

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE SALHI AHMED -NAÂMA-
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Présenté par :
Khiri Abdelhamid
pour obtenir le diplôme de
Master En Mathématiques

Intitulé :

**Etude de quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens
de Caputo**

Soutenu le :27/09/2020
devant le jury :

Président : **I.Moulay Khatir** MAA C-Univ Salhi Ahmed-Naâma.
Encadreur : **Z.Achouri** MCB ESSA Tlemcen.
Examineurs : **B.Khaldi** MCB C-Univ Salhi Ahmed-Naâma.

DEDICACES

Ce modeste travail est dédié :
À mes chers parents ma mère et mon
père, pour leurs patiences, leurs
amours, leurs soutiens et leurs
encouragements.

À mes frères et sœurs, mes oncles et
mes tantes.

À tous membres de ma grande famille
” KHIRI ”, chacun en son nom petit
et grand.

À toutes mes chères amies surtout
”Nouali Abdelmadjid” et mes
compagnons de ce long chemin et tous
les étudiants et étudiantes de ma
promotion.

Khiri Abdelhamid.....

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Zineb Achouri qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres des jurys Mr Khaldi Ibrahim et Moulay Khatir Ismail pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout les enseignants au long de ma vie scolaire. J'adresse aussi mon remerciements les plus vifs à tous personnes qui ma aidé et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

<i>Introduction</i>	7
1 <i>Préliminaires</i>	11
1.1 <i>Introduction</i>	11
1.2 <i>Notations et Définition</i>	11
1.3 <i>Calcul fractionnaire</i>	12
1.3.1 <i>Fonction Gamma</i>	13
1.3.2 <i>Fonction Beta</i>	13
1.3.3 <i>Intégration et dérivation fractionnaires</i> . . .	14
1.4 <i>Théorèmes de Point Fixe</i>	18
2 <i>Dérivées et Intégrales fractionnaires</i>	21
2.1 <i>Les Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov</i> .	21
2.1.1 <i>Unification des dérivées et des intégrales fractionnaires d'ordre entier</i>	21
2.1.2 <i>Propriétés</i>	26
2.1.3 <i>Transformée de Laplace</i>	27
2.2 <i>Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville</i> .	28
2.2.1 <i>Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles</i>	28
2.3 <i>Dérivées fractionnaires de Caputo</i>	30
2.3.1 <i>Propriétés</i>	30
2.3.2 <i>Transformée de Laplace</i>	31

3	<i>Equations différentielles d'ordre fractionnaire</i>	33
3.1	<i>Introduction</i>	33
3.2	<i>Résultats Principaux</i>	37
3.3	<i>Exemple</i>	43
	<i>Conclusion</i>	45
	<i>Bibliographie</i>	45

Introduction

Le sujet du calcul fractionnel (c'est-à-dire le calcul des intégrales et des dérivés arbitraire, réel ou complexe) a acquis une popularité et une importance considérables au cours des trois dernières décennies, principalement en raison de ses applications démontrées dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Il fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour résoudre des équations différentielles et intégrales, ainsi que divers autres problèmes impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations. Dans une ou plusieurs variables.

*Historiquement, Isaac Newton (1642 – 1727) et Gotfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) ont découvert indépendamment le calcul au 17^{me} siècle. En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la différentiation et d'intégration ordinaire à l'ordre non-entier (arbitraire). L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale vers la fin du 17^{me} siècle, le sujet est aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps quand Leibniz, Newton ont inventé ce type de calcul. Leibniz a introduit le symbole $\frac{df(x)}{dx^n}$ pour désigner la n^{me} dérivée d'une fonction ($n \in \mathbb{N}$) quand il a signalé cela dans une lettre adressée à l'Hôpital datée du 30 septembre 1695 et l'Hôpital a posé la question de ce que serait le résultat si $n = \frac{1}{2}$ Leibniz lui a répondu : *Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel*

un jour, on pourra tirer des conséquences utiles , [23]. De ces paroles la est né le calcul fractionnaire. Le calcul fractionnaire est utilisé dans une variété des régions d'applications, par exemples : Viscoélasticité, la mécanique, théorie de contrôle, électricité, biologie, électromagnétique....,

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement.

