

Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama

Institut des sciences et technologies

Département de Mathématique et Informatique

# *Mémoire de fin d'études*

pour l'obtention du diplôme

Master en Mathématique

Option :Analyse fonctionnelle et EDP

## Thème

---

Stabilité Exponentielle d'un Système Thermo  
élastique avec retard interne

---

Présenté par : Naami Yassine

**Soutenu le : Juin 2021**

**Devant le jury composé de :**

**Encadreur :** Mr. Moulai Khatir Smain . M.A.A, C-Univ. Salhi Ahmed-Naama.

**Examineur :** Mr. Latti Fethi . M.C.B, C-Univ. Salhi Ahmed-Naama.

**Examineur :** Mr. Belgarna Abderrahmane. M.C.A, C-Univ. Salhi Ahmed-Naama.

Année universitaire 2020/2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Thermoélasticité classique</b>	<b>5</b>
1.1	Dérivation des équations . . . . .	5
1.1.1	Problèmes non linéaires . . . . .	5
1.1.2	Problèmes linéaires : . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Espace de Sobolev</b>	<b>12</b>
2.1	Quelques définitions et théorèmes . . . . .	12
2.2	Espaces fonctionnels . . . . .	13
2.2.1	Espaces de Lebesgue . . . . .	14
2.2.2	Espaces de Sobolev . . . . .	15
2.3	Théorème d'injection de Sobolev . . . . .	17
2.4	Le Théorème de Lax-Milgram . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Les operateurs et semi-groupe</b>	<b>23</b>
3.1	Opérateurs bornés et non bornés . . . . .	23
3.2	Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs . . . . .	25
3.3	Semi-groupes, Existence et unicité de la solution . . . . .	26
3.3.1	Concepts sur les semi-groupes . . . . .	26
3.3.2	Stabilité du semi-groupe . . . . .	30

3.4	Critère de domaine fréquentiel . . . . .	33
<b>4</b>	<b>application</b>	<b>36</b>
4.1	Introduction . . . . .	36
4.2	Bien-fondé du problème . . . . .	39
4.3	Exponential stability . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

# Remerciement

*Avant tout, je remercie "Allah", le tout Puissant de m' avoir accordé la volonté et la patience pour accomplir ce travail.*

Je tiens à remercier infiniment Mr. **Moulai Khatir Smain** de m' avoir encadré et d' avoir pu bénéficier aussi bien de ses conseils et ses compétences scientifiques, de m' avoir témoigné une grande confiance en me laissant une large part d' initiative. Son soutien incessant aussi bien moral, ses conseils et ses encouragements furent déterminants.

J' adresse également mes remerciements à Mr **Latti Fethi** pour l' honneur qu' il m' a fait de présider le jury de mon master, et à Mr **Belguerna Abderrahmane** d' avoir accepté la lourde tâche d' être examinateur de ce travail .

Mes sincères remerciements s' adressent à tous les enseignants de Mathématiques au centre universitaire **Salhi-Ahmed** de Nâama , leur conseils critiques et leur remarques ont significativement amélioré la qualité de ce mémoire.

Enfin, je ne trouve pas de mots pour exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mes parents, mes frères, mes soeurs, mes amis , et toutes les personnes qui ont contribué d' une manière directe ou indirecte à ce travail.

# Introduction

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note  $E(t)$  (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite à l'infini de déterminer si cette limite est nulle ou pas, et si cette limite est nulle, à donner une estimation sur sa vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro. Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro. La première partie consiste dans le premier chapitre on a vu un rappel sur l'élasticité classique on trouvera dans cette partie la dérivation des équations, Ensuite, nous nous intéressons à dans le deuxième chapitre l'espace de Sobolev Cette partie comporte quatre sections importantes, Quelques définitions et théorèmes, ensuite les espaces fonctionnels, le théorème d'injection de Sobolev et le théorème de Lax-Milgram. Dans le troisième chapitre, nous présentons les opérateurs et semi-groupe avec une application.

# Chapitre 1

## Thermoélasticité classique

### 1.1 Dérivation des équations

#### 1.1.1 Problèmes non linéaires

Dans la suite nous donnons un bref résumé de la dérivation des équations non linéaires décrivant le comportement thermoélastique d'un corps  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2 \text{ ou } 3$  un domaine borné représentant la configuration de référence d'un corps élastique thermiquement conducteur  $\mathcal{B}$ . Désignons par  $X(x, t)$  la position du point de référence  $x$  à l'instant  $t$  et par  $u(x, t) = X(x, t) - x$  et  $\theta = T - T_0$  le déplacement (vecteur) et la différence de température, respectivement,  $T$  et  $T_0$  étant la température absolue et la température de référence. Alors, l'équation (mécanique) de conservation de la quantité de mouvement qui décrit les déformations du corps et l'équation (thermique) de conservation de l'énergie s'écrivent

$$\rho u_{tt} = \operatorname{div} S + \rho f.$$

Et

$$e_t = t_r(SF_t) - \operatorname{div}q + g.$$

Où

$\rho$  : la densité.

$S$  : le tenseur des contraintes de Piola – Kirchhoff.

$e$  : l'énergie interne.

$F = I + \nabla_u$  : le tenseur de gradient de déformation.

$q$  : le flux de chaleur.

$f$  : la force externe du corps.

$g$  : l'apport de chaleur externe.

Notons l'entropie par  $\eta$  et par

$$\psi = e - (\theta + T_0)\eta$$

l'énergie libre de Helmholtz. De la seconde loi de la thermodynamique (l'inégalité de Clausius-Duhem), on peut supposer dans la thermoélasticité classique que  $\psi, S, \eta$  sont des fonctions de  $(\nabla_u, \theta)$

par exemple :

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla_u)}(\nabla_u, \theta), \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\nabla_u, \theta)$$

et  $q$  dépend de  $(\nabla u, \theta, \nabla \theta)$  vérifiant

$$q(\nabla u, \theta, \nabla \theta), \nabla \theta \leq 0$$

où l'exemple typique est la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla \theta$$

avec  $\kappa = \kappa(\nabla u, \theta)$  est le tenseur de conductivité thermique. A l'aide des représentations ci-dessus, la loi de conservation de l'énergie peut être réécrite comme

$$g = \operatorname{div} q + (\theta + T_0) \eta_t$$

où

$$g = \operatorname{div} q + \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \theta_t - \frac{\partial^2 \psi}{\partial (\nabla u) \partial \theta} \nabla u_t \right] (\theta + T_0).$$

Le système d'équations thermoélastiques avec le flux de chaleur  $q$  obéissant à la loi de Fourier est un système couplé hyperbolique-parabolique. Pour que le problème soit mathématiquement bien posé, il faut en général spécifier :

1. Les conditions initiales  $u(t=0) = u_0, u_t(t=0) = u_1, \theta(t=0) = \theta_0$
2. Les conditions aux limites sur le bord, par exemple : i  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$  un milieu assujetti rigidement avec la température maintenue constante sur les limites  $u = 0, \theta = 0$  sur  $\partial\Omega$  (condition de Dirichlet). ou traction libre isolée  $Sv = 0, \frac{\partial q}{\partial v} = 0$  (condition de Neumann) ou d'autres combinaisons des conditions aux limites pour  $u$  et  $\theta$ . Ici ;  $v = v(x)$  est le vecteur normal unitaire au point  $x \in \partial\Omega$ .

## 1.1.2 Problèmes linéaires :

L'investigation des équations linéarisées jouera un rôle important. Supposant que

$$|\nabla u|, |\nabla u_t|, |\theta|, |\theta_t| \text{ et } |\nabla \theta|,$$

sont petits, et en utilisant des expansions de Taylor (par exemple  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial(\nabla u) \partial \theta}(\nabla u, \theta, x) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial(\nabla u) \partial \theta}(0, 0, x) + O(|\nabla u| + |\theta|)$ ) la linéarisation du système conduit alors au système ( $T_0 = 1$  sans perte de généralité)

$$\rho u_{tt} - D^T S D u + D^t \Gamma \theta = \rho f$$

$$\delta \theta_t - \nabla^t \kappa \nabla \theta + \Gamma^t D u_t = g$$

où  $\rho(x)$  peut être considérée comme une matrice densité symétrique,  $S = S(x) \in M \times M$  est une matrice symétrique et définie positive contenant la module élastique ( $M = 6$  dans  $\mathbb{R}^3$ )  $\Gamma = \Gamma(x)$  est un vecteur avec les coefficients de détermination que l'on appelle le tenseur de contrainte thermique,  $\delta = \delta(x)$  est la chaleur spécifique et  $\kappa = \kappa(x)$  est le tenseur de conductivité thermique. Toutes les fonctions sont supposées être lisses.  $D$  est une abréviation pour un gradient généralisé :

$$D = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$D = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

,

$$D = \partial_1 \text{ dans } \mathbb{R}$$

De cette manière, le cas général (linéaire) non homogène et anisotrope est décrit.

