bar{\boldsymbol{\rho}}$.

Il est évident d'après ce qui précède qu'une telle solution $\boldsymbol{\rho}_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Et donc, à une sous-suite près, $\boldsymbol{\rho}_n$ converge faiblement vers $\boldsymbol{\rho}$ dans $H^1(\Omega)$. De plus, on a grâce à l'hypothèse (1.4), $\varphi(\bar{\boldsymbol{\rho}}_n)$ converge vers $\varphi(\bar{\boldsymbol{\rho}})$ dans $L^q(\Omega)$.

Ces deux résultats de convergence permettent de passer à la limite, quand $n \to +\infty$, sur l'équation satisfaite par $\boldsymbol{\rho}_n$ et on obtient : $\boldsymbol{\rho}$ est solution du problème (1.15) .

Notons de plus, que l'unicité de $\boldsymbol{\rho}$ en tant que solution du problème (1.15), entraine que $\boldsymbol{\rho}_n$ vers $\boldsymbol{\rho}$ sans avoir extrait de sous-suite.

Ceci avec l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ implique la convergence de $\boldsymbol{\rho}_n$ vers $\boldsymbol{\rho}$ dans $L^q(\Omega)$, d'où la continuité de F.

Aussi, cette injection étant compacte implique la compacité de l'application F, i.e au final on a : F complètement continue.

D'autre part : on sait que si $\boldsymbol{\rho}$ satisfait $\boldsymbol{\rho} = F(1, \boldsymbol{\rho})$, alors d'après la section 1.2.3, on a : $\exists C > 0$ tq $\|\boldsymbol{\rho}\|_{H^1(\Omega)} \leq C$

ce qui implique : $\exists R > 0$ tq $\|\boldsymbol{\rho}\|_{L^q(\Omega)} \leq R$.

Si B_R est la boule de centre 0 de rayon R dans $L^q(\Omega)$, on arrive à vérifier avec un simple raisonnement par l'absurde qu'on a :

$\forall t \in [0,1], 0 \notin Id - F(t, \partial B_R)$ i.e que l'équation $\boldsymbol{\rho} - F(t, \boldsymbol{\rho}) = 0$ n'a pas de solution sur $[0,1] \times \partial B_R$.

Et donc par l'invariance par homotopie du degré topologique, on a : $d(Id - F(1,.), B_R, 0) = d(Id - F(0,.), B_R, 0)$.

i.e : $d(Id - F(1,.), B_R, 0) = 1$, vu que $F(0,.) = 0$.

Ce qui entraine l'existence de $\boldsymbol{\rho} \in B_R$ tel que : $\boldsymbol{\rho} = F(1, \boldsymbol{\rho})$, ce qui conclut la preuve.

1.3 Le Problème régularisé

Dans cette partie on va démontrer l'existence de solution du problème de Stokes. Pour ce faire, on considère le problème (1.1), régularisé, par l'ajout d'un terme de diffusion au niveau de l'équation de conservation de la masse (1.1b) et des troncatures au niveau du terme source de l'équation de quantité de mouvement $\boldsymbol{f}$ et sur la loi d'état .

On définit alors, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction T_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$T_n(s) = \min\{\max\{s, -n\}, n\}$ et pour $s = (s_1, ..., s_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose : $T_n(s) = (T_n(s_1), ..., T_n(s_d))$.

Les fonctions tronquées sont définies par : pour $\ell, m \in \mathbb{N}^*$, $x \in \Omega$ et $s \in \mathbb{R}$:

$f_l(x, s) = T_l(f(x, s))$ et $\eta_m(s) = T_m(\eta(s))$.

On considère alors, pour $n, \ell, m \in \mathbb{N}^*$, le problème régularisé défini ainsi :

$$\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d, \boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega), \boldsymbol{p} \in L^2(\Omega) \tag{1.16a}$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla v \, dx - \int_\Omega p \operatorname{div}(v) \, dx = \int_\Omega f_l(x, \boldsymbol{\rho}).v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \tag{1.16b}$$

$$\int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}.\nabla\psi \, dx - \frac{1}{n}\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\rho}(x).\nabla\psi(x) \, dx = 0, \forall \psi \in H^1(\Omega), \tag{1.16c}$$

$$\boldsymbol{\rho} > 0 \, \text{p.p dans} \, \Omega, \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M, \, p = \eta_m(\boldsymbol{\rho}) \, \text{p.p dans} \, \Omega \tag{1.16d}$$

1.3.1 Existence de solution du pb régularisé

On démontre dans cette partie le résultat suivant :

Théorème 1.4 *: Soient $\ell, n, m \in \mathbb{N}^*$, $M > 0$ et Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$, avec un bord régulier. Supposons que les hypothèses (1.2), (1.3) et (2.4.2) sont satisfaites, alors le problème(1.16) admet au moins une solution.*

Proof : On va appliquer le théorème du point fixe à une application appropriée T de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, qu'on précisera par la suite.

Soit alors $\tilde{\boldsymbol{\rho}} \in L^2(\Omega)$. Posons $\tilde{\boldsymbol{p}} = \eta_m(\tilde{\boldsymbol{\rho}}^+)$.

On considère maintenant le problème :

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla v \, dx = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{p}} \operatorname{div}(v) \, dx + \int_\Omega f_l(x, \tilde{\boldsymbol{\rho}}).v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \quad (1.17a)$$

Les fonctions $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ et $\tilde{\boldsymbol{p}}$ étant connues, une application classique du théorème de Lax-Milgram donne : l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ solution du pb (1.17a).

Maintenant, connaissant $\boldsymbol{u}$, le théorème 1.2, donne l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega)$ solution de :

$$\begin{cases} \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M \\ \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\rho}(x).\nabla \psi(x) \, dx - \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}(x)) \boldsymbol{u}(x).\nabla \psi(x) \, dx = 0, \ \forall \psi \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.18)$$

On définit alors, l'application T par $T(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{\rho}$ et on va établir les conditions du théorème du point fixe :

•**<u>Continuité de T</u>** :

Soit $(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\Omega)$ telle que $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k$ converge vers $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ dans $L^2(\Omega)$.

Montrons que : $T(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \longrightarrow T(\tilde{\boldsymbol{\rho}})$ dans $L^2(\Omega)$ quand $k \to +\infty$
(i.e : $\boldsymbol{\rho}_k \longrightarrow \boldsymbol{\rho}$).

Tout d'abord, on a : la convergence de $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k$ vers $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence de $\tilde{\boldsymbol{p}}_k$ vers $\tilde{\boldsymbol{p}}$ dans $L^2(\Omega)$ et de $\boldsymbol{f}_\ell(., \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k)$ vers $\boldsymbol{f}(., \tilde{\boldsymbol{\rho}})$ ds $L^2(\Omega)^d$.

Posons maintenant $\boldsymbol{u}_k$ la solution du problème (1.17a) avec $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k$ et $\tilde{\boldsymbol{p}}_k$ au second membre. En prenant $v = \boldsymbol{u}_k$ dans (1.17a), on obtient :

Grâce aux inégalités de Hölder et de Poincaré, l'existence de C_1 seulement dépendant de m, ℓ et Ω telle que :

$$\|\boldsymbol{u}_k\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_1.$$

Ceci entraîne la convergence de $\boldsymbol{u}_k$ vers $\boldsymbol{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)^d$ et donc en passant à la limite sur l'équation que satifait $\boldsymbol{u}_k$ et en exploitant les convergences de $\tilde{\boldsymbol{p}}_k$ et $\boldsymbol{f}_\ell(., \tilde{\boldsymbol{\rho}}_k)$ dans L^2, on obtient : $\boldsymbol{u}$ est solution du pb(1.17a).