Sans aller chercher les travaux en cours des spécialistes, nous recommandons la lecture de l'ouvrage classique (en Anglais) de Oldham et Spanier. Par ailleurs, les ouvrages en Français sont rares. Nous invitons le lecteur à poursuivre sa découverte de la dérivation d'ordre fractionnaire via les ouvrages d'A. Oustaloup et de G.Montseny ou les travaux récents de D. Matignon, qui a écrit un chapitre d'introduction au calcul fractionnaire en Français.

Ce mémoire a pour objet l'étude d'existence et d'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire est composé en quatre chapitres qui est organisée selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous évoquerons quelques préliminaires concernant les outils de base du calcul fractionnaire ainsi que quelques théorèmes de point fixe.

Le deuxième chapitre intitulé "Dérivées et Intégrales fractionnaires" est consacré pour les définitions de quelques opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires et leurs propriétés.

Le troisième chapitre intitulé " Équations différentielles d'ordre

fractionnaire”, nous traiterons quelques résultats d’existence et d’unicité des solutions du problème au limite d’équation différentielle fractionnaire suivant :

$${}^c D^a y(t) = f(t, y(t)) \quad \text{avec } t \in J = [0, T], 0 < c < 1 \quad (0.1)$$

$$ay(0) + by(T) = c \quad (0.2)$$

En termine ce mémoire par une conclusion générale et un résumé.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle des outils de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail. En particulier, on introduit des notations, définitions, on présente certains résultats fondamentaux sur l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, quelques lemmes et on rappelle quelques théorèmes de points fixe utilisés dans ce travail

1.2 Notations et Définition

Dans cette section, nous présentons les notations et les définitions nécessaires pour ce mémoire. Soit $J = [0, T], T > 0$, Notons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans \mathbb{R} , muni de la norme :

$$\|y\|_{\infty} = \sup\{|y(t)|/t \in J\}$$

où $|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{R} .

Définition 1.2.1 *Soit E un espace de Banach et $A : E \rightarrow E$, un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant),*

s'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que : $\|Ax - Ay\|_E \leq K\|x - y\|_E$, pour tout $x, y \in E$

Proposition 1.2.1 Soit $C(J, E)$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach E et $\mathcal{M} \subset C(J, E)$.

\mathcal{M} est relativement compact ssi

- (i) \mathcal{M} est borné i.e. $\exists b \geq 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq b, \forall f \in \mathcal{M}$
- (ii) \mathcal{M} est équicontinu i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{M}$
- (iii) $\forall x \in J, \{f(x) \in E, f \in \mathcal{M}\}$ est relativement compact dans E

Définition 1.2.2 Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ une fonction

- f est dite compacte si l'image $f(E)$ est relativement compacte dans F ,
- f est dite complètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de E est relativement compacte dans F .

Théorème 1.2.1 (Arzela-Ascoli) Soit F une famille des fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$. Alors F est relativement compacte (précompact) dans $C[a, b]$ si F est équicontinu et uniformément bornée.

1.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section on a besoin de présenter certaines fonctions utiles telles que la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire, de telles fonctions sont dites fonctions spéciales, nous allons aussi définir l'intégrale fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, quelques propriétés et des lemmes nécessaire pour notre travail.

1.3.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction d'Euler Gamma $\Gamma(z)$ qui généralise le factorielle $n!$.

Définition 1.3.1 La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Proposition 1.3.1 Une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (1.1)$$

en particulier

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $\Gamma(1) = 1$ une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle a des pôles simples aux points $z = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Théorème 1.3.1 La fonction Gamma est définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1} dt.$$

1.3.2 Fonction Beta

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.3.2 La fonction Bêta est définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0 \quad (1.2)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0 \quad (1.3)$$

Il s'ensuit de (1.3) que

$$B(p, q) = B(q, p), \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$$

1.3.3 Intégration et dérivation fractionnaires

Dans cette section, on va rappeler l'intégration fractionnaire et la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, quelques propriétés et on va donner des exemples.

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α ($\alpha > 0$) généralise la célèbre formule d'intégrales répétées, n -fois, On va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire.

Définition 1.3.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'opérateur I_a^α définie en $L^1[a, b]$ par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \text{ pour } a \leq t \leq b$$

où Γ est la fonction Gamma, est appelé opérateur intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann liouville . Pour $\alpha = 0, I_a^\alpha = I$ opérateur identité.