La contrepartie linéaire des conditions aux limites s'écrivent

$$\mathcal{N}^t(SDu - \Gamma\theta) = 0$$

$$v^t \kappa \nabla \theta = 0$$

où  $\mathcal{N}$  provient du vecteur normal  $v$  de la même façon que  $D$  provient du vecteur gradient  $\nabla$ . Les modules élastiques  $C_{ijkl}$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ , qui sont donnés en général par :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial(\partial_i u_i) \partial(\partial_k u_l)}(0, 0, x)$$

satisfont dans le cas linéaire

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}$$

L'hypothèse de positivité de  $C_{i,j,k,l}$  dans le sens

$$\exists K_0 > 0, \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega; \xi_{ij} C_{ijkl} \xi_{kl} \geq K_0 \sum_{j,k=1}^n |\xi_{jk}|^2$$

implique que la matrice  $S = S(x)$  est uniformément définie positive car

$$S = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{3131} & C_{3112} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{1212} \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$S = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ \cdot & C_{2222} & C_{2212} \\ \cdot & \cdot & C_{1212} \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

$$S = C_{1111} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Dans le cas simple d'un milieu homogène isotrope, nous avons

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \cdot & 2\mu + \lambda & 0 \\ \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

$$S = \tau > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Et le système réduit dans le cas bidimensionnel ou tridimensionnel est donné par :

$$u_{tt} - ((2\mu + \lambda)\nabla\nabla^t - \mu\nabla \times \nabla)u + \gamma\nabla\theta = f,$$

$$\delta\theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma\nabla^t u_t = g,$$

où la densité  $\rho = 1$  sans perte de généralité,  $\mu$  et  $\lambda$  sont les modules de lamé  $\mu > 0$  et  $2\mu + \lambda > 0$  de plus  $\delta, \kappa > 0$  et  $\gamma \neq 0$ .

**Remarque 1.1.1** *Dans l'espace unidimensionnel, sous certaines hypothèses, le système linéaire de base s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} u_{tt} - \tau u_{xx} + \gamma\theta_x & = f \\ \delta\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma u_{tx} & = g \end{cases}$$

*et le système non linéaire peut s'écrire comme le système suivant :*

$$\begin{cases} u_{tt} - a(u_x, \theta)u_{xx} + b(u_x, \theta)\theta_x & = f \\ c(u_x, \theta)\theta_t - d(\theta_x, \theta)\theta_{xx} + b(u_x, \theta)u_{tx} & = g \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Espace de Sobolev

### 2.1 Quelques définitions et théorèmes

Soient  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $X$ .

**Définition 2.1.1** *On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$  dans  $X$  si*

$$\|u_n - u\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

**Définition 2.1.2**  *$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite convergente faiblement vers  $u$  dans  $X$  si*

$$\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in X'.$$

**Proposition 2.1.1** *Soit  $(u_n)$  une suite de  $X$  et  $u$  un élément de  $X$ . On a*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \Leftrightarrow \langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle, \quad \forall f \in X'.$$

**Théorème 2.1.1** *Soit  $X$  un espace réflexif et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $X$ . Alors il existe une sous-suite, encore notée  $(u_n)$  et  $u \in X$  tel que  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $X$ .*

**Définition 2.1.3** *Un espace est séparable ssi il contient une partie dénombrable dense.*

**Définition 2.1.4** *Soit  $J : X \rightarrow X''$  tel que  $J(x) = f \mapsto \langle f, x \rangle$  un espace  $X$  est dit réflexif si  $J$  est bijective de  $X$  dans  $X''$ .*

**Théorème 2.1.2 (Kakutani)** *Soit  $X$  un espace de Banach. Alors  $X$  est réflexif ssi*

$$B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

*est compact pour la topologie faible.*

**Définition 2.1.5** *On dit qu'un espace de Banach  $X$  est uniformément convexe si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } (x, y \in X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|y - x\| > \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta).$$

## 2.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus complète de ces espaces, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de Hamh.Brezis[18] ou R.A.Adams[17]. Soit  $p$  un réel avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On désigne par  $D(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , à support compact inclus dans  $\Omega$ .

## 2.2.1 Espaces de Lebesgue

**Définition 2.2.1** Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  un ouvert, et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

- L'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  est défini par :

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \text{ } \mu - p.p.\text{sur}\Omega\}.$$

L'espace  $L^p(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- L'espace de Lebesgue  $L^\infty(\Omega)$  est défini par :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable, } \exists C \geq 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq C, \mu - p.p.\text{sur}\Omega\}.$$

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  muni la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C, |u(x)| \leq C \text{ } \mu - p.p.\text{sur}\Omega\}$$

**Proposition 2.2.1** L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ , il est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Remarque 2.2.1** Si  $u \in L^\infty(\Omega)$  on a

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \text{ } p.p.\text{sur}\Omega$$

**Théorème 2.2.1** Soient  $(u_n)$  une suite de  $L^p(\Omega)$  et  $u \in L^p(\Omega)$  tels que

$$\|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Alors il existe une sous-suite de  $(u_{nk})$  tel que :

$$u_{nk}(x) \rightarrow u(x) \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

**Proposition 2.2.2** (Inégalité de Holder) Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec

$$1 \leq p < \infty.$$

Alors

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

## 2.2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques.

**Définition 2.2.2** On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega$  l'espace

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N\}$$

où  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  désigne la dérivée partielle de  $u$  au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction  $u \in L^p(\Omega)$  est dans  $W^{1,p}(\Omega)$  s'il existe  $N$  fonctions  $v_1, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$  tels que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

On note  $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $\forall_i = 1, 2, \dots, N$

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|g_i\|_{L^p(\Omega)}$$

Pour  $p=2$ ,  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N (g_i, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|g_i\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

**Proposition 2.2.3** L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ , il est réflexif  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

L'espace  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  est un espace de Hilbert séparable.

**Définition 2.2.3** Soit  $1 \leq p < \infty$ ,  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour tout réel  $p$  vérifiant  $1 < p < \infty$ .

**Théorème 2.2.2** On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^1$ . Soit

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{avec} \quad 1 \leq p < \infty$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$* u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega$$

$$* u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

**Théorème 2.2.3** (inégalité de Poincaré [18])

Soit  $p$  un réel avec  $1 \leq p < \infty$ , et  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  alors

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

De plus, l'application  $u \rightarrow \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  est une norme sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  qui est équivalente à celle induite par  $W^{1,p}(\Omega)$

**Théorème 2.2.4** L'espace  $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})$  est uniformément convexe.

## 2.3 Théorème d'injection de Sobolev

Enonçons les théorèmes "d'injection" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$

**Définition 2.3.1** On dit qu'un espace de Banach  $X$  s'injecte de façon continue dans un espace de Banach  $Y$  et on note  $X \hookrightarrow Y$  si :

$$* X \text{ est un sous-espace de } Y$$

$$* \exists C > 0 \text{ tel que pour tout } u \in X : \|u\|_Y \leq C \|u\|_X$$

**Définition 2.3.2** On dit qu'un espace de Banach  $X$  s'injecte de façon compacte dans un espace de Banach  $Y$  on note  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$  si :

\*  $X$  s'injecte de façon continue dans  $Y$

\* toute suite faiblement convergente dans  $X$  converge fortement dans  $Y$ .

**Théorème 2.3.1** (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) Soit  $1 \leq p < N$  alors :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ où } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante  $C = C(p, N)$  telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Soit  $1 \leq p < N$ . Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

et pour le cas limite  $p = N$ , on a

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty[$$

**Théorème 2.3.2** (Morrey) Soit  $p > N$ . Alors :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

De plus, pour tout  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  on a :

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

avec  $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$  et  $C$  est une constante qui dépend seulement de  $p$  et  $N$ .

**Corollaire 2.3.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$ , avec  $\Gamma = \partial\Omega$  borné, Soit

$1 \leq p \leq \infty$ , on a :

$$\text{Si } 1 \leq p < N \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \text{ ou } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

Si  $P = N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$

Si  $P > N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$

De plus, si  $p > N$  alors on a pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x - y|^\alpha \quad p.p \quad x, y \in \Omega$$

avec  $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$  et  $C$  dépend seulement de  $\Omega$ ,  $p$  et  $N$ . En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

**Théorème 2.3.3** (Rellich-Kondrachov) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . On

a :

Si  $p < N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$

Si  $p = N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$

Si  $p > N$  alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , pour tout  $p$ .

**Théorème 2.3.4** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N \geq 3$  et  $1 < p < N$ . Alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{pour tout } q \in [1, \frac{N_p}{N-p}[$$

Le nombre  $p^* = \frac{N_p}{N-p}$  est appelé exposant critique de Sobolev .