De plus, grâce aux injections de Sobolev, l'estimation dans $H_0^1(\Omega)^d$ sur $(\boldsymbol{u}_k)_k$ implique l'existence de C_2 seulement dépendant de m, ℓ et Ω telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \tag{1.19}$$

avec : $p = 6$ si $d = 3$ et $p \geq 1$ si $d = 2$.

On revient maintenant au problème de convection-diffusion : on pose $\boldsymbol{\rho}_k$ la solution de (1.18) avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_k$, soit le problème :

$$\begin{cases} \int_\Omega \boldsymbol{\rho}\, dx = M \\ \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\rho}_k(x).\nabla\psi(x)\, dx - \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}_k(x))\boldsymbol{u}_k(x).\nabla\psi(x)\, dx = 0, \ \forall \psi \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.20}$$

Le théorème 1.2 avec l'estimation (1.19), donne l'existence d'une constante C_3 uniquement dépendant de n, m, ℓ, φ, M et Ω telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \|\boldsymbol{\rho}_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \tag{1.21}$$

Ce qui implique la convergence de $\boldsymbol{\rho}_k$ vers $\boldsymbol{\rho}$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$. Et donc, en passant à la limite sur l'équation (1.20) quand $k \to +\infty$, on obtient : $\boldsymbol{\rho}$ est solution de problème (1.18), d'où le résultat désiré : $\boldsymbol{\rho}_k = T(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_k) \longrightarrow \boldsymbol{\rho} = T(\tilde{\boldsymbol{\rho}})$ dans $L^2(\Omega)$.

N.B : Notons que l'unicité de solution du problème de convection-diffusion implique que $\boldsymbol{\rho}$ est unique et donc la convergence de $\boldsymbol{\rho}_k$ vers $\boldsymbol{\rho}$ ait lieu sans extraire de sous-suite.

•**Compacité de T et satabilité de la boule** :

L'estimation (1.21) donne :

D'une part l'existence de $R > 0$, tel que $Im(T) \subset B_R$ et donc on a ainsi : $Im_T(B_R) \subset B_R$.

Et d'autre part : $Im(T)$ bornée dans $H^1(\Omega)$ ce qui implique grâce au théorème de Rellich que $Im(T)$ est compact dans $L^2(\Omega)$ i.e T est compact.

Le théorème du point fixe donne alors l'existence de $\boldsymbol{\rho} \in L^2(\Omega)$ telle que : $T(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}$ et donc l'existence d'une solution du problème régularisé (1.16).

1.3.2 Passage à la limite sur le pb régularisé : Preuve du théorème 1.1

Cette partie est **cruciale**, en effet, passer à la limite sur le problème régularisé constitue une démontration du théorème 1.1.

Supposant les conditions du théorème 1.1 satisfaites, le problème régularisé dépendant des trois paramètres ℓ, n et m admet au moins une solution d'après ce qui précède.

Le passage à la limite sur ce problème se fait dans l'ordre suivant :

step 1 : $m \to +\infty$, step 2 : $\ell \to +\infty$ et en fin step 3 : $n \to +\infty$.

Step 1 : $m \to +\infty$:

Dans cette étape ℓ et n sont fixés dans $\mathbb{N}^*$. On va démontrer l'existence de solution du pb (1.16) avec η au lieu de η_m dans la loi détat, soit le problème :

$$u \in H_0^1(\Omega)^d, \boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega), \boldsymbol{p} \in L^2(\Omega), \tag{1.22a}$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla v \, dx - \int_\Omega \boldsymbol{p} \operatorname{div}(v) \, dx = \int_\Omega f_l(x, \boldsymbol{\rho}).v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \tag{1.22b}$$

$$\int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}.\nabla\psi \, dx - \frac{1}{n}\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\rho}(x).\nabla\psi(x) \, dx = 0, \forall \psi \in H^1(\Omega), \tag{1.22c}$$

$$\boldsymbol{\rho} > 0 \, \text{p.p dans} \, \Omega, \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M, \boldsymbol{p} = \eta(\boldsymbol{\rho}) \ \text{ p.p dans} \, \Omega. \tag{1.22d}$$

Proposition 1.5 *: Soient $\ell, n \in \mathbb{N}^*$. Supposons les hypothèses du théorème 1.1 satisfaites, alors le pb (1.22) admet au moins une solution.*

Preuve : ℓ et n étant fixés dans cette étape, appelons $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{p}_m\boldsymbol{\rho}_m)$ la solution du problème (1.16).

En prenant $\boldsymbol{u}_m$ comme une fonction test dans l'équation (1.16b) et en exploitant la loi d'état, on obtient :

$$\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)^d} = \int_\Omega \eta_m(\boldsymbol{\rho}_m) \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_m) \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{f}_l(x, \boldsymbol{\rho}_m).\boldsymbol{u}_m \, dx$$

Or $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{\rho}_m)$ satisfait l'équation (1.16c), ceci permet d'avoir grâce au lemme 3.2, qui repose sur les hypothèses sur φ, l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega \eta_m(\boldsymbol{\rho}_m) \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_m) \, dx \leq 0$$

Ceci donne, par l'inégalité de Hölder :

$$\|\boldsymbol{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \|f_l(., \boldsymbol{\rho}_m)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(\Omega)^d}$$

Et donc, l'inégalité de Poincaré et la troncature sur $\boldsymbol{f}$ permettent d'avoir l'existence de C_1 seulement dépendant de ℓ et Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{u}_m\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_1 \tag{1.23}$$

L'estimation (1.23) avec le théorème 1.2 donnent : l'existence de C_2 seulement dépendant de ℓ, Ω, $M\,\varphi$ et n tel que :

$$\|\boldsymbol{\rho}_m\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2. \tag{1.24}$$

Cherchons maintenant une estimation sur $\boldsymbol{p}_m$: Le lemme 3.3 avec :

$q = \boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m)$, où $m(p_m)$ est la valeur moyenne de $\boldsymbol{p}_m$, donne :

Il existe $w \in H_0^1(\Omega)^d$ tq $\operatorname{div}(w) = \boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m)$ p.p dans Ω et :

$\|w\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_d \|\boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m)\|_{L^2(\Omega)^d}$, avec C_d une constante indépendente de m.

Prenons $v = w$ dans l'équation (1.16b), on obtient :

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}_m \mathrm{div} v \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{f}_l(x, \boldsymbol{\rho}_m).v \, dx - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_m : \nabla v \, dx.$$

Or : $\int_\Omega \mathrm{div} v \, dx = 0$, par définition de v, donc :

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}_m \mathrm{div} v \, dx = \int_\Omega (\boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m)) \mathrm{div} v \, dx = \int_\Omega (\boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m))^2 \, dx$$

D'où :

$$\int_\Omega (\boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m))^2 \, dx = \int_\Omega f_l(x, \boldsymbol{\rho}_m).v \, dx - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_m : \nabla v \, dx$$

Ceci permet de déduire grâce à (1.23) et l'estimation sur v conséquence du lemme 3.3 : l'existence de C_3 seulement dépendant de ℓ et Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{p}_m - m(\boldsymbol{p}_m)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3. \tag{1.25}$$

Pour déduire à partir de (1.25) une estimation sur $\boldsymbol{p}_m$, exploitons le fait que : $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_m \, dx = M$.