- On note $I_0^\alpha f(t)$ par $I^\alpha f(t)$

Théorème 1.3.2 Pour $f \in C[a, b]$ l'intégrale fractionnaire possède la propriété suivante :

$$I_a^\alpha [I_n^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \text{ pour } \alpha > 0, \beta > 0$$

Exemple 1.3.1 L'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f telle que :

$$f(t) = (t-a)^\beta$$

avec $\alpha > 0, \beta > -1$ et

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)}(t - a)^{\beta + \alpha}, \alpha > 0, \beta > -1$$

En effet :

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha - 1} (s - a)^\beta ds \end{aligned}$$

On va utiliser le changement de variable suivant :

$$s = a + (t - a)x \quad (1.4)$$

avec

$$(0 \leq x \leq 1)$$

d'après (1.4) on a

$$ds = (t - a)dx$$

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t - a - (t - a)x]^{\alpha - 1} [a + (t - a)x - a]^\beta (t - a) dx$$

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - a)^{\alpha - 1} (1 - x)^{\alpha - 1} (t - a)^\beta x^\beta (t - a) dx$$

donc :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{(t - a)^{\alpha + \beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha - 1} x^\beta dx$$

d'après (1.2), on aura :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{(t - a)^{\alpha + \beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1)$$

On utilise (1.3) on aura :

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0,5; \beta = 1$ et $a = 0$ On aura :

$$I^{0,5} f(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2,5)} t^{1,5} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(2,5)} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2,5)}$$

Exemple 1.3.2 L'intégrale fractionnaire d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) d'une fonction constante $f(t) = c$

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(t) &= I_a^\alpha(c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} c ds \\ &= \frac{c}{\alpha \Gamma(\alpha)} [-(t-s)^\alpha]_a^t \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On va définir la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, on va donner quelques exemples.

Définition 1.3.4 Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N}^*$ et f une fonction de classe $C^m([a, b])$ la dérivée fractionnaire au sens Caputo d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(s) ds$$

où $n = [\alpha] + 1$ on note $({}^c D_0^\alpha f)(t)$ par $({}^c D^\alpha f)(t)$

Proposition 1.3.2 [20] La dérivation fractionnaire au sens de Caputo est linéaire.

Exemple 1.3.3 Soit $0 < \alpha < 1$ et $f(t) = (t - a)^\beta, \beta > 0$ alors

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}$$

en effet :

$$\begin{aligned} ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} f'(s) ds \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} (s - a)^{\beta - 1} ds \end{aligned}$$

On fait le changement de variable (1.4) on aura :

$$\begin{aligned} ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= \frac{\beta}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (t - a)^{-\alpha} (1 - x)^{-\alpha} (t - a)^{\beta - 1} x^{\beta - 1} (t - a) dx \\ &= \frac{\beta (t - a)^{\beta - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (1 - x)^{-\alpha} x^{\beta - 1} dx \end{aligned}$$

On utilise (1.2) on aura :

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = \frac{\beta (t - a)^{\beta - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} B(\beta, 1 - \alpha)$$

et d'après (1.3) on a

$$\begin{aligned} ({}^e D_a^\alpha f)(t) &= \frac{\beta (t - a)^{\beta - \alpha} \Gamma(\beta) \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\beta + 1 - \alpha)} \\ &= \frac{\beta (t - a)^{\beta - \alpha} \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

Exemple 1.3.4 La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha, \alpha > 0$ au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t) = c$ est nulle.

Lemme 1.3.1 Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$${}^c D^\alpha h(t) = 0$$

admet une solutions $h(t) = \alpha_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $n = [\alpha] + 1$

Lemme 1.3.2 Soit $\alpha > 0$ alors $I^\alpha = D^\alpha h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + h(t)$, pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$

Lemme 1.3.3 Soit f une fonction de classe $C^m([a, b])$, $\alpha > 0$, et $n = [a] + 1$ alors

$$I_a^\alpha ({}^c D_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=a}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

Lemme 1.3.4 Soit $a > 0$, et $f \in L^\infty[a, b]$ alors

$$({}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

Pour plus de détails sur la dérivation fractionnaire, le lecteur intéressé pourra consulter [11, 23, 20, 22, 26, 25].