**Définition 2.3.3** On dit qu'un espace de Banach  $X$  s'injecte de façon compacte

dans un espace de Banach  $Y$  on note  $X \hookrightarrow Y$  si :

\*  $X$  s'injecte de façon continue dans  $Y$

\* toute suite faiblement convergente dans  $X$  converge fortement dans  $Y$  .

**Théorème 2.3.5** (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) Soit  $1 \leq p < N$  alors :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ où } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

et il existe une constante  $C = C(p, N)$  telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Soit  $1 \leq p < N$  . Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

et pour le cas limite  $p = N$  , on a

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty[$$

**Théorème 2.3.6** (Morrey) Soit  $p > N$  . Alors :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

De plus, pour tout  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  on a :

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

avec  $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$  et  $C$  est une constante qui dépend seulement de  $p$  et  $N$  .

**Corollaire 2.3.2** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$ , avec  $\Gamma = \partial\Omega$  borné , Soit

$1 \leq p \leq \infty$  , on a :

$$\text{Si } 1 \leq p < N \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \text{ ou } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

$$\text{Si } p = N \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

$$\text{Si } p > N \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

De plus, si  $p > N$  alors on a pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x - y|^\alpha \quad p.p \quad x, y \in \Omega$$

avec  $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$  et  $C$  dépend seulement de  $\Omega$ ,  $p$  et  $N$ . En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

**Théorème 2.3.7** (Rellich-Kondrachov) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . On

a :

$$\text{Si } p < N \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$$

$$\text{Si } p = N \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[$$

$$\text{Si } p > N \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , pour tout  $p$ .

**Théorème 2.3.8** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , avec  $N \geq 3$  et  $1 < p < N$ . Alors

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{pour tout } q \in [1, \frac{N_p}{N-p}[$$

Le nombre  $p^* = \frac{N_p}{N-p}$  est appelé exposant critique de Sobolev .

## 2.4 Le Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax -Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires

**Définition 2.4.1** On dit qu'une forme bilinéaire

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est

1. Continue s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \forall u, v \in H$$

2. Coercive s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \forall v \in H$$

**Théorème 2.4.1 (Lax-Milgram)** Soit  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $\varphi \in H'$  il existe  $u \in H$  unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \forall v \in H.$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min \left\{ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle \right\}$$

# Chapitre 3

## Les operateurs et semi-groupe

### 3.1 Opérateurs bornés et non bornés

On commence dans ce chapitre de donner quelques résultats qui sont très connus sur les opérateurs bornés et non bornés. On n'essaye pas de donner tout, mais de donner les définitions et les théorèmes de base dans la plupart on les présente sans démonstrations que l'on voit nécessaires dans notre travail.

Soient  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  deux espaces de Banach sur  $\mathbb{C}$ , et  $\mathcal{H}$  désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  et la norme correspondante  $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ .

**Définition 3.1.1** *Un opérateur linéaire  $T : E \rightarrow F$  est dit bornée s'il existe  $C > 0$  telle que*

$$\| Tx \|_F \leq C \| x \|_E, \quad \forall x \in E$$

*dans le cas contraire,  $T$  est dit non borné.*

L'ensemble de tout les opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $F$  est noté par  $L(E, F)$ .

De plus, L'ensemble de tout les opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $E$  est noté

par  $L(E)$ .

**Définition 3.1.2** *Un opérateur linéaire non borné de  $E$  dans  $F$  est un couple  $(T, D(T))$ , avec  $D(T) \subset E$  est un sous-espace de  $E$  (dit le domaine de  $T$ ) et la transformation linéaire*

$$T : D(T) \subset E \rightarrow F$$

*dans le cas où  $E = F$ , alors on dit  $(T, D(T))$  est un opérateur linéaire non borné sur  $E$ .*

**Définition 3.1.3** *Soit  $T : (T, D(T)) \subset E \rightarrow F$  un opérateur linéaire non borné*

— *L'image de  $T$  est définie par*

$$\text{Im}(T) = \{Tx : x \in D(T)\} \subset F.$$

— *le noyau de  $T$  est défini par*

$$\ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\} \subset E.$$

— *Le graphe de  $T$  est défini par*

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F$$

**Définition 3.1.4** *L'opérateur  $T \in L(E, F)$  est dit compact si de toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  avec  $\|x_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite convergente dans  $F$ .*

L'ensemble de tout les opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$  est noté par  $\mathcal{K}(E, F)$ , et

si  $E = F$ , on écrit  $\mathcal{K}(E, E) = \mathcal{K}(E)$ .

**Théorème 3.1.1 (alternative de Fredhol)** Soit  $T \in \mathcal{K}(E)$ . Alors

1-  $\ker(I - T)$  est de dimension finie, ( $I$  est l'opérateur identité de  $E$ ).

2-  $\text{Im}(I - T)$  est fermé, et plus précisément

$$\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp.$$

3-  $\ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = E$

**Définition 3.1.5** Une application  $T : (D(T), D(T)) \subset E \rightarrow F$  est dite fermée si  $G(T)$  est fermé dans  $E \times F$ .

Un opérateur linéaire non borné fermé est caractérisé par :

$T$  est fermée si et seulement si

$$\left( \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (x_n) \text{ telle que } x_n \in D(T) \\ x_n \rightarrow x \text{ dans } E \\ \text{et } Tx_n \rightarrow y \text{ dans } F \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} x \in D(T) \\ \text{et} \\ Tx = y \end{array} \right)$$

## 3.2 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

**Définition 3.2.1** Soit  $\mathcal{H}$  un espace réel ou complexe muni d'un produit scalaire  $\langle, \rangle$  et de la norme induite  $\| \cdot \|$ . Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire à domaine dense sur  $\mathcal{H}$ , c'est à dire  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ .

On dit que  $\mathcal{A}$  est dissipatif si pour tout  $x \in D(\mathcal{A})$ ,

$$\Re \langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0$$

**Définition 3.2.2** Un opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  dans un espace de Banach  $X$  est dit m-dissipatif si  $\mathcal{A}$  est dissipatif et  $\lambda I - \mathcal{A}$  est surjectif c'est à dire  $\text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ , pour

tout  $\lambda > 0$ .

**Théorème 3.2.1** Soit  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach  $X$ . Si  $\mathcal{A}$  est dissipatif avec  $Im(I - \mathcal{A}) = X$ , et  $X$  est réflexif, alors  $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ .

**Théorème 3.2.2** Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur  $m$ -dissipatif, alors

$$1- Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$$

$$2- ]0, +\infty[ \subseteq \rho(\mathcal{A})$$

## 3.3 Semi-groupes, Existence et unicité de la solution

### 3.3.1 Concepts sur les semi-groupes

Dans cette section on commence d'introduire quelques notions de base concernant les semi-groupes. La majorité des équations d'évolution peuvent être réduites sous la forme

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U & t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

où  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On commence par des définitions et théorèmes de base.

**Définition 3.3.1** La famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach  $X$  (c'est à dire  $\forall t \geq 0, S(t) \in L(X)$ ) est dite un semi-groupe fortement continu (en bref  $C_0$ - semi-groupe) si

$$(1) S(t + s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0$$

$$(2) S(0)=I$$

(3)  $(S(t))_{t \geq 0}$  est fortement continue sur  $[0, +\infty[$  ce qui est équivalent à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\|_X = 0, \quad \text{Pour tout } x \in X.$$

Pour un tel semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ , on définit l'opérateur  $\mathcal{A}$  de domaine  $D(\mathcal{A})$  constitué des points  $x$  tels que la limite

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(\mathcal{A})$$

existe.

Alors  $\mathcal{A}$  est dit le générateur infinitésimal du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

Etant donné un opérateur  $\mathcal{A}$ , si  $\mathcal{A}$  coïncide avec le générateur infinitésimal du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ , alors on dit qu'il génère le semi-groupe fortement continu  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

Parfois on note également  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ .

**Théorème 3.3.1 ( Hille-Yosida )** *Un opérateur linéaire (non borné)  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  si et seulement si*

(i)  $\mathcal{A}$  est fermé et  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ .

(ii) l'ensemble résolvant  $\rho(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  contient  $\mathbb{R}^+$  et pour tout  $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

**Proposition 3.3.1** *Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Banach  $X$ .*

*Alors ils existent des constantes  $M \geq 1$  et  $\omega \geq 0$  telles que*

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si  $\omega = 0$  alors le semi-groupe correspondant est uniformément borné. De plus, si  $M = 1$  alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est dit  $C_0$ -semi-groupe de contraction.

**Théorème 3.3.2** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe de générateur infinitésimal  $\mathcal{A}$  sur un espace de Banach  $X$ .