On a : η est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, appelons $\bar{\eta}$ sa fonction réciproque i.e : $\eta(\bar{\eta}(s)) = \bar{\eta}(\eta(s)) = s$, $\forall s \in \mathbb{R}_+$. On obtient alors :

$$\int_\Omega \bar{\eta}(\boldsymbol{p}_m)\,dx = \int_\Omega \bar{\eta}(\eta_m(\boldsymbol{\rho}_m))\,dx \leq \int_\Omega \bar{\eta}(\eta(\boldsymbol{\rho}_m))\,dx = \int_\Omega \boldsymbol{\rho}_m\,dx = M.$$

Ceci permet de déduire d'après le lemme 3.4 l'existence de C_4 seulement dépendent de Ω, ℓ, η et M tel que :

$$\|\boldsymbol{p}_m\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \tag{1.26}$$

Les estimations (1.23), (1.24) et (1.26) conduisent aux convergences suivantes, à des sous-suites près, quand $m \to +\infty$:

$\boldsymbol{u}_m \longrightarrow \boldsymbol{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)^d$,

$\boldsymbol{\rho}_m \longrightarrow \boldsymbol{\rho}$ faiblement dans $H^1(\Omega)$, fortement dans $L^2(\Omega)$ et p.p dans Ω,

$\boldsymbol{p}_m \longrightarrow \boldsymbol{p}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

Grâce à ces convergences et aux propriétés des fonctions $\boldsymbol{f}_l, \boldsymbol{f}$ et φ, on passe facilement à la limite sur les équations (1.16b) et (1.16c).

Précisons que le passage à la limite sur l'équation (1.16d) est dû à :

La convergence de la suite $(\eta_m(\boldsymbol{\rho}_m))_m$ vers $\eta(\boldsymbol{\rho})$ p.p dans Ω avec $(\eta_m(\boldsymbol{\rho}_m))_m$ bornée dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence de cette suite fortement dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q < 2$.

En plus de la convergence de la suite $(\eta_m(\boldsymbol{\rho}_m))_m$ vers $\boldsymbol{p}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, permettent d'avoir par unicité de la limite : $\boldsymbol{p} = \eta(\boldsymbol{\rho})$.

Le passage à la limite sur $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_m\,dx = M$ est évident et donne $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}\,dx = M$, ce qui permet d'avoir grâce au théorème 1.2 : $\boldsymbol{\rho} > 0$ p.p dans Ω.

Et donc au final on a bien $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\rho})$ est solution du problème (1.22), ce qui conclut la preuve de la proposition 1.5.

Step 2 : $\ell \to +\infty$:

Dans cette étape n est fixé dans $\mathbb{N}^*$. On va démontrer l'existence de solution du problème (1.22) avec $\boldsymbol{f}$ au lieu de $\boldsymbol{f}_\ell$, soit le problème :

$$u \in H_0^1(\Omega)^d, \boldsymbol{\rho} \in H^1(\Omega), \boldsymbol{p} \in L^2(\Omega), \tag{1.27a}$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}.\nabla v \, dx - \int_\Omega \boldsymbol{p} \operatorname{div}(v) \, dx = \int_\Omega f(x, \boldsymbol{\rho}).v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d \tag{1.27b}$$

$$\int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}.\nabla \psi \, dx - \frac{1}{n}\int_\Omega \nabla \boldsymbol{\rho}(x).\nabla \psi(x) \, dx = 0, \, \forall \psi \in H^1(\Omega), \tag{1.27c}$$

$$\boldsymbol{\rho} > 0 \text{ p.p dans}\, \Omega, \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M, \boldsymbol{p} = \eta(\boldsymbol{\rho}) \,\text{p.p dans}\, \Omega. \tag{1.27d}$$

Proposition 1.6 *: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons les hypothèses du théorème 1.1 satisfaites, alors le pb (1.27) admet au moins une solution.*

Preuve : n étant fixé dans cette étape, appelons $(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{p}_\ell, \boldsymbol{\rho}_\ell)$ la solution du problème (1.22).

Cherchons tout d'abord l'estimation sur $\boldsymbol{u}_\ell$. Notons que que la dépendance du terme source de l'équation (1.22b) du paramètre ℓ, entrainera une difficulté supplémentaire. Procédons alors comme suit :

Prenons $\boldsymbol{u}_\ell$ comme une fonction test dans l'équation (1.22b), on obtient :

$$\|\boldsymbol{u}_\ell\|^2_{H_0^1(\Omega)^d} = \int_\Omega \eta(\boldsymbol{\rho}_\ell) \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\ell) \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{f}_l(x, \boldsymbol{\rho}_\ell).\boldsymbol{u}_\ell \, dx$$

Comme dans step 1, le fait que $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{\rho}_m)$ satisfait l'équation (1.22c) avec le lemme 3.2 donne : $\int_\Omega \eta(\boldsymbol{\rho}_\ell) \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\ell) \, dx \leq 0$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura :

$$\|\boldsymbol{u}_\ell\|^2_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \|f_l(., \boldsymbol{\rho}_\ell)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{u}_\ell\|_{L^2(\Omega)^d}$$

Par la suite, l'inégalité de Poincaré, les propriétes de $\boldsymbol{f}_\ell$ et l'hypothèse (1.2), permettent d'avoir l'existence de C_1 seulement dépendant de $\boldsymbol{f}$ et Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{u}_\ell\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_1(1 + \|\boldsymbol{\rho}_\ell\|_{L^2(\Omega)}) \tag{1.28}$$

En exploitant l'hypothèse (1.3) et $\boldsymbol{p}_\ell = \eta(\boldsymbol{\rho}_\ell)$, on peut écrire :

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon$ seulement dépendant de ε, η, et Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{\rho}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\varepsilon + \varepsilon \|\boldsymbol{p}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.29}$$

Cette estimation avec (1.28), donnent :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \widetilde{C}_\varepsilon$ seulement dépendant de ε, η, $\boldsymbol{f}$ et Ω tel que :

$$\|\boldsymbol{u}_\ell\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq \widetilde{C}_\varepsilon + \varepsilon \|\boldsymbol{p}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.30}$$

Maintenant pour avoir une estimation sur $\boldsymbol{p}_m$, procédons dans un premier temps comme dans step 1 :

En appliquant le lemme 3.3 avec $q = \boldsymbol{p}_\ell - m(\boldsymbol{p}_\ell)$ on obtient :

Il existe $w \in H_0^1(\Omega)^d$ tq $\operatorname{div}(w) = \boldsymbol{p}_\ell - m(\boldsymbol{p}_\ell)$ p.p dans Ω et :

$\|w\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_d \|\boldsymbol{p}_\ell - m(\boldsymbol{p}_\ell)\|_{L^2(\Omega)^d}$, avec C_d une constante indépendente de ℓ.