1.4 Théorèmes de Point Fixe

Dans cette section nous présentons deux théorèmes de point fixe qui sont utilisés dans notre travail pour démontrer l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sous certaine condition au sens de Caputo.

Théorème 1.4.1 (Contraction de Banach) Soit X un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.

Théorème 1.4.2 (L'Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder) Soit E un espace de Banach, et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$. Soit $F : U \rightarrow U$ est un opérateur complètement continu. Alors ou bien

i) F a un point fixe
ou bien

ii) L'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in U : x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.

Chapitre 2

Dérivées et Intégrales fractionnaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques approches de généralisation de la notion de dérivation et intégration.

2.1 Les Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

2.1.1 Unification des dérivées et des intégrales fractionnaires d'ordre entier

Dans cette section nous donnons une approche pour l'unification des deux notions, qui sont souvent présentées séparément dans l'analyse classique : dérivée d'ordre entier n et intégrale répéter n -fois. Considérons une fonction continue $y = f(t)$ On sait que la dérivée première de la fonction $f(t)$ est définie par :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.1)$$

En appliquant cette définition deux fois, on trouve la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \quad (2.2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

En utilisant (2.1) et (2.2) nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (2.3)$$

et par récurrence,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (2.4)$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (2.5)$$

Considérons maintenant, l'expression suivante qui généralise les fractions (2.1) et (2.4) :

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^P (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.6)$$

où p est un entier arbitraire, r est aussi un entier. Il est évident que pour $p \leq r$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \quad (2.7)$$

car dans un tel cas, comme entraîne de (2.5), tous les coefficients du numérateur après $\binom{p}{p}$ sont nuls. Pour les valeurs négatives de p , et Par commodité, on note :

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!} \quad (2.8)$$

alors, on a :

$$\left(\begin{matrix} -p \\ r \end{matrix} \right) = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \quad (2.9)$$

et en remplaçant p dans (2.6) par $(-p)$, on peut écrire :

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t - rh) \quad (2.10)$$

où p est un nombre entier positif. Si p est fixe, alors $f_h^{(-p)}(t)$ tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Pour arriver à une limite non nulle, on suppose que $n \rightarrow \infty$ Alors, on peut prendre $h = \frac{t-a}{n}$, où a est une constante réelle, et on cor (soit finie ou infinie), de $f_h^{(-p)}(t)$, que l'on notera comme suit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (2.11)$$

telle que : $nh = t - a$ Considérons quelques cas particuliers. Pour $p = 1$, on a :

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t - rh) \quad (2.12)$$

en tenant compte de $t - nh = a$ et que la fonction $f(t)$ est suppose continue, on conclut que :

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} f_h^{(-1)}(t) = D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

Pour $p = 2$. on a :

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ r \end{array} \right] = \frac{2.3\dots(2+r-1)}{r!} = r+1$$

et on a :

$$f_s^{-2}(t) = h \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) h f(t-rh) \quad (2.14)$$

En notant $t+h=y$, nous pouvons écrire :

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(t-rh) \quad (2.15)$$

Si $h \rightarrow 0$, alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{-2}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau$$

car $y \rightarrow t$ quand $h \rightarrow 0$ Pour Le troisième cas particulier $p = 3$, en tenant compte de

$$\left[\begin{array}{c} 3 \\ r \end{array} \right] = \frac{3.4 \dots (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} \quad (2.16)$$

Nous avons :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2) h^2 f(t-rh)$$

En posant, comme ci-dessus, $t+2h=y$, nous obtenons :

$$f_h^{(-3)} = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{m+1} r(r+1) h^2 f(y-rh) \quad (2.17)$$

L'expression (2.17), peut s'écrire sous la forme :

$$f_n^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{m+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} rh f(y-rh) \quad (2.18)$$

En faisant tendre $h \rightarrow 0$, nous obtenons :

$${}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \frac{1}{2!} \int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

Parce que $y \rightarrow t$ et $h \rightarrow 0$ et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} r h f(y-rh) = \lim_{h \rightarrow 0} h \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = 0$$

Les relations (2.13) – 2.19) suggèrent l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0, nh=t-a} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (2.20) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Pour la démonstration de la formule (2.20), on procède par récurrence (voir [3]). Montrons maintenant, que (2.20) est une représentation d'une intégrale répétée p -fois. En intégrant la relation

$$\frac{d}{dt} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t)$$

de a à t , nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+1} f(t) \right) dt \\ {}_a D_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t \left({}_a D_t^{-p+2} f(t) \right) dt \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 {}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2}f(t) \right) dt \\
 &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+3}f(t) \right) dt \\
 &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t f(t) dt}_{p-f \text{ fois}}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

On remarque que la dérivée d'ordre entier n et l'intégrale répétée n -fois d'une fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de la formule générale :

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \tag{2.22}$$

qui représente la dérivée d'ordre m si $p = m$ et l'intégrale répétée m -fois si $p = -m$.