Alors le type  $\omega_0$  du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  satisfait

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}.$$

**Théorème 3.3.3** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe de générateur infinitésimal  $\mathcal{A}$  sur un espace de Banach  $X$  et  $\sigma(\mathcal{A})$  le spectre de  $\mathcal{A}$ .

Alors le type  $\omega_0$  du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  satisfait

$$\omega_0 \geq \sup\{\Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

**Théorème 3.3.4** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe analytique de générateur infinitésimal  $\mathcal{A}$  sur un espace de Banach  $X$  et  $\sigma(\mathcal{A})$  le spectre de  $\mathcal{A}$ .

Alors le type  $\omega_0$  du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  satisfait

$$\omega_0 = \sup\{\Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

**Théorème 3.3.5 (Lumer-Phillips)** Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire sur un espace de Banach  $X$ .

Alors  $\mathcal{A}$  le est générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  si et seulement si

(i)  $\overline{D(\mathcal{A})} = X$

(ii)  $\mathcal{A}$  est  $m$ -dissipatif.

**Corollaire 3.3.1** Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire sur un espace de Banach  $X$ . Alors,  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $X$  si et seulement si

(i)  $\mathcal{A}$  est fermé et  $\overline{D(\mathcal{A})} = X$

(ii)  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^*$  sont dissipatifs.

**Corollaire 3.3.2** Soit  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  un opérateur linéaire non borné sur  $\mathcal{H}$ .  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction si et seulement si  $\mathcal{A}$  est un opérateur  $m$ -dissipatif.

**Théorème 3.3.6** Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire à domaine dense  $D(\mathcal{A})$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{A}$  est dissipatif et  $0 \in \rho(\mathcal{A})$  l'ensemble résolvant de  $\mathcal{H}$ , alors  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $\mathcal{H}$ .

**Théorème 3.3.7 (Hille-Yosida)** Soit  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  un opérateur linéaire non borné sur  $\mathcal{H}$ . Supposons que  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

(1) Pour  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ , le problème (??) admet une solution forte unique

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0(\mathbb{R}, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

(2) Pour  $U_0 \in \mathcal{H}$  le problème (??) admet une solution faible unique

$$U(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

### 3.3.2 Stabilité du semi-groupe

**Définition 3.3.2** On dit que le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  est stable si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)x = 0$ , pour tout  $x \in X$ .

Si  $\omega(A) < 0$ , alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est dit exponentiellement stable

**Définition 3.3.3** Supposons que  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur un espace de Banach  $X$ . On dit que le  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  est

(i) fortement stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

(ii) uniformément stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

(iii) faiblement stable si

$$\text{pour tout } x \in X \text{ et } y \in X', \langle S(t)x, y \rangle \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

(iv) asymptotiquement stable si

$$\text{pour tout } x \in X \ \|S(t)x\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

(v) exponentiellement stable s'ils existent deux constantes  $M \geq 1$  et  $\omega > 0$  telles

que

$$\| S(t)x \|_X \leq M e^{-\omega t} \| x \|_X \quad \text{pour tout } t \geq 0, x \in X.$$

(vi) polynomialement stable s'ils existent deux constantes positives  $C$  et  $\alpha$  telles

que

$$\| S(t)x \|_X \leq C t^{-\alpha} \| x \|_X, \quad \forall t > 0, \forall x \in X.$$

**Définition 3.3.4** Un semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$  est dit uniformément exponentiellement asymptotiquement stable si et seulement si il existent deux nombres positifs  $M \geq 1$  et  $\omega$  tels que,

$$\| S(t) \| \leq M e^{-\omega t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

**Définition 3.3.5** Un  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$  est dit fortement  $L^2$ -stable si et seulement si,

$$\| S(t)x \| \in L^2([0, +\infty[), \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

**Définition 3.3.6** Un  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$  est dit uniformément stable ou  $L^\infty$ -stable, ou uniformément borné, si et seulement si il existe une constante positive  $M$  telle que, pour tout  $t \geq$

$$\| S(t) \| \leq M$$

**Théorème 3.3.8** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe sur  $X$  de générateur  $\mathcal{A}$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes

(1)  $(S(t))_{t \geq 0}$  est exponentiellement stable. C'est à dire,  $\| S(t) \| \leq M e^{-\omega t}$ ,

pour  $M \geq 1, \omega > 0$

(2)  $(S(t))_{t \geq 0}$  est uniformément stable. C'est à dire,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$

(3) il existe  $t_0 > 0$  tel que

$$\|S(t_0)\| < 1$$

**Théorème 3.3.9** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe uniformément borné sur un espace de Banach  $X$  et soit  $\mathcal{A}$  son générateur. Alors

(i) Si  $(S(t))_{t \geq 0}$  est asymptotiquement stable, alors  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(\mathcal{A})$  le spectre continu de  $\mathcal{A}$ .

(ii) Si  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(\mathcal{A})$ , et  $\sigma_c(\mathcal{A})$  est dénombrable, alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est asymptotiquement stable.

(iii) Si  $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$  est compacte, alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $\Re \lambda < 0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ .

**Théorème 3.3.10** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de générateur  $\mathcal{A}$ .

Alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est exponentiellement stable si et seulement si  $\{\lambda : \Re \lambda \geq 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$  et

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M \quad \text{pour tout } \lambda \text{ avec } \Re \lambda \geq 0 \text{ et } M > 0 \text{ une constante}$$

**Corollaire 3.3.3** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe uniformément borné sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de générateur  $\mathcal{A}$ .

Alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est exponentiellement stable si et seulement si  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$  et

$$M_0 := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|(i\tau I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$$

On cherche les conditions nécessaires de la stabilité forte d'un  $C_0$ -semi-groupe. Le résultat a été obtenu par Arendt et Batty par le théorème de stabilité d'un  $C_0$ -semi-groupe suivant :

**Théorème 3.3.11 (Arendt et Batty)** *Supposons que  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur un espace de Banach réflexif  $X$ .*

*Si*

- (i)  $\mathcal{A}$  n'a pas de valeurs propres imaginaires pures.*
- (ii)  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$  est dénombrable.*

*Alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est fortement stable.*

**Théorème 3.3.12** *Soit  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$  un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .*

*Alors  $(S(t))_{t \geq 0}$  est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\sup\{\Re\lambda, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$$

*et*

$$\sup_{\Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$$

*ont lieu.*

### 3.4 Critère de domaine fréquentiel

Soit  $S(t)_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semi-groupe uniformément borné sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de générateur  $\mathcal{A}$ .

Alors  $S(t)_{t \geq 0}$  est exponentialement stable si et seulement si l'axe imaginaire est

contenu dans l'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}$  et

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$$

**Théorème 3.4.1 (Huang-Pruss)**

Supposons que  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur  $\mathcal{H}$ .

$(S(t))_{t \geq 0}$  est uniformément stable si et seulement si

1)  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ .

2)  $\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty$ .

Le second est une méthode classique basée sur l'analyse spectrale de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

**Remarque 3.4.1** dans le cas où le  $C_0$ -semigroupe n'est pas exponentiellement stable nous recherchons qu'il est polynomialement stable.

Les résultats de la stabilité exponentielle sont obtenus en utilisant des méthodes comme par exemple la méthode des multiplicateurs, l'approche du domaine de fréquence, l'approche de base de Riesz et l'analyse de Fourier ou une combinaison d'eux.

Dans cette thèse on a utilisé seulement deux méthodes, la première s'agit de l'approche de domaine de fréquence qui a été obtenue par Huang-Pruss.

La deuxième méthode est une méthode classique basée sur l'analyse spectrale de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 3.4.2** (Batty, A. Borichov et Y. Tomilov, Z. Liu et B. Rao) Supposons

que  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $(S(t))_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Si  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ , alors pour tout  $l > 0$  fixé, les conditions suivantes sont équivalentes

$$(1) \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{|\lambda|^l} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{L(\mathcal{H})} < +\infty$$

$$(2) \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{l-1}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall t > 0, U_0 \in D(\mathcal{A}), \quad \text{pour } C > 0 \text{ quelconque.}$$

# Chapitre 4

## application

### 4.1 Introduction

Considérons le système thermoélastique suivant avec retard,

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t - \tau) + \gamma \theta_x(x, t) = 0, & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ \theta_t(x, t) - \kappa \theta_{xx}(x, t) + \gamma u_{xt}(x, t) = 0, & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, & t \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Où  $\alpha, \gamma, \kappa$  et  $\ell$  sont des constantes positives. Les fonctions  $u = u(x, t)$  and  $\theta = \theta(x, t)$  décrivent respectivement le déplacement et la différence de température, avec  $x \in (0, \ell)$  and  $t \geq 0$ . De plus,  $\tau > 0$  est le délai. Racke prouvé dans que, sous certaines initiales et conditions limites, le système n'est pas bien posé et instable même si  $\tau$  est relativement petit. Cependant, il est bien connu qu'en l'absence de retard, l'amortissement par conduction thermique est suffisamment fort pour produire un système stable exponentiel, où divers types de conditions limites sont associés aux systèmes thermoélastiques unidimensionnels.