En suite, les mêmes étapes que dans step 1 permettent d'écrire :

$$\int_\Omega (\boldsymbol{p}_\ell - m(\boldsymbol{p}_\ell))^2\, dx = \int_\Omega f_l(x, \boldsymbol{\rho}_\ell).w\, dx - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_\ell : \nabla w\, dx$$

Maintenant, l'estimation sur w avec (1.29) et (1.30) impliquent :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{C}_\varepsilon$ seulement dépendant de ε, η, $\boldsymbol{f}$ et Ω tel que :

$$\|(\boldsymbol{p}_\ell - m(\boldsymbol{p}_\ell)\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}_\varepsilon + \varepsilon \|\boldsymbol{p}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.31}$$

A ce stade, on procède exactement comme dans step 1 : en exploitant $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_\ell\, dx = M$, en faisant intervenir la fonction $\bar{\eta}$ (la réciproque de η) et en appliquant le lemme 3.4 avec : $a = \varepsilon$, bien choisi, et $\theta = \bar{\eta}$, on obtient :

$\exists C_2$ seulement dépendent de $\Omega, \eta, \boldsymbol{f}$ et M tel que :

$$\|\boldsymbol{p}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \tag{1.32}$$

Maintenant (1.32) avec (1.29) et (1.30) conduisent aux estimations suivantes : $\exists\, C_3$ seulement dépendent de $\Omega, \eta, \boldsymbol{f}$ et M tel que :

$$\|\boldsymbol{u}_\ell\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_3 \tag{1.33}$$

$$\|\boldsymbol{\rho}_\ell\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \tag{1.34}$$

Or, on peut avoir une meilleure estimation sur $\boldsymbol{\rho}_\ell$, en effet : n étant fixé dans cette étape, (1.33) avec le théorème 1.2 donnent :

$\exists\, C_4$ seulement dépendent de $\Omega, \eta, \boldsymbol{f}, M, \varphi$ et n tel que :

$$\|\boldsymbol{\rho}_\ell\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 \tag{1.35}$$

Finalement, les estimations (1.32), (1.33) et (1.35) conduisent aux convergences suivantes, à des sous-suites près, quand $\ell \to +\infty$:

$\boldsymbol{u}_\ell \longrightarrow \boldsymbol{u}$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)^d$,

$\boldsymbol{\rho}_\ell \longrightarrow \boldsymbol{\rho}$ faiblement dans $H^1(\Omega)$, fortement dans $L^2(\Omega)$ et p.p dans Ω,

$\boldsymbol{p}_\ell \longrightarrow \boldsymbol{p}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

Grâce à ces convergences, on passe sans difficultés supplémentaires , par rapport à step 1, sur les équations (1.22b), (1.22c) et (1.22d).

En particulier le passage à la limite sur l'équation (1.22d) est dû à :

La convergence de la suite $(\eta(\boldsymbol{\rho}_\ell))_\ell$ vers $\eta(\boldsymbol{\rho})$ p.p dans Ω avec $(\eta_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell))_\ell$ bornée dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence de cette suite fortement dans $L^q(\Omega)$, pour tout $q < 2$.

En plus de la convergence de la suite $(\eta_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell))_\ell$ vers $\boldsymbol{p}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, permettent d'avoir par unicité de la limite : $\boldsymbol{p} = \eta(\boldsymbol{\rho})$.

Le passage à la limite sur $\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_\ell \, dx = M$ est évident et donne $\int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M$, ce qui permet d'avoir grâce au théorème 1.2 : $\boldsymbol{\rho} > 0$ p.p dans Ω.

Et donc au final on a bien $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\rho})$ est solution du problème (1.27), ce qui conclut la preuve de la proposition 1.6.

Step 3 : $n \to +\infty$:

L'étape 2 nous donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $(u_n, \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{\rho}_n)$ satisfaisant :

$$\boldsymbol{u}_n \in H_0^1(\Omega)^d, \boldsymbol{\rho}_n \in H^1(\Omega), \boldsymbol{p}_n \in L^2(\Omega), \tag{1.36a}$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_n : \nabla v \, dx - \int_\Omega \boldsymbol{p}_n \operatorname{div}(v) \, dx = \int_\Omega f(x, \boldsymbol{\rho}_n).v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \tag{1.36b}$$

$$\int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}_n) \boldsymbol{u}_n.\nabla \psi \, dx - \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\rho}_n(x).\nabla \psi(x) \, dx = 0, \ \forall \psi \in H^1(\Omega), \tag{1.36c}$$

$$\boldsymbol{\rho}_n > 0 \, \text{p.p dans} \, \Omega, \int_\Omega \boldsymbol{\rho}_n \, dx = M, \boldsymbol{p}_n = \eta(\boldsymbol{\rho}_n) \, \text{p.p dans} \, \Omega. \tag{1.36d}$$

Pour terminer la preuve du théorème 1.1 **i.e** : obtenir une solution du problème (1.5), on va passer à la limite sur le problème (1.36) quand $n \to +\infty$.

Pour ce faire, cherchons des estimations sur $\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{\rho}_n$ et $\boldsymbol{p}_n$.

En remplaçant $\boldsymbol{f}_\ell$ par $\boldsymbol{f}$ et en procédant exactement comme dans l'étape précédente, on obtient : une estimation $H_0^1(\Omega)^d$ sur $\boldsymbol{u}_n$ et une estimation dans $L^2(\Omega)$ sur $\boldsymbol{\rho}_n$ et $\boldsymbol{p}_n$, soit : l'existence de C_1 seulement dépendent de Ω, $\boldsymbol{f}$, η et M telle que :

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_{H_0^1(\Omega)^d}, \|\boldsymbol{\rho}_n\|_{L^2(\Omega)}, \|\boldsymbol{p}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1. \tag{1.37}$$

Ceci permet de dire que quand $n \to +\infty$,et à une sous-suite près, on a :

$\boldsymbol{u}_n \longrightarrow \boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$ et faiblement dans $H_0^1(\Omega)^d$,

$\boldsymbol{\rho}_n \longrightarrow \boldsymbol{\rho}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$,

$\boldsymbol{p}_n \longrightarrow \boldsymbol{p}$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

N.B : Notons, que dans cette étape on perd l'estimation $H^1(\Omega)$ sur $\boldsymbol{\rho}$, vu que celle-ci dépendait de n . Ceci entraine des difficultés dans le passage à la limite, en particulier sur les termes : $\boldsymbol{f}(.,\boldsymbol{\rho}_n)$, $\varphi(\boldsymbol{\rho}_n)$ et $\eta(\boldsymbol{\rho}_n)$. Un travail supplémentaire s'avère alors nécéssaire pour surmonter ces difficultés :

On a déjà : suite à la convergence faible de $\boldsymbol{\rho}_n$ vers $\boldsymbol{\rho}$ dans $L^2(\Omega)$:

$$\boldsymbol{\rho} \geq 0 \ \text{ p.p dans } \ \Omega$$

et

$$\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_n \, dx \longrightarrow \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx \quad \textbf{i.e :} \quad \int_\Omega \boldsymbol{\rho} \, dx = M.$$

Passons maintenant à la limite sur les équations (1.36b) et (1.36c).