Théorème 2.1.1 Considérons une suite (β_k) de nombres réels et supposons que

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k &= 1 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} &= 0 \quad \text{pour tout } k \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} &= A, \quad \text{pour tout } k \\
 \sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| &< K \quad \text{pour tout } n
 \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A$$

Preuve : Pour la démonstration, on renvoi à [3]

2.1.2 Propriétés

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 2.1.1 Pour m entier positif et p nom entier on a :

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{m+p} f(t)$$

et

$$D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 2.1.2 si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors :

$${}_a D_t^P ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$$

" si $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$, alors :

$${}_a D_t^P ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$$

Seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, r-2$ avec $r = \max(m, n)$

2.1.3 Transformée de Laplace

soit f une fonction qui possède une transformée de Laplace $F(s)$. pour $0 \leq p < 1$, on a :

$${}_0 D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [{}_0 D_t^P f(t)] (s) &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} [sF(s) - f(0)] \\ &= s^p F(s) \end{aligned}$$

Pour $p \geq 1$ il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique mais dans le sens des distributions on a aussi :

$$\mathcal{L} [{}_0 D_t^P f(t)] (s) = s^p F(s)$$

2.2 Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans cette partie, nous donnons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.2.1 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$. En utilisant (2.35) on peut écrire

$$\begin{aligned} RD_t^\alpha (t - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta + m - \alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m (t - a)^{\beta + m - \alpha} \end{aligned} \quad (2.23)$$

on sait que

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^m (t - a)^{\beta + m - \alpha} = (\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)(t - a)^{\beta - \alpha} \quad (2.24)$$

Par substitution de (2.44) dans (2.43) on obtient :

$$\begin{aligned} &RD_t^\alpha (t - a)^\beta \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 :

i) La formule de dérivation (2.45) se réduit pour $\alpha = 1$ à

$${}_u^n D_t^1 (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (t - a)^{\beta - 1} = \beta (t - a)^{\beta - 1} = \frac{d}{dt} (t - a)^\beta \quad (2.25)$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$$RD_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante ! mais on a

$${}^n D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

Définition 2.2.1 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 2.2.2 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

Définition 2.2.3 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 2.2.4 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)

$$\forall t < b, \quad {}_1^k D_b^A f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}^R D_t^\circ f(t)$ et ${}^R D_b^A f(t)$ sont définies

2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$. Une certaine solution de ce problème a été proposée par M.Caputo. Soit $p \geq 0$ (avec $n - 1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a, b]$ La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}_a D_t f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \end{aligned}$$

2.3.1 Propriétés

1. **Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville**

soit $p \geq 0$ (avec $n - 1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$). supposons que f est une fonction telle que ${}_a D_r f(t)$ et ${}_a^F D_t f(t)$ existe, alors :

2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :**

Si f est une fonction continue, on a :

$$\Sigma D_t^P f(t) I_a^P = f$$

$$\text{et } I_n''(\varepsilon D_i' f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

Alors, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droit.

2.3.2 Transformée de Laplace

Si f possède une transformée de Laplace $F(s)$, alors :

$$\mathcal{L}_0^c [D_t^p f(t)](s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0)$$

(avec $n - 1 \leq p < n$) Comme cette transformée induit les valeurs de la fonction f et ces dérivées $f^{(k)}$ en la borne inférieure $t = 0$ pour lesquelles certaines interprétations physiques existent elle peut être très utile dans l'application.