Au cours des dernières années, les effets des retards dans les PDEs sont devenus un domaine de recherche actif. En fait, délais si souvent surgissent dans de nombreuses applications depuis, la plupart des phénomènes physiques ne dépendent pas seulement sur l'état actuel mais aussi sur certains événements passés, et les références mais comme pour le système thermoélastique classique, un petit délai arbitraire peut détruire le bien-posé du problème ou peut détruire la stabilité.

Afin de résoudre le problème, des conditions supplémentaires ou des termes de contrôle ont été utilisés, nous nous référons à, et les références qui s'y trouvent . Dans ce document, nous ajoutons au retard équation, un amortissement Kelvin-Voigt de la forme  $-\beta u_{xxt}(x, t)$  pour un certain nombre positif réel  $\beta$ , qui dépend finalement de  $\alpha, \gamma, \kappa$  et  $\tau$ . Alors notre système prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t - \tau) - \beta u_{xxt}(x, t) + \gamma \theta_x(x, t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \theta_t(x, t) - \kappa \theta_{xx}(x, t) + \gamma u_{xt}(x, t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & \text{dans } (0, \infty), \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, & \text{dans } (0, \infty), \\ u_x(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & \text{in } \Omega \times (0, \tau), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Où les données initiales  $(u_0, u_1, f_0, \theta_0)$  appartiennent à un espace approprié et avec  $\Omega = (0, \ell)$ . Nous mesurons étudier la qualité du puits et la stabilité exponentielle

D'un tel problème de valeur limite initiale. Cette idée découle de où les auteurs ont ajouté un terme d'amortissement Kelvin-Voigt à l'abstrait équation. Plus

précisément, ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + aBB^*u'(t) + BB^*u(t - \tau) = 0, & \text{dans } (0, \infty), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \\ B^*u(t - \tau) = f_0(t - \tau), & \text{dans } (0, \tau), \end{cases} \quad (4.3)$$

Où un " prime " désigne un dérivé unidimensionnel par rapport à un  $t$  et où  $B : \mathcal{D}(B) \subset H_1 \rightarrow H$  est un opérateur linéaire non limité d'un espace Hilbert  $H_1$  à un espace Hilbert  $H$ , de telle sorte que  $B^*$ , l'adjoint de  $B$ , satisfait certaines propriétés de coercivité et d'intégration compacte. Ils ont obtenu un résultat de désintégration exponentielle sous l'hypothèse  $\tau \leq a$ .

Dans les auteurs ont abandonné le délai dans le terme harmonique de l'équation élastique et ont ajouté un délai de la forme  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)\theta_{xx}(x, t - s\tau)ds$  dans l'équation de la chaleur, où  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des constantes non négatives telles que  $\tau_1 < \tau_2$  et  $\mu : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction limitée. Ils ont montré un résultat de désintégration exponentielle à la condition  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|ds < \kappa$ .

Nous définissons l'énergie d'une solution de problème comme

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + \alpha u_x^2(x, t) + \theta^2(x, t)) dx + \xi \int_{\Omega} \int_0^1 u_x^2(x, t - \tau\rho) d\rho dx$$

Où  $\xi > 0$  est un paramètre fixé plus tard.

Le document est organisé comme suit. Dans la section 2, nous formulons d'abord le problème dans un espace Hilbert approprié, puis nous étudions la qualité du système en utilisant la théorie des semi-groupes. Dans la section 3, nous prouvons, en utilisant la méthode de Lyapunov, un résultat de la stabilité exponentielle .

## 4.2 Bien-fondé du problème

Nous introduisons, la nouvelle variable

$$z(x, \rho, t) = u_x(x, t - \tau\rho), \quad \text{dans } \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty), \quad (4.4)$$

Clairement,  $z(x, \rho, t)$  satisfait

$$\tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \rho \in (0, 1), \quad t \in (0, +\infty), \quad (4.5)$$

$$z(x, 0, t) = u_x(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, +\infty). \quad (4.6)$$

Ensuite, le problème prend la forme

$$u_{tt}(x, t) - \alpha z_x(x, 1, t) - \beta u_{xxt}(x, t) + \gamma \theta_x(x, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \quad (4.7)$$

$$\tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, 1) \times (0, +\infty), \quad (4.8)$$

$$\theta_t(x, t) - \kappa \theta_{xx}(x, t) + \gamma u_{xt}(x, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \quad (4.9)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad \text{dans } (0, \infty), \quad (4.10)$$

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, \quad \text{dans } (0, \infty), \quad (4.11)$$

$$z(x, 0, t) = u_x(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \quad (4.12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.13)$$

$$z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\tau\rho), \quad \text{dans } \Omega \times . \quad (4.14)$$

Observer qu'il résulte que  $\int_{\Omega} \theta_t(x, t) dx = 0$  qui est,  $\int_{\Omega} \theta(x, t) dx$  conservateur tout le temps. Sans perte de généralité, nous supposons que  $\int_{\Omega} \theta(x, t) dx = 0$ . Sinon, nous

pouvons faire la substitution  $\tilde{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - \frac{1}{\ell} \int_{\Omega} \theta_0(x) dx$ , En effet  $(u, v, z, \theta)$  et  $(u, v, z, \tilde{\theta})$  satisfont au même système

Laisser

$$\mathcal{H} = \left\{ (f, g, p, h) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times (0, 1)) \times L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} h(x) dx = 0 \right\}.$$

Équipé du produit intérieur suivant : pour tout  $U_k = (f_k, g_k, p_k, h_k) \in \mathcal{H}$ ,  $k = 1, 2$ ,

$$\langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} (\alpha f_{1x}(x) f_{2x}(x) + g_1(x) g_2(x) + h_1(x) h_2(x)) dx + \xi \int_{\Omega} \int_0^1 p_1(x, \rho) p_2(x, \rho) d\rho dx,$$

$\mathcal{H}$  est un espace Hilbert.

Définir

$$U := (u, u_t, z, \theta)$$

Ensuite, le problème (4.2) peut être formulé comme un système de premier ordre de la forme

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \\ U(0) = (u_0, u_1, f_0(\cdot, -\tau), \theta_0) \end{cases} \quad (4.15)$$

Où l'opérateur  $\mathcal{A}$  est défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ (\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x)_x - \gamma \theta_x \\ -\frac{1}{\tau} z_{\rho} \\ -\gamma v_x + \kappa \theta_{xx} \end{pmatrix}$$

Avec le domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} U = (u, v, z, \theta) \in \mathcal{H} \cap [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1(0, 1)) \times H^2(\Omega)] \mid \\ z(\cdot, 0) = u_x \quad \text{and} \quad (\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x) \in H^1(\Omega) \end{array} \right\}$$

Dans l'espace Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Pour établir l'existence de la solution, nous prouverons que l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $\mathcal{C}_0$ -semigroup, et pour ce faire, nous allons prouver que  $\mathcal{A} - mId$  génère  $\mathcal{C}_0$ -semigroup (des contractions), pour un nombre réel approprié  $m$ , fonction de  $\xi, \alpha, \beta$  et  $\tau$ . Ensuite, nous appliquons le théorème de perturbation limité (Sect. III.1 of [?]).