Notons pour n $\in \mathbb{N}^*$: $h_n = f(., \boldsymbol{\rho}_n)$ et $q_n = \varphi(\boldsymbol{\rho}_n)$. Les hypothèses sur $\boldsymbol{f}$ et φ permettent d'avoir :

les deux suites $(h_n)_n$ et $(q_n)_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)^d$ et $L^2(\Omega)$ respectivement. Et donc, on a quand $n \to +\infty$, et à une sous-suite près :

$$h_n \to h \text{ faiblement dans } L^2(\Omega)^d,$$
$$q_n \to q \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Grâce aux convergences de $\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{p}_n$ et h_n, on passe facilement à la limite sur l'équation (1.36b) quand $n \to +\infty$,et on obtient :

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla v \; dx - \int_\Omega \boldsymbol{p} \operatorname{div}(v) \; dx = \int_\Omega h.v \; dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)^d. \tag{1.38}$$

Cherchons maintenant à prouver :

$$\int_\Omega q\boldsymbol{u}.\nabla\psi \; dx = 0, \, \forall \psi \in W^{1,\infty}(\Omega). \tag{1.39}$$

On introduit alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction : $\psi \in H^1(\Omega)$ définie par : $\psi = \ln(\boldsymbol{\rho}_n + \varepsilon)$. Donc :

$$\frac{1}{n}\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\rho}_n(x).\nabla\psi \; dx = \frac{1}{n}\int_\Omega \frac{|\nabla\boldsymbol{\rho}_n(x)|^2}{\boldsymbol{\rho}_n(x) + \varepsilon} \, dx$$

En prenant ψ comme fonction test dans l'équation (1.36c), on obtient :

$$\frac{1}{n}\int_\Omega \frac{|\nabla\boldsymbol{\rho}_n(x)|^2}{\boldsymbol{\rho}_n(x) + \varepsilon} \, dx = \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}_n(x))\boldsymbol{u}(x).\frac{\nabla\boldsymbol{\rho}_n(x)}{\boldsymbol{\rho}_n(x) + \varepsilon} \, dx$$

Maintenant, on définit la fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\varphi(r)}{r + \varepsilon} \, dr, \;\text{ pour }\; s > 0.$$

Grâce au fait que : $|\varphi(s)| \leq Ls$, on obtient : $|\phi(s)| \leq Ls$, et donc :

$\phi(\boldsymbol{\rho}) \in L^2(\Omega)$ et $\nabla\phi(\boldsymbol{\rho}) \in L^2(\Omega)$ i.e : $\phi(\boldsymbol{\rho}) \in H^1(\Omega)$.

De plus, $\nabla \phi(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{\varphi(\boldsymbol{\rho}_n)}{\boldsymbol{\rho}_n + \varepsilon} \nabla \boldsymbol{\rho}_n$, ceci donne d'après l'égalité précédente :

$$\frac{1}{n} \int_\Omega \frac{|\nabla \boldsymbol{\rho}_n(x)|^2}{\boldsymbol{\rho}_n(x) + \varepsilon} \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{u}(x).\nabla \psi(\boldsymbol{\rho}_n(x)) \, dx$$

i.e :

$$\frac{1}{n} \int_\Omega \frac{|\nabla \boldsymbol{\rho}_n(x)|^2}{\boldsymbol{\rho}_n(x) + \varepsilon} \, dx = \int_\Omega \phi(\boldsymbol{\rho}_n(x)) div(\boldsymbol{u}(x)) \, dx.$$

Ceci permet de déduire, grâce aux estimations qu'on a sur $\boldsymbol{u}_n$ et $\boldsymbol{\rho}_n$ qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}_+$, indépendant de n, tq :

$$\frac{1}{n} \int_\Omega \frac{|\nabla \boldsymbol{\rho}_n(x)|^2}{\boldsymbol{\rho}_n(x) + \varepsilon} \, dx \leq C_2$$

En appliquant le théorème de la convergence monotone et en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on arrive à l'estimation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n} \int_\Omega \frac{|\nabla \boldsymbol{\rho}_n(x)|^2}{\boldsymbol{\rho}_n(x)} \, dx \leq C_2 \tag{1.40}$$

Ceci nous permettera de prouver (1.39). En effet, soit $\psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, on a :

Suite à la convergence forte $L^2(\Omega)^d$ de $\boldsymbol{u}_n$ vers $\boldsymbol{u}$ et faible $L^2(\Omega)$ de $\boldsymbol{\rho}_n$ vers $\boldsymbol{\rho}$:

$$\int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}_n) \boldsymbol{u}_n.\nabla \psi \, dx \longrightarrow \int_\Omega q\boldsymbol{u}.\nabla \psi \, dx, \ \text{qd}\, n \to +\infty$$

Et l'inégalité(1.40), permet d'avoir :

$$\left| \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\rho}_n(x).\nabla \psi(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{n} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla \boldsymbol{\rho}_n|^2}{\boldsymbol{\rho}_n} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \boldsymbol{\rho}_n \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

i.e :

$$\left| \frac{1}{n} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{\rho}_n(x).\nabla \psi(x) \, dx \right| \leq C_{\psi,M,C_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

D'où le résultat : $\int_\Omega q\boldsymbol{u}.\nabla \psi \ dx = 0$, $\forall \psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

A présent, la principale difficulté est de prouver que $h = \boldsymbol{f}(.,\boldsymbol{\rho})$, $q = \varphi(\boldsymbol{\rho})$ et $\boldsymbol{p} = \varphi(\boldsymbol{\rho})$. Pour ce faire, on va prouver dans un premier temps que :

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \boldsymbol{p}_n q_n\,dx \le \int_\Omega \boldsymbol{p} q\,dx$$

On a, vu que $(q_n)_n$ est une suite bornée de $L^2(\Omega)$, le lemme 3.5, donne : l'existence d'une suite $(v_n)_n$ de $H^1(\Omega)^d$ telle que :

$$\mathrm{div}(v_n) = q_n,\ \mathrm{curl}(v_n) = 0\,\mathrm{et}\ \|v_n\|_{H^1(\Omega)^d} \le C\|q_n\|_{L^2(\Omega)}$$

Ceci implique que la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)^d$, et donc, à une sous-suite près, quand $n \to +\infty$, on a :

$$v_n \longrightarrow v \text{ fortement dans } L^2(\Omega)^d \text{ et faiblement dans } H^1(\Omega)^d,$$

Ce qui donne : $\forall\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \mathrm{div}(v_n)\psi\,dx \longrightarrow \int_\Omega \mathrm{div}(v)\psi\,dx$$

D'autre part :

$$\int_\Omega \mathrm{div}(v_n)\psi\,dx = \int_\Omega\ q_n\psi\,dx \longrightarrow \int_\Omega q\psi$$

D'où l'égalité $\mathrm{div}(v) = q$ p.p dans Ω.

Et de même, on obtient : $\mathrm{curl}(v) = 0$.

De plus : $\forall\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, en prenant $v_n\psi$ comme fonction test dans l'équation (1.36), on obtient :

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}_n : \nabla(v_n\psi)\,dx - \int_\Omega \boldsymbol{p}_n\, div(v_n\psi)\,dx = \int_\Omega h_n.(v_n\psi)\,dx$$

Or, $\boldsymbol{u}_n,\ v_n\psi \in H_0^1(\Omega)^d$ permet décrire :

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}_n : \nabla(v_n\psi)\,dx = \int_\Omega \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}_n).\mathrm{curl}(v_n\psi)\,dx + \int_\Omega div(\boldsymbol{u}_n).div(v_n\psi)\,dx$$

i.e :

$$\int_\Omega \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}_n).\mathrm{curl}(v_n\psi)\,dx+\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{u}_n).\mathrm{div}(v_n\psi)\,dx-\int_\Omega \boldsymbol{p}_n\,div(v_n\psi)\,dx=\int_\Omega h_n.(v_n\psi)\,dx$$

Or : $\mathrm{div}(v_n\psi)=\psi\mathrm{div}(v_n)+v_n.\nabla\psi=\psi q_n+v_n.\nabla\psi$