Exemple 2.3.1 :

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}_a^c D_t^p C = 0$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo :

Soit p non entier et $0 \leq n - 1 < p < n$ avec $\alpha > n - 1$ alors, on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - \tau)^{\alpha - n}$$

d'où

$${}_a^c D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t - a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
{}^c D_t^p (t - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t - a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1 - s)^{n-p-1} (s)^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t - a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t - a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t - a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Equations différentielles d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité du problème

$${}^c D^a y(t) = f(t, y(t)) \quad \text{avec } t \in J = [0, T], 0 < a < 1 \quad (3.1)$$

$$ay(0) + by(T) = c \quad (3.2)$$

Où ${}^\circ D^\circ$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$

Banach dans le premier résultat et dans le deuxième on va utiliser le théorème de point fixe de Leray Schauder. Ce chapitre est basé sur les travaux —2,4—

Lemme 3.1.1 *soit $0 < a < 1$ et soit $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-s)^{a-1} h(s) ds \quad (3.3)$$

si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour équation différentielle fractionnaire

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in J = [0, T] \quad (3.4)$$

$$y(0) = y_0 \quad (3.5)$$

Preuve : Soit y solution du problème (3.4) – (3.5). On a l'équation (2.4) on appliquant l'opérateur I^α an x deux membres de l'égalité on aura :

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = I^\alpha h(t)$$

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \quad (3.6)$$

d'après le lemme 3.1 et pour $a = 0$, et $n = 1$ on aura

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = y(t) - y(0) \quad (3.7)$$

de(3.6) et (3.7) on aura :

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

et on a

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

ce qu'il fallait démontrer.

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

d' après le lemme 3.3 et pour $a = 0$, et $n = 1$ on aura

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = y(t) - y(0)$$

de (3.6) et (3.7) on aura

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

et on a

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 3.1.2 soit $0 < \alpha < 1$, et soit $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right] \quad (3.8)$$

Si et seulement si y est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in [0, T] \quad (3.9)$$

$$ay(0) + by(T) = c \quad (3.10)$$

Preuve : D'après le lemme 3.1 on a (3.3), on utilise la condition (3.10) pour calculer la constante y_0 . donc

$$ay(0) = ay_0, by(T) = by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds$$

On aura :

$$ay_0 + by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds = c, \text{ avec } a + b \neq 0$$

par suite, on aura :

$$y_0 = \frac{-1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right]$$

d'après le lemme 3.3, on aura

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t)$$

et

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= a \left[-\frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right) \right] \\ &\quad + b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right) \right] \\ &= -\frac{a}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right] \\ &\quad + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &\quad - \frac{b}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right] \\ &= \left[\frac{-ab}{(a+b)\Gamma(\alpha)} + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} - \frac{b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \right] \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &\quad + c \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) \\ &= \frac{-ab+(a+b)b-b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c \\ &= c \end{aligned}$$

et on obtient (3.10)

Définition 3.1.1 Une fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (2.1) – (2.2) si y vérifie l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right]$$

3.2 Résultats Principaux

On va énoncer un premier résultat sur l'unicité de la solution de (3.1) – (3.2) on utilisons le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.2.1 *Supposons que (H_1) il existe une constante $k > 0$ telle que $|f(t, u) - f(t, v)| \leq k|u - v|$, pour tout $t \in J$ et tout $u, v \in \mathbb{R}$ si*

$$\frac{kT^a \left(1 + \frac{|B|}{|a+4|}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \quad (3.11)$$

alors le problème (3.1) – (3.2) admet une solution unique sur $[0, T]$

Preuve : Transformons le problème (3.1) – (3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur : $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$. Définie par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right] \quad (3.12)$$

Il est clair que les points fixes de l'opération F sont solution du problème (3.1) – (3.2). F est bien défini, en effet : si $y \in C([0, T], \mathbb{R})$, alors $(Fy) \in C([0, T], \mathbb{R})$. Pour montrer que F admet un unique point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction.

En effet Si $x, y \in C([0, T], \mathbb{R})$ alors pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{a+b} \right. \\ &\quad \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - c \right] \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &\quad \left. + \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right] \right| \\ &= H(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\quad + \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \left[\frac{kT^\infty \left(1 + \frac{|b|}{a+b}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right] \|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0, T]$, nous avons

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{KT^\infty \left(1 + \frac{|b|}{a+b}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \|x-y\|_\infty$$

par la condition (3.11), l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach,

qui donne une solution intégrale unique au problème (3.1) – (3.2).
Le deuxième résultat pour le problème (3.1) – (3.2) est basé sur le théorème de point fixe de Leray-Schauder.