En fait, nous commençons par le résultat suivant :

**Lemme 4.2.1** *Si  $\xi > \frac{2\tau\alpha^2}{\beta}$ , alors il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{A} - mId$  est un dissipatif maximal.*

**preuve 4.2.1** *Prenez  $U = (u, v, z, h) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \alpha \int_{\Omega} v_x(x) u_x(x) dx + \int_{\Omega} ((\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x)_x(x) - \gamma \theta_x) v(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} (-\gamma v_x + \kappa \theta_{xx})(x) \theta(x) dx - \frac{\xi}{\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

*Intégrer par parties, en utilisant les conditions limites de  $u, v$  et  $\theta$  pour obtenir*

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} ((\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x)_x - \gamma \theta_x)(x) v(x) dx + \int_{\Omega} (-\gamma v_x + \kappa \theta_{xx})(x) \theta(x) dx \\ &= -\alpha \int_{\Omega} z(x, 1) v(x) dx - \beta \int_{\Omega} v_x^2(x) dx - \kappa \int_{\Omega} \theta_x^2(x) dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties dans  $\rho$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \int_0^1 z_{\rho}(x, \rho) z(x, \rho) d\rho dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z^2(x, 1) - z^2(x, 0)) dx.$$

Alors (4.16) devient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \alpha \int_{\Omega} v_x(x) u_x(x) dx - \alpha \int_{\Omega} z(x, 1) v_x(x) dx \\ &\quad - \beta \int_{\Omega} v_x^2(x) dx - \kappa \int_{\Omega} \theta_x^2(x) dx - \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Omega} (z^2(x, 1) - z^2(x, 0)) dx, \end{aligned}$$

À partir de laquelle, en utilisant l'inégalité des Young et que  $z(x, 0) = u_x(x)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\leq (\alpha\varepsilon - \beta) \int_{\Omega} v_x^2(x) dx + \left( \frac{\alpha}{2\varepsilon} - \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_{\Omega} z^2(x, 1) dx + \left( \frac{\alpha}{2\varepsilon} + \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_{\Omega} u_x^2(x) dx \\ &\quad - \kappa \int_{\Omega} \theta_x^2(x) dx. \end{aligned}$$

Choisir  $\alpha\varepsilon = \frac{\beta}{2}$ , ou d'une façon équivalente,  $\varepsilon = \frac{\beta}{2\alpha}$ , on a :

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -\frac{\beta}{2} \int_{\Omega} v_x^2(x) dx + \left( \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_{\Omega} z^2(x, 1) dx + \left( \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_{\Omega} u_x^2(x) dx - \kappa \int_{\Omega} \theta_x^2(x) dx.$$

On choisit alors  $\xi > 0$  tel que  $\frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\xi}{2\tau} < 0$ , c'est-à-dire,  $\xi > \frac{2\tau\alpha^2}{\beta}$ . ensuite on prend

$m = \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\xi}{2\tau} > \frac{2\alpha^2}{\beta}$ , pour obtenir

$$\langle (\mathcal{A} - mId) U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -\frac{\beta}{2} \int_{\Omega} v_x^2(x) dx + \left( \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_{\Omega} z^2(x, 1) dx - \kappa \int_{\Omega} \theta_x^2(x) dx \leq 0$$

Ce qui signifie que l'opérateur  $\mathcal{A} - mId$  est dissipatif.

Maintenant, nous allons prouver la maximalité de  $\mathcal{A} - mId$ . Il suffit de montrer que  $\lambda Id - \mathcal{A}$  est surjectif pour un  $\lambda > m$  fixe. Donné  $(f, g, p, h) \in \mathcal{H}$ , on cherche

$U = (u, v, z, \theta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , solution de

$$(\lambda Id - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ p \\ h \end{pmatrix},$$

Qui vérifie

$$\begin{cases} \lambda u - v = f, \\ \lambda v - (\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x)_x + \gamma \theta_x = g, \\ \lambda z - \frac{1}{\tau} z_\rho = p, \\ \lambda \theta + \gamma v_x - \kappa \theta_{xx} = h. \end{cases} \quad (4.17)$$

Supposons que nous avons trouvé  $u$  avec la régularité appropriée. Alors,

$$v = \lambda u - f. \quad (4.18)$$

Pour déterminer  $z$ , rappelons que  $z(\cdot, 0) = u_x$ , alors, par (4.17)<sub>3</sub>, on obtient

$$z(\cdot, \rho) = e^{-\lambda \tau \rho} u_x + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho p(s) e^{\lambda \tau s} ds, \quad (4.19)$$

Et, en particulier

$$z(x, 1) = e^{-\lambda \tau} u_x + z_0, \quad (4.20)$$

Avec  $z_0 \in L^2(\Omega)$  défini par

$$z_0 = \tau e^{-\lambda \tau} \int_0^1 p(s) e^{\lambda \tau s} ds.$$

Maintenant, multiplier (4.17)<sub>2</sub> et (4.17)<sub>4</sub> respectivement par  $w \in H_0^1(\Omega)$  et  $\varphi \in H^2(\Omega)$  de telle sorte que  $\varphi_x(0) = \varphi_x(\ell) = 0$ , on obtient après quelques intégrations par parties en tenant compte des limites conditions sur  $v$ ,  $\theta$  et  $w$ ,

$$\lambda \int_{\Omega} v w dx + \int_{\Omega} (\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x) w_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_x w dx = \int_{\Omega} g w dx \quad (4.21)$$

et

$$\lambda \int_{\Omega} \theta \varphi dx - \gamma \int_{\Omega} v \varphi_x dx + \kappa \int_{\Omega} \theta_x \varphi_x dx = \int_{\Omega} h \varphi dx. \quad (4.22)$$

En remplaçant (4.18) et (4.20) en (4.21) et (4.22), nous obtenons

$$\lambda^2 \int_{\Omega} u w dx + (\alpha e^{-\lambda \tau} + \lambda \beta) \int_{\Omega} u_x w_x dx + \gamma \int_{\Omega} \theta_x w dx = \int_{\Omega} (g + \lambda f) w dx + \int_{\Omega} (f_x - \alpha z_0) w_x dx \quad (4.23)$$

et

$$\lambda \int_{\Omega} \theta \varphi dx - \lambda \gamma \int_{\Omega} u \varphi_x dx + \kappa \int_{\Omega} \theta_x \varphi_x dx = \int_{\Omega} (h - \gamma f) \varphi dx. \quad (4.24)$$

Somme (4.23), et (4.24) multiplié par  $\frac{1}{\lambda}$ , nous obtenons

$$b((u, \theta), (w, \varphi)) = F(w, \varphi) \quad (4.25)$$

Avec

$$b((u, \theta), (w, \varphi)) = \int_{\Omega} [\lambda^2 u w + (\alpha e^{-\lambda \tau} + \lambda \beta) u_x w_x] dx + \int_{\Omega} \left( \theta \varphi + \frac{\kappa}{\lambda} \theta_x \varphi_x \right) dx + \gamma \int_{\Omega} (\theta_x w - u \varphi_x) dx$$

et

$$F(w, \varphi) = \int_{\Omega} (g + \lambda f) w dx + \int_{\Omega} (f_x - \alpha z_0) w_x dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (h - \gamma f) \varphi dx.$$

L'espace

$$\mathcal{F} := \{(w, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \mid \theta_x(0) = \theta_x(\ell) = 0\},$$

Équipé du produit intérieur

$$\langle (w_1, \varphi_1), (w_2, \varphi_2) \rangle_{\mathcal{F}} = \int_{\Omega} (w_1 w_2 + w_{1x} w_{2x} + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_{1x} \varphi_{2x}) dx,$$

Est un espace Hilbert ; la forme bilingue  $b$  sur  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  et la forme linéaire  $F$  sur  $\mathcal{F}$  sont continués. De plus, pour chaque  $(w, \varphi) \in \mathcal{F}$ ,

$$|b((w, \varphi), (w, \varphi))| \geq c \|(w, \varphi)\|_{\mathcal{H}}^2$$

avec  $c := \min(\lambda^2, (\alpha e^{-\lambda\tau} + \lambda\beta), 1, \frac{\kappa}{\lambda}) > 0$ .

Par la lemme de Lax-Milgram, l'équation (4.25) a une solution unique  $(u, \theta) \in \mathcal{F}$ . Immédiatement, de (4.18), nous avons cette  $v \in H_0^1(\Omega)$ . ). Maintenant, si nous considérons  $(w, \varphi) \in \{0\} \times \mathcal{D}(\Omega)$  en (4.25) nous en déduisons cette équation (4.17)<sub>4</sub> est vraie. La fonction  $z$ , définie par (4.20), appartient à  $L^1(\Omega, H^1(0, 1))$  et satisfait (4.17)<sub>3</sub> et  $z(\cdot, 0) = u_x$ .

Les fonctions  $z(\cdot, 1)$  et  $v_x$  appartenir à  $L^2(\Omega)$ , alors on prend  $(w, \varphi) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \{0\}$  dans (4.25) en déduire que  $\alpha z(\cdot, 1) + \beta v_x$  appartenir à  $H_0^1(\Omega)$  et cette équation (4.17)<sub>1</sub> qui est vrai.

Laisser  $\tilde{\theta} = \theta - \frac{1}{\ell} \int_{\Omega} \theta_0 dx$ , alors on a ça  $U = (u, v, z, \tilde{\theta})$  appartenir à  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , et  $\mathcal{A}U = (f, g, p, h)$ . Ainsi,  $\lambda Id - \mathcal{A}$  est surjectif pour tout  $\lambda > 0$ .

En conclusion, l'opérateur  $\mathcal{A} - mId$  génère un  $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contraction. Par le théorème de perturbation borné (Sect. III.1 of [?]), on a

**Lemme 4.2.2** *L'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur  $\mathcal{H}$ .*

Enfin, le résultat de la bonne pose découle de la théorie des semi-groupes.