Un simple calcul permet d'écrire : $\mathrm{curl}(v_n\psi)=\psi\mathrm{curl}(v_n)+A(\psi)v_n$, où $A(\psi)$ est une matrice ,$(d\times d)$, dont les composantes font intervenir les dérivées partielles premières de ψ.

i.e : $\mathrm{curl}(v_n\psi)=A(\psi)v_n$

L'égalité précédente prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\Omega(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}_n)-\boldsymbol{p}_n)q_n\psi\,dx+\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{u}_n)v_n.\nabla\psi\,dx-\int_\Omega \boldsymbol{p}_n v_n.\nabla\psi\,dx&\\ \textstyle+\int_\Omega \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}_n).A(\psi)v_n\,dx=\int_\Omega h_n.v_n\psi\,dx&\end{aligned}$$

Et donc, en passant à la limite quand $n\to+\infty$ et en exploitant les convergences : faible $(H^1)^d$ de $\boldsymbol{u}_n$, faible L^2 de h_n et $\boldsymbol{p}_n$ et forte $(L^2)^d$ de v_n, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega(\mathrm{div}(\boldsymbol{u}_n)-\boldsymbol{p}_n)q_n\psi\,dx=\int_\Omega h.(v\psi)\,dx-\int_\Omega \mathrm{div}(u)v.\nabla\psi\,dx&\\ -\int_\Omega \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}).A(\psi)v\,dx+\int_\Omega \boldsymbol{p}v\cdot\nabla\psi\,dx&\end{aligned}\tag{1.41}$$

En revenant à (1.38), on a :

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla(v\psi)\ dx-\int_\Omega \boldsymbol{p}\ div(v\psi)\ dx=\int_\Omega h.v\psi\ dx$$

ou de manière équivalente :

$$\int_\Omega \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}).\mathrm{curl}(v\psi)\,dx+\int_\Omega div(\boldsymbol{u}).div(v\psi)\,dx-\int_\Omega \boldsymbol{p}\,div(v\psi)\,dx=\int_\Omega h.v\psi\,dx$$

ce qui donne en utilisant $\mathrm{div}(v)=q$ et $\mathrm{curl}(v)=0$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\mathrm{div}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{p})q\psi\,dx+\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{u})v.\nabla\psi\,dx-\int_\Omega \boldsymbol{p}v.\nabla\psi\,dx&\\ +\int_\Omega \mathrm{curl}(\boldsymbol{u}).A(\psi)v\,dx=\int_\Omega h.v\psi\,dx&\end{aligned}$$

avec (1.41), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega(\text{div}(\boldsymbol{u}_n)-\boldsymbol{p}_n)q_n\psi\,dx=\int_\Omega(\text{div}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p})q\psi\,dx,\ \forall\psi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\quad(1.42)$$

On voudrait prendre $\psi=1$ dans l'égalité précédente, montrons que ceci est possible :

En utilisant (1.4) et (1.3), on a : $\forall a>0$, $\exists b>0$ tels que :

$$aq_n=a\varphi(\boldsymbol{\rho}_n)\le aL\boldsymbol{\rho}_n\le\eta(\boldsymbol{\rho}_n)+b\ \text{ i.e } q_n\le\frac{\boldsymbol{p}_n}{a}+\frac{b}{a}$$

ce qui donne : $q_n^2\le2\left(\frac{\boldsymbol{p}_n^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$

Et donc : pour tout borélien $\mathcal{B}$ de Ω, on ait :

$$\int_{\mathcal{B}}q_n^2\,dx\le2\left(\frac{C_1^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}|\mathcal{B}|\right)$$

Si on pose $\varepsilon=4\frac{C_1^2}{a^2}$, on obtient ainsi :

$$\int_{\mathcal{B}}q_n^2\,dx\le\frac{\varepsilon}{2}+2\frac{b^2}{a^2}|\mathcal{B}|$$

i.e qu'au final on a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\,\text{tq}\,|\mathcal{B}|\le\delta\longrightarrow\int_{\mathcal{B}}q_n^2\,dx\le\varepsilon$$

Pour tout borélien $\mathcal{B}$ de Ω, avec : $\delta=\varepsilon\frac{a^2}{4b^2}$

D'où l'équi-intégrabilité de la suite $(q_n^2)_n$.

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donne :

$$\int_{\mathcal{B}}|(\text{div}\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{p}_n)q_n|\,dx\le\|\text{div}\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{p}_n\|_{L^2(\Omega)}\|q_n\|_{L^2(\mathcal{B})}$$

ce qui implique l'équi-intégrabilité de la suite $((\text{div}\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{p}_n)q_n)_n$.
Ceci avec (1.42) et en appliquant le lemme 3.6 donne :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(\text{div}(\boldsymbol{u}_n)-\boldsymbol{p}_n)q_n\,dx=\int_\Omega(\text{div}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p})q\,dx\qquad(1.43)$$

Maintenant, on applique le lemme 3.2 avec $\phi=\varphi$, on obtient :

$$\int_\Omega\varphi(\boldsymbol{\rho}_n)\text{div}\boldsymbol{u}_n\,dx\le0$$

i.e :

$$\int_\Omega q_n \mathrm{div}\boldsymbol{u}_n \, dx \leq 0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}_n q_n \, dx = \int_\Omega (\boldsymbol{p}_n - \mathrm{div}\boldsymbol{u}_n) q_n \, dx + \int_\Omega q_n \mathrm{div}\boldsymbol{u}_n \, dx \leq \int_\Omega (\boldsymbol{p}_n - \mathrm{div}\boldsymbol{u}_n) q_n \, dx$$

et donc :

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega \boldsymbol{p}_n q_n \, dx \leq \int_\Omega (\boldsymbol{p} - \mathrm{div}\boldsymbol{u}) q \, dx$$

On peut alors écrire, qu'à une sous-suite près, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \boldsymbol{p}_n q_n \, dx \leq \int_\Omega (\boldsymbol{p} - \mathrm{div}\boldsymbol{u}) q \, dx$$

Or, on a déjà $(q, \boldsymbol{u})$ satisfait :

$$\int_\Omega q\boldsymbol{u}.\nabla\psi = 0, \, \forall \psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$$

Le lemme 3.7 donne : $\int_\Omega q \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0$

D'où le résultat :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \boldsymbol{p}_n q_n \, dx \leq \int_\Omega \boldsymbol{p} q \, dx \tag{1.44}$$

Exploitant maintenant le fait que η est strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, notons $\overline{\eta}$ sa fonction réciproque, i.e : $\eta(\overline{\eta}(s)) = \overline{\eta}(\eta(s)) = s$, $\forall s \in \mathbb{R}_+$.

L'hypothèse (1.3) donne l'existence de $b > 0$ tel que :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, \, 0 \leq \overline{\eta}(s) \leq s + b.$$

Donc : $\overline{\eta}(\boldsymbol{p}) \in L^2(\Omega)$ vu que $\boldsymbol{p} \in L^2(\Omega)$.

Posons $\overline{\eta}(\boldsymbol{p}) = \overline{\boldsymbol{\rho}}$ de telle façon que : $\boldsymbol{p} = \eta(\overline{\boldsymbol{\rho}})$.