Théorème 3.2.2 Supposons que : (H_2) $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue (H_3) \exists existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(t, u)| \leq M \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \text{ et tout } u \in \mathbb{R}$$

Alors le problème (3.1) – (3.2) admet au moins une solution sur $[0, T]$.

Preuve : On va montrer que F défini par (2.12) admet un point fixe, on va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. La preuve est donnée en quatre étapes.

Étape 1 . F est continu.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0, T], \mathbb{R})$ telle que $y_n \rightarrow y$ dans $C([0, T], \mathbb{R})$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$, on va montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|G(y_n) - G(y)\|_\infty = 0$, pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} |F(y_n) - F(y)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s)) ds \right. \\ &\quad - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(a)} \int_0^T (T-s)^{a-1} f(s, y_n(s)) ds - c \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &\quad \left. + \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(a)} \int_0^T (T-s)^{a-1} f(s, y(s)) ds - c \right) \right| \\ |F(y_n) - F(y)| &\leq \frac{\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) T^\alpha \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\alpha \Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0, T]$, on obtient Puisque f est une

fonction continue, nous avons

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq \frac{\left(1 + \frac{|b|}{a+b}\right) T^\alpha \|f(\dots, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ donc F est continue

Étape 2

: F transforme tout ensemble borné en un ensemble

uniformément borné dans $C(J, \mathbb{R})$. En effet, il suffit de montrer que pour tout

$0, \eta$, il existe une constante strictement positive l telle que pour chaque

$y \in B_\eta = \{y \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta\}$ On veut montrer que

$\|F(y)\|_\infty \leq l$ On a pour tout $t \in [0, T]$ et de (H_3) on a

$$|F(y)(t)| \leq \frac{M}{\alpha \Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{|b| M}{\alpha \Gamma(\alpha) |a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha + \frac{|b| M}{\Gamma(\alpha + 1) |a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = l$$

et donc $F(B_\eta)$ est uniformément borné

Étape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble

équicontinu dans $C([0, T], \mathbb{R})$. Soit $t_1, t_2 \in [0, T], t_1 < t_2, B_\eta$ un

ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$ de l'étape deux et soit $y \in B_\eta$ Alors

$$|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha)$$

Quand $t_1 \rightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente

tend vers 0. Alors, l'ensemble $Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_\eta\}$ est pré-

compact dans \mathbb{R} . D'après les étapes précédentes et le Théorème

d'Arzelà-Ascoli, nous pouvons conclure que F est un opérateur

complètement continu.

Étape 4 : Estimations a priori des solutions. Maintenant reste à

montrer que : $\varepsilon = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est

borné. Soit $y \in \varepsilon_+$ alors

$$y = \lambda F(y), \text{ pour } 0 < \lambda < 1$$

donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right. \\ \left. - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right) \right]$$

pour $t \in J$ on a :

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\ + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

on a

$$|y(t)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\ \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}$$

on a

$$\|y\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R$$

avec R une constante strictement positif. Cela montre que e est uniformément borné par conséquence du théorème 1.4.2 du point fixe de Leray-Schauder, On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème de (3.1) – (3.2)

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème (3.1)–(3.2) Le lemme suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal.

Lemme 3.2.1 (Lemme de Gronwall) Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et

vérifiant l'inégalité.

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds \quad \forall t \in [a, b] \quad (3.13)$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_a^s \psi(u)du\right) ds \quad \forall t \in [a, b]$$

Preuve : Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$ En multipliant les deux membres de (3.13) par $\psi(t)$, on obtient :

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right), \text{ avec}$$

$$G(t) = F(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

comme $G(a) = F(a) = 0$, on déduit par intégration :

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(-\int_a^s \psi(u)du\right) ds$$

Or, d'après (3.13), on aura

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

d'où le résultat voulu. Maintenant on va présenter un théorème d'unicité des solutions du problème (3.1) – (3.2)