**Théorème 4.2.1** *Pour toute donnée initiale  $U_0 \in \mathcal{H}$  il existe une solution unique*

*$U \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathcal{H})$  de problème (4.15). De plus, si  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , alors  $U \in \mathcal{C}([0, +\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty), \mathcal{H})$ .*

### 4.3 Exponential stability

Sur la base de la méthode de Lyapunov, nous prouvons que le système (4.2) est exponentiellement stable pour certains  $\beta > 0$ . Plus précisément :

**Théorème 4.3.1** *Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour chaque  $\beta \geq \beta_0$ , le système (4.2) est exponentiellement stable.*

**preuve 4.3.1** *On prend comme fonction de Lyapunov*

$$V(t) := N_1 V_1(t) + \alpha N_2 V_2(t) + N_3 V_3(t) + N_4 V_4(t) + N_5 V_5(t) + N_6 V_6(t)$$

où

$$\begin{aligned} V_1(t) &:= \frac{1}{2} \|u_t\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx, & V_2(t) &:= \frac{1}{2} \|u_x\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2 dx, & V_3(t) &:= \frac{1}{2} \|\theta\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx, \\ V_4(t) &:= \int_0^1 e^{-2\lambda\rho} \|z(\cdot, \rho, t)\|^2 d\rho = \int_0^1 e^{-2\lambda\rho} \int_{\Omega} z^2(x, \rho, t) dx d\rho, \\ V_5(t) &:= - \int_0^1 e^{-\lambda\rho} f(\rho) \langle z(\cdot, \rho, t), u_x \rangle d\rho = - \int_0^1 e^{-\lambda\rho} f(\rho) \int_{\Omega} z(x, \rho, t) u_x(x, t) dx d\rho \text{ and} \\ V_6(t) &:= \langle u, u_t \rangle = \int_{\Omega} u u_t dx. \end{aligned}$$

*$f$  est une fonction réelle définie sur  $[0, 1]$  et cela sera déterminé plus tard. Les constantes  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$  et  $N_6$  are nombres positifs à corriger plus tard aussi.*

Désigne par  $\tilde{V}(t)$  l'énergie définie par

$$\tilde{V}(t) := N_1V_1(t) + \alpha N_2V_2(t) + N_3V_3(t) + N_4V_4(t).$$

Il est clair que  $\tilde{V}(t)$  est équivalent à  $E(t)$ . Ensuite, pour un choix approprié de  $f$  nous prouverons que nous pouvons trouver  $\{N_1, \dots, N_6\}$  et  $\beta > 0$  tel que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

(A1)  $V(t)$  est équivalent à  $\tilde{V}(t)$ ,

(A2)  $V'(t) \leq -n_0\tilde{V}(t)$ , pour un nombre positif  $n_0$ .

Le reste de la preuve sera divisé en trois parties :

First part : il s'agit de la deuxième hypothèse (A2). Commençons par le lemme suivant

**Lemme 4.3.1** Laisser  $V(t)$  être défini comme précédemment. En choisissant une fonction  $f$  satisfaisante

$$-e^{-2\lambda\rho} = (e^{-\lambda\rho}f(\rho))', \quad \lambda > 0 \tag{4.26}$$

et en prenant  $N_3 = N_1$ ,  $N_6\beta = N_2\alpha$  et  $N_6\alpha = \frac{f(1)e^{-\lambda}}{\tau}N_5$  nous avons que pour tous

les nombres réels positifs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  et  $\varepsilon_4$ ,

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq \left( -N_4 \frac{e^{-2\lambda}}{\tau} + N_1 \frac{\alpha \varepsilon_1}{2} \right) \|z(\cdot, 1, \cdot)\|^2 \\
&+ \left( -2 \frac{k_1}{\tau} N_4 + \frac{N_5}{2\tau} \left( \varepsilon_2 + \frac{\tau}{\varepsilon_3} \right) \right) V_4(t) \\
&+ \left( N_4 \frac{1}{\tau} + \frac{N_5}{\tau} \left( \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2} - \Lambda \right) + N_5 \frac{\Psi \gamma \varepsilon_4 c_p}{2\alpha \tau} \right) \|u_x\|^2 \\
&+ \left( N_1 \left( \frac{\alpha}{2\varepsilon_1} - \beta \right) + N_5 \left( \frac{\varepsilon_3}{2} \Phi + \frac{\Psi c_p}{2\alpha \tau} \right) \right) \|u_{tx}\|^2 \\
&+ \left( -N_1 \kappa + N_5 \frac{\Psi \gamma}{2\alpha \tau \varepsilon_4} \right) \|\theta_x\|^2
\end{aligned}$$

où  $c_p > 0$  est la constante de Poincaré associée à  $\Omega$ , (il peut être pris égal à  $\frac{\ell^2}{2}$ ) et

$$\Psi := f(1)e^{-\lambda}, \quad \Lambda := f(0) \quad \text{and} \quad \Phi := \int_0^1 f^2(\rho) d\rho.$$

en outre,

$$\Gamma := \int_0^1 e^{-2\lambda\rho} d\rho = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2\lambda}.$$

Remarquez que

$$\Lambda = \Psi + \Gamma.$$

**preuve 4.3.2** Calculer les dérivées de  $V_1, V_2, V_3, V_4$  et  $V_5$  en utilisant l'intégration

par parties, les conditions aux limites et l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
V_1'(t) = \langle u_{tt}, u_t \rangle &= \langle (\alpha z(\cdot, 1, \cdot) + \beta u_{tx})_x, u_t \rangle - \gamma \langle \theta_x, u_t \rangle \\
&= -\langle \alpha z(\cdot, 1, \cdot) + \beta u_{tx}, u_{tx} \rangle - \gamma \langle \theta_x, u_t \rangle \\
&= -\langle \alpha z(\cdot, 1, \cdot), u_{tx} \rangle - \beta \|u_{tx}\|^2 - \gamma \langle \theta_x, u_t \rangle \\
&\leq \left( \frac{\alpha}{2\varepsilon_1} - \beta \right) \|u_{tx}\|^2 + \frac{\alpha\varepsilon_1}{2} \|z(\cdot, 1, \cdot)\|^2 - \gamma \langle \theta_x, u_t \rangle,
\end{aligned}$$

$$V_2'(t) = \langle u_{xt}, u_x \rangle,$$

$$\begin{aligned}
V_3'(t) = \langle \theta_t, \theta \rangle &= -\gamma \langle (u_{xt}, \theta) + \kappa \langle \theta_{xx}, \theta \rangle \\
&= \gamma \langle u_t, \theta_x \rangle - \kappa \|\theta_x\|^2.
\end{aligned}$$

La dérivée de  $V_4$  is

$$\begin{aligned}
V_4'(t) &= 2 \int_0^1 e^{-2\lambda\rho} \langle z(\cdot, \rho, \cdot), z_t(\cdot, \rho, \cdot) \rangle d\rho \\
&= -\frac{2}{\tau} \int_0^1 e^{-2\lambda\rho} \langle z(\cdot, \rho, \cdot), z_\rho(\cdot, \rho, \cdot) \rangle d\rho \\
&= -\frac{e^{-2\lambda}}{\tau} \|z(\cdot, 1, \cdot)\|^2 + \frac{1}{\tau} \|u_x\|^2 - \frac{2\lambda}{\tau} \int_0^1 e^{-2\lambda\rho} \|z(\cdot, \rho, \cdot)\|^2 d\rho \\
&\leq -\frac{e^{-2\lambda}}{\tau} \|z(\cdot, 1, \cdot)\|^2 + \frac{1}{\tau} \|u_x\|^2 - \frac{2\lambda}{\tau} V_4(t).
\end{aligned}$$

La dérivée de  $V_5$  est calculé comme suit

$$\begin{aligned}
V_5'(t) &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 e^{-\lambda\rho} f(\rho) \langle z_\rho(\cdot, \rho, \cdot), u_x \rangle d\rho - \int_0^1 e^{-\lambda\rho} f(\rho) \langle z(\cdot, \rho, \cdot), u_{xt} \rangle d\rho \\
&= \frac{1}{\tau} e^{-\lambda} f(1) \langle z(\cdot, 1, \cdot), u_x \rangle - \frac{1}{\tau} f(0) \|u_x\|^2 \\
&+ \frac{1}{\tau} \int_0^1 (e^{-\lambda\rho} f(\rho))' \langle z(\cdot, \rho, \cdot), u_x \rangle d\rho - \int_0^1 e^{-\lambda\rho} f(\rho) \langle z(\cdot, \rho, \cdot), u_{xt} \rangle d\rho.
\end{aligned}$$

Remplacement  $e^{-\lambda} f(1)$  par  $\Psi$ ,  $f(0)$  par  $\Lambda$  et  $(e^{-\lambda\rho} f(\rho))'$  by  $-e^{-2\lambda\rho}$ , on obtient (en utilisant l'inégalité de Young),

$$V_5'(t) \leq \frac{1}{\tau} \left( \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2} - \Lambda \right) \|u_x\|^2 + \frac{1}{2\tau} \left( \varepsilon_2 + \frac{\tau}{\varepsilon_3} \right) V_4(t) + \frac{\varepsilon_3}{2} \Phi \|u_{tx}\|^2 + \frac{\Psi}{\tau} \langle z(\cdot, 1, \cdot), u_x \rangle.$$

Enfin, la dérivée de  $V_6$  is

$$V_6'(t) = \|u_t\|^2 - \alpha \langle z(\cdot, 1, \cdot), u_x \rangle - \beta \langle u_x, u_{xt} \rangle + \gamma \langle u, \theta_x \rangle.$$

Pour conclure, il suffit de résumer  $N_1 V_1'(t)$ ,  $\alpha N_2 V_2'(t)$ ,  $N_3 V_3'(t)$ ,  $N_4 V_4'(t)$ ,  $N_5 V_5'(t)$ , et  $N_6 V_6'(t)$ .