On introduit maintenant la fonction G_n définie par :

$$G_n = (\varphi(\boldsymbol{\rho}_n) - \varphi(\overline{\boldsymbol{\rho}}))(\eta(\boldsymbol{\rho}_n) - \eta(\overline{\boldsymbol{\rho}})).$$

Les hypothèse sur φ et η permettent, facilement, de déduire que : $G_n \geq 0$ p.p dans Ω et que $G_n \in L^1(\Omega)$, de plus on a :

$$0 \leq \int_\Omega G_n \, dx = \int_\Omega q_n \boldsymbol{p}_n \, dx - \int_\Omega q_n \boldsymbol{p} \, dx - \int_\Omega \varphi(\overline{\boldsymbol{\rho}}) \boldsymbol{p}_n \, dx + \int_\Omega \varphi(\overline{\boldsymbol{\rho}}) \boldsymbol{p} \, dx.$$

L'inégalité (1.44) et la convergence faible dans $L^2(\Omega)$ de $\boldsymbol{p}_n$ et $\boldsymbol{\rho}_n$ permettent d'avoir en passant à la limite sur la relation précédente :

$$0 \leq \int_\Omega G_n \, dx \leq 0$$

D'où la convergence dans $L^1(\Omega)$ de la suite $(G_n)_n$ vers la fonction identiquement nulle.

Et donc, à une sous-suite près : $G_n = (\varphi(\boldsymbol{\rho}_n) - \varphi(\overline{\boldsymbol{\rho}}))(\eta(\boldsymbol{\rho}_n) - \eta(\overline{\boldsymbol{\rho}})) \longrightarrow 0$ p.p dans Ω.

Ce qui implique que : $\boldsymbol{\rho}_n \longrightarrow \overline{\boldsymbol{\rho}}$, p.p sur Ω.

Ceci permet décrire suite au fait qu'on a aussi : $(\boldsymbol{\rho}_n)_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$: que :

$$\boldsymbol{\rho}_n \longrightarrow \overline{\boldsymbol{\rho}}, \text{ dans } L^q(\Omega), \ \forall q < 2.$$

D'autre part : la convergence faible de $\boldsymbol{\rho}_n$ vers $\boldsymbol{\rho}$ dans $L^2(\Omega)$, implique aussi la convergence faible de $\boldsymbol{\rho}_n$ vers $\boldsymbol{\rho}$ dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < 2$.

Et donc, par unicité de la limite faible, on obtient l'égalité : $\overline{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}$.

Ceci permet de déduire que : $\boldsymbol{p} = \eta(\overline{\boldsymbol{\rho}}) = \eta(\boldsymbol{\rho})$, $q = \varphi(\boldsymbol{\rho})$ et $h = f(., \boldsymbol{\rho})$
i.e on a bien $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\rho})$ solution de problème de Stokes en question, ce qui conclut la preuve de théorème 1.1.

Chapitre 2

Conclusion & Perspectives

Dans ce mémoire, on s'est intéressé au problème de Stokes stationnaire compressible avec une loi d'état très générale. On a établi un résultat d'existence pour ce problème par régularité visqueuse et ce en passsant à la limite sur un problème régularisé. En effet, dans le chapitre 1, section 1.2, on a étudié le problème de convection-diffusion avec une condition au bord du type Neumann : Un résultat d'existence et d'unicité avec quelques propriétés importantes sur la solution ont été établis. Ces résultats nous ont permis ensuite de démontrer dans la section 1.3 le théorème 1.1 : en effet dans une première partie on démontre l'existence de solution faible du problème de Stokes régularisé par l'ajout d'un terme de diffusion dans l'équation de conservation de la masse et des troncatures en $\boldsymbol{f}$ et η, soit le problème régularisé .

En deuxième partie, on passe à la limite sur ce problème : ce passage à la limite se fait en trois étapes et nécessite l'élaboration d'estimations sur les solutions approchées . Des difficultés à différentes échelles dans chaque étape du passage à la limite en particulier dans la step 3 où les estimations ne donnent que des résultats de compacité faible sur la densité et la pression. L'astuce principale dans cette étape est de prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \boldsymbol{p}_n \varphi(\boldsymbol{\rho}_n)\, dx \le \int_\Omega \boldsymbol{p} q\, dx$$

où q est la limite faible de $\varphi(\boldsymbol{\rho}_n)$ dans $L^2(\Omega)$.

Ceci nous a permis de conclure la preuve du théorème 1.1 i.e prouver l'existence d'une solution du problème (1.5).

Les perspectives de ce travail sont nombreuses, en particulier l'étude des équations de Stokes ou Navier-Stokes instationnaires. Il sera aussi intéréssant d'utiliser une autre approche dans l'étude de ce type de problème : l'approche discrète ou numérique : i.e démontrer l'existence de solution en passant à la limite sur un schéma numérique discrétisant ces équations. Ce genre d'approches étant très répandu de nos jours.

Chapitre 3

Annexe

3.1 Lemmes fondamentaux

Lemme 3.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, connexe avec un bord continu-Lipschitzien. Soit $\omega \subset \Omega$ une partie mesurable avec $\lambda_d(\omega) > 0$. On définit l'ensemble W_ω par :*

$$W_\omega\{\, u \in W^{1,1}(\Omega) \ \ tq\ u = 0 \ p.p \ dans \ \omega \,\}.$$

alors, il existe C seulement dépendant de Ω et ω tel que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\, |\nabla u|\, \|_{L^1(\Omega)}, \forall u \in W_\omega \text{ et pour tout } 1 \leq p \leq \tfrac{N}{N-1} \ .$$

Preuve Ce résultat est démontré dans [1].

Lemme 3.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, connexe avec un bord continu-Lipschitzien. Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant (1.4) et telle que $\varphi(s) > 0$ si $s > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M > 0$, $u \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p \in H^1(\Omega)$ une solution de problème suivant :*

$$\begin{cases} \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{\rho}(x))\boldsymbol{u}(x).\nabla\psi(x)\, dx - \frac{1}{n}\int_\Omega \nabla\boldsymbol{\rho}(x).\nabla\psi(x)\, dx = 0, \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ \int_\Omega \boldsymbol{\rho}(x)\, dx = M. \end{cases} \tag{3.1}$$

alors $\boldsymbol{\rho} > 0$ et pour $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(\boldsymbol{\rho}) \in L^2(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \phi(\boldsymbol{\rho})\, \mathrm{div}(u)\, dx \leq 0 \tag{3.2}$$

Preuve La preuve de ce résultat est assez simple, elle repose sur le bon choix de la fonction test ψ dans (3.1) et en jouant sur la régularité de la fonction ϕ . Une démonstration détaillée se trouve dans [1].

Lemme 3.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), connexe avec un bord continu-Lipschitzien. Soit $q \in L^2(\Omega)$ telle que $\int_\Omega q\,dx = 0$. Alors, il existe $w \in H_0^1(\Omega)^d$ telle que $\operatorname{div}(w) = q$ p.p dans Ω et $\|w\|_{H_0^1(\Omega)^d} \leq C_d \|q\|_{L^2(\Omega)}$ où C_d dépend uniquement de Ω.*

Preuve Ce résultat est bien connu. Une simple démonstartion figure dans [7].