Théorème 3.2.3 Supposons que les conditions du théorème 2.2.2 sont vérifiées et supposons que de plus qu'il existe une constante positive K telle que :

$$|f(t, u(t)) - f(t, v(t))| \leq K \|u - v\|_\infty, \quad \forall t \in J \quad \text{et} \quad \forall u, v \in C(J, \mathbb{R})$$

je Alors le problème (3.1) – (3.2) admet une unique solution sur J

Preuve : L'existence d'au moins une solution $y(t)$ du problème (3.1) – (3.2) est assurée par le théorème 2.2.2. Pour prouver l'unicité de $y(t)$, on suppose que le (3.1) – (3.2) admet une autre solution. Soit $z(t)$ cette autre solution du problème (3.1) – (3.2) alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$|(y)(t) - z(t)| \leq \frac{K \left(1 + \frac{|\theta|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_{\infty} ds$$

Maintenant, on va utiliser le lemme de Granwall 2.2.1, avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |y(t) - z(t)|$ on obtient $y(t) = z(t)$, où l'unicité de la solution du problème (3.1) – (3.2)

3.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$${}^c D^{\alpha} y(t) = \frac{e^{-t} |y(t)|}{(9 + e^t)(1 + |y(t)|)}, \quad t \in J = [0, 1], \alpha \in (0, 1] \quad (3.14)$$

avec

$$y(0) + y(1) = 0 \quad (3.15)$$

Posons :

$$f(t; x) = \frac{e^{-t} x}{(9 + e^t)(1 + x)}, \quad (t, x) \in J \times [0, \infty)$$

Soit $x, y \in [0, \infty)$ et $t \in J$ alors on a :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{e^{-t}}{9 + e^t} \left| \frac{x}{(x+1)} - \frac{y}{(y+1)} \right| \\ &= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9 + e^t)(1+x)(1+y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} |x-y| \\ &\leq \frac{1}{10} |x-y| \end{aligned}$$

D'où la condition (H_1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$, nous vérifions la condition (3.11) est satisfaite pour des valeurs appropriées de $\alpha \in (0, 1]$ avec $a = b = T = 1$ En effet,

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha + 1) > \frac{3k}{2} = 0,15$$

Alors par le théorème 2.2.1 le problème (3.14) – (3.15) a une solution unique sur $[0, 1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (3.16)

Conclusion

Nous avons, dans ce mémoire, tenté d'introduire grâce à quelques exemples les notions fondamentales de dérivation d'ordre fractionnaire. Nous avons présenté ses différentes définitions avec les approches de Caputo et de Riemann-Liouville.

Enfin on établit une application sur les équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

- [1] *S. Abbes, M. Benchohra and G M. N'Guerekata.* textit Topics in Fractional Differential Equations Springer-Verlag, *New York, 2012*
- [2] . *R.P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani.* A Survey on Existence Result for Boun- dary Value Problems of Nonlinear Fractional Dierential Equations And Inclusions, *Acta. Appl. Math.,109, (2010), 973-1033.*
- [3] *M. Benchohra, S. Hamani* Nonlinear boundary Value Problems for Differential Inclusions with Caputo Fractional Derivative. *Topol. Methods Nonlinear Anal. , vol.32,(2008),115-130.*
- [4] *M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas* Boundary Value Problems for Differen tial Equations with Fractional Order. *Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.*
- [5] *M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas* Boundary Value Problems for Differential Equations with Fractional Order and Nonlocal Conditions,. *Nonlinear Anal., 71, (2009), 2391-2396.*
- [6] *M. Godefrot, : Theorie, Histoire, Bibliographie, Cornell University Library,Paris, 1901.*
- [7] *X. Gourdon,Les Maths en Tete, Ellipses, France, 2008.*

- [8] A. Granas, J. Dugundji Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [9] J. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematics Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] R. Hilfer, in Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.
- [11] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear Differential Equations with the Caputo Fractional Derivative in the space of continuously differentiable functions, Differential Equations, 41, (2005), 84-89.
- [12] A. A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [13] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), Springer-Verlag, Wien, (1997), 291-348,
- [14] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, 1993.
- [15] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, 1974.
- [16] In Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Springer, Dordrecht, 2011.
- [17] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

- [18] *S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev*, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, *Gordon, Breach, Yverdon, 1993*.
- [19] *H. Sheng, Y. Chen, T. Qiu*, In Fractional Processes and Fractional-order Signal Processing; Techniques and Applications, *Springer-Verlag, London, 2011*.
- [20] *V.E. Tarasov*, In Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, *Springer, Heidelberg, 2010*.