En vue de Lemme 4.3.1, pour que l'hypothèse (A2) soit satisfaite, il suffit que

$$-N_4 \frac{e^{-2\lambda}}{\tau} + N_1 \frac{\alpha \varepsilon_1}{2} = 0, \quad (4.27)$$

$$n_1 := -2 \frac{\lambda}{\tau} N_4 + \frac{N_5}{2\tau} \left( \varepsilon_2 + \frac{\tau}{\varepsilon_3} \right) < 0, \quad (4.28)$$

$$n_2 := N_4 \frac{1}{\tau} + \frac{N_5}{\tau} \left( \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2} - \Lambda \right) + N_5 \frac{\Psi \gamma \varepsilon_4 c_p}{2\alpha\tau} < 0, \quad (4.29)$$

$$n_3 := N_1 \left( \frac{\alpha}{2\varepsilon_1} - \beta \right) + N_5 \left( \frac{\varepsilon_3}{2} \Phi + \frac{\Psi c_p}{\alpha\tau} \right) < 0, \quad (4.30)$$

$$n_4 := -N_1 \kappa + N_5 \frac{\Psi \gamma}{2\alpha\tau \varepsilon_4} < 0. \quad (4.31)$$

La première condition (4.27) est équivalent à

$$N_4 = aN_1$$

avec  $a := \frac{1}{2}\alpha\varepsilon_1\tau e^{2\lambda}$ .

La deuxième condition (4.28) signifie qu'il existe  $0 < k < 1$  tel que

$$N_5 = bN_4 = abN_1$$

avec  $b := \frac{4\lambda k}{\varepsilon_2 + \frac{\tau}{\varepsilon_3}}$ .

Notez que, nous avons alors

$$N_6 = \frac{\Psi}{\alpha\tau}N_5 = \frac{ab\Psi}{\alpha\tau}N_1 \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{\beta}{\alpha}N_6 = \frac{ab\Psi\beta}{\alpha^2\tau}N_1.$$

Remplacement  $N_5$  par  $abN_1$  et  $a$  par  $\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_1\tau e^{2\lambda}$  dans (4.30), puis en multipliant l'inégalité par  $\frac{\alpha}{\varepsilon_1}$ , on obtient

$$\frac{1}{2}b\Psi\alpha e^{2\lambda}c_p + \frac{1}{4}\tau b\Phi\varepsilon_3\alpha^2 e^{2\lambda} < \frac{\alpha}{\varepsilon_1} \left( \beta - \frac{\alpha}{2\varepsilon_1} \right). \quad (4.32)$$

Nous prenons  $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ , alors (4.32) se transforme en

$$b\Psi\alpha e^{2\lambda}c_p + \frac{1}{2}\tau b\Phi\varepsilon_3\alpha^2 e^{2\lambda} < \beta^2. \quad (4.33)$$

Retournez à (4.31), Remplacement  $N_5$  par  $abN_1$  obtenir

$$\frac{ab\Psi\gamma}{2\alpha\tau\varepsilon_4} < \kappa. \quad (4.34)$$

L'inégalité aussi (4.29) devient

$$\frac{b\Psi\gamma\varepsilon_4c_p}{2\alpha} < \left( \left( \Lambda - \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2} \right) b - 1 \right). \quad (4.35)$$

Déjà, il faut que  $\Lambda - \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2} > 0$ , C'est  $\Lambda > \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2}$ , et  $\left( \Lambda - \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2} \right) b - 1 > 0$ , C'est,

$$b = \frac{A}{\Lambda - \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2}}, \quad A > 1, \quad (4.36)$$

Par conséquent (4.35) se transforme en

$$\frac{b\Psi\gamma\varepsilon_4c_p}{2\alpha} < (A - 1). \quad (4.37)$$

Combinant (4.34) et (4.37) obtenir

$$\frac{ab\Psi\gamma}{2\alpha\tau\kappa} < \varepsilon_4 < \frac{2\alpha}{\gamma b\Psi c_p}(A - 1). \quad (4.38)$$

Remplacement par  $\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_1\tau e^{2\lambda}$  dans (4.38) obtenir

$$\frac{\alpha\gamma b\Psi}{4\beta\kappa}e^{2\lambda} < \varepsilon_4 < \frac{2\alpha}{\gamma b\Psi c_p}(A - 1). \quad (4.39)$$

Maintenant, revenons plus en détail sur l'hypothèse (4.36). Pour ce faire, en rem-

plaçant  $b$  by  $\frac{4\lambda k}{\varepsilon_2 + \frac{\tau}{\varepsilon_3}}$ , on obtient

$$\frac{A}{\Lambda - \frac{\Gamma}{2\varepsilon_2}} = \frac{4\lambda k}{\varepsilon_2 + \frac{\tau}{\varepsilon_3}}, \quad (4.40)$$

ou équivalent,

$$\frac{A}{4\lambda k} \varepsilon_2^2 - \left( \Lambda - \frac{A}{4\lambda k} \frac{\tau}{\varepsilon_3} \right) \varepsilon_2 + \frac{\Gamma}{2} = 0 \quad (4.41)$$

le discriminant d'une telle équation dans  $\varepsilon_2$  est

$$\Delta := \left( \Lambda - \frac{A}{4\lambda k} \frac{\tau}{\varepsilon_3} \right)^2 - \frac{A\Gamma}{2\lambda k} \quad (4.42)$$

qui doit être au moins égal à zéro. Dans la suite, nous le choisissons zéro. D'autre part  $\varepsilon_2$  est positif, alors

$$\Lambda - \frac{A}{4\lambda k} \frac{\tau}{\varepsilon_3} = \sqrt{\frac{A\Gamma}{2\lambda k}} \quad (4.43)$$

ou équivalent

$$\frac{A}{4\lambda k} \frac{\tau}{\varepsilon_3} = \Lambda - \sqrt{\frac{A\Gamma}{2\lambda k}}. \quad (4.44)$$

Il est évident que le membre de gauche de la dernière équation est positif, c'est-à-dire

$$\frac{A}{k} < 2\lambda \frac{\Lambda^2}{\Gamma}. \quad (4.45)$$

De plus, depuis  $A > 1$  et  $0 < k < 1$  on a

$$1 < \frac{A}{k} < 2\lambda \frac{\Lambda^2}{\Gamma}. \quad (4.46)$$

Enfin, notez que

$$\varepsilon_2 = \sqrt{2\lambda \Gamma \frac{k}{A}}. \quad (4.47)$$

Second part : il s'agit de l'équivalence entre  $V(t)$  et  $\tilde{V}(t)$ . Laisser  $\varepsilon_5 > 0$  et  $\varepsilon_6 > 0$ ,

on a

$$|N_5 V_5| \leq \frac{N_5}{2\varepsilon_5} V_4 + \frac{N_5 \Phi \varepsilon_5}{2} \|u_x\|^2$$

et

$$|N_6 V_6| \leq \frac{N_6 \varepsilon_6}{2} c_p \|u_x\|^2 + \frac{N_6}{2\varepsilon_6} \|u_t\|^2.$$

pour  $V(t)$  être équivalent à  $\tilde{V}(t)$  il suffit que

$$\frac{N_6}{2\varepsilon_6} < \frac{N_1}{2}, \quad \frac{N_5}{2\varepsilon_5} < N_4, \quad (4.48)$$

$$\frac{N_6 \varepsilon_6}{2} c_p + \frac{N_5 \Phi \varepsilon_5}{2} < \frac{N_2 \alpha}{2}. \quad (4.49)$$

À l'aide de  $N_6 = \frac{ab\Psi}{\alpha\tau} N_5$  et  $N_5 = abN_1$  in(4.48) on a

$$\varepsilon_6 > \frac{ab\Psi