Lemme 3.4 *Soit Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^d$ ($N \geq 1$) et $\boldsymbol{p} \in L^2(\Omega)$, $p \geq 0$ p.p. dans Ω. Supposons qu'il existe $0 \leq a < 1$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\|p - m\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|p\|_{L^2(\Omega)} + b$$

où m et la valeur moyenne de $\boldsymbol{p}$. Supposons qu'on a aussi : $\int_\Omega \theta(p)\,dx \leq A$ et $\lim\limits_{s \to +\infty} \theta(s) = +\infty$. Alors, il existe C uniquement dépendant de Ω, a, b, A et θ tel que :

$$\|\boldsymbol{p}\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Preuve Ce résultat est démontré dans [3].

Lemme 3.5 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $q \in L^2(\Omega)$. Alors, il existe $v \in H^1(\Omega)^d$ telle que $\operatorname{div}(v) = q$, p.p dans Ω, $\operatorname{curl}(v) = 0$ p.p dans Ω et $\|v\|_{H^1(\Omega)^d} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)}$ où C dépend uniquement de Ω.*

Preuve Ce lemme est un résultat classique, pour la preuve regarder par exemple [6].

Lemme 3.6 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ une suite equi-intégrable, et F une fonction de $L^1(\Omega)$. Supposons que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F_n \varphi\,dx = \int_\Omega F\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F_n\,dx = \int_\Omega F\,dx.$$

Preuve Ce résultat est bien connu, une démonstration existe dans [6].

Lemme 3.7 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soit $q \in L^2(\Omega)$, $q \geq 0$ p.p dans Ω et $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$. Supposons que $(q, \boldsymbol{u})$ satisfait :*

$$\int_\Omega qu.\nabla\psi\,dx = 0,\ \forall \psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$$

alors :

$$\int_\Omega q \operatorname{div}(u)\, dx = 0.$$

Preuve Ce résultat est démontré dans [6].

3.2 Quelques rappels utiles

Connexité :

Une sous-partie de E (espace topologique), notée Ω est dite connexe ssi elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Il n'existe pas de partitions de E en deux ouverts disjoints non vides
2. Il n'existe pas de partitions de E en deux fermés disjoints non vides
3. Les seules parties ouvertes et fermées de E sont l'ensemble vide et E.
4. Toute fonction continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante.

Espace de Hilbert :

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée. Ces espaces doivent leur nom au mathématicien Allemand David Hilbert.

Injections : Soient X et Y deux espaces vectoriels normés.

Injection continue :

On dit que X s'injecte continûement dans Y, et on note : $X \hookrightarrow Y$, s'il existe une injection continue i de X dans Y i.e :

$$\exists C > 0 \text{ tq } \forall x \in X : \|i(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \ .$$

Injection compacte :

L'injection de X dan Y est dite compacte si l'injection i est compacte **i.e** i transforme tout borné de X en un relativement compact de Y.

Dans ce cas on note : $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Equi-intégrabilité

Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^d$. Une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ est dite équi-intégrable ssi :

$$\lim_{\lambda_d(\mathcal{A})\to 0} \int_{\mathcal{A}} |F_n|\, dx = 0, \text{ uniformement par rapport à } n \in \mathbb{N}$$

pour tout borélien $\mathcal{A} \subset \Omega$.

Formule de Green

Soit Ω une partie borné de $\mathbb{R}^d$ (d $\geq$ 1) et $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors on a la formule de Green :

$$\int_\Omega -\Delta u \; v \; dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \; dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ou n est le vecteur extérieur de la normale.

Formule de la divergence :

Soient $\delta : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on a :

$$\int_\Omega div(\delta)\phi dx = -\int_\Omega \delta . \nabla \phi dx + \int_{\partial\Omega} \delta\phi . n dx$$

ou n est le vecteur extérieur de la normale.

Théoreme de Rellich-Kondrachov :

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$,de classe $\mathcal{C}^1$,alors on a :

1. Si $d < p$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, avec injection compact.
2. Si $d = p$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec injection compact $\forall q \in [1, +\infty[$.
3. Si $d > p$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec injection compact $\forall q \in \left[1, \frac{2d}{d-2}\right[$.

Inégalité de *Hölder*

Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a :

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$. Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a :

$$||f||_{L^r(\Omega)} \leq ||f||^\theta_{L^p(\Omega)} \, ||f||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \text{ avec } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} \quad , 0 \leq \theta \leq 1.$$

Inégalité de Sobolev :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ou $(d > 2)$. Cette inégalité donne l'injection de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ dans l'espace de Lebesgue $L^{\bar{q}}(\Omega)$ avec injection continue , pour tout $\bar{q} = \frac{2d}{d-2}$.C'est à dire $\forall f \in W^{1,2}(\Omega)$ il existe C_s dépend de Ω telle que :

$$||f||_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \leq C_s ||f||_{H^1(\Omega)}$$

Inégalité de Poincaré-Wirtinger :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). Étant donnée une fonction $u \in H^1(\Omega)$, notons $\prec u \succ_\Omega$ sa moyenne sur Ω ie :

$$\prec u \succ_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)dx$$

Alors $\exists C_p$ et pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on a :

$$||u - \prec u \succ_\Omega ||_{L^2(\Omega)} \leq C_p ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$$

Théoreme de convergence monotone :

Soit (E, A, μ) un espace mésuré pour tout suite croissante (f_n) de fonction mesurable sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$, alors :

$$\int \lim(f_n) d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Théoreme de Lax-Milgram :

Soit H un espace de Hilbert réel et a :$H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.alors, on a :

Pour tout L $\in H'$, il existe un unique élement U $\in$ H tq :

$$a(U, V) = L(V), \qquad \forall V \in H$$

Théoreme de point fixe de Brouwer :

Soit E un espace de Banach et C un convexe fermé de E. T une application continue de C dans C telle que $T(C)$est relativement compact, alors : T admet un point fixe.

Degré topologique de Leray-Shauder :

Soit E un Banach et A l'ensemble des triplets (Id-f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de E, $y \in E$ et f : $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ compact.On définit le degré topologique de Leray-Schauder d : A $\to \mathbb{Z}$ verifier :

1- Normalisation.
2- Additivité.
3- Invariance par homotopie : pour : $h : [0,1] \times \bar{\Omega} \to E$ compact et y : $[0,1] \to E$ continue tq :$\forall t \in [0,1]$, y(t) $\notin$ (Id-h(t,.))($\partial\Omega$) alors :

$$d(Id - h(0,.), \Omega, y(0)) = d(Id - h(1,.), \Omega, y(1))$$

Bibliographie

[1] A. Fettah, T. Gallouët and H. Lakehal. An existence proof for the stationary compressible Stokes problem Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., (6) volume 23, no 4, 2014, pp 847-875.

[2] A. Fettah and T. Gallouët. Compressible Stokes problem with general EOS. Finite volumes for complex applications. VI. Problems & perspectives. Volume 1, 2, 457Ð465, Springer Proc. Math., 4, Springer, Heidelberg, 2011.

[3] A. Fettah and T. Gallouët.Numerical approximation of the general compressible Stokes problem. IMA Journal of Numerical Analysis.

[4] Haïm BREZIS. Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications. Paris : Masson, 1983.

[5] T. Gallouët and R. Herbin. Mesure, intégration, Probabilités ellipse : Ellipses Edition Marketing, 2013, 978-2-7298-77538.

[6] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, and J.-C. Latché. A convergent finite element-finite volume scheme for the compressible Stokes problem. Part II : the isentropic case. Math. Comp. 79 (2010), no. 270, 649Ð675

[7] Bramble, J.H.. A proof of the inf-sup condition for the Stokes equations on Lipschitz domains, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 13, 2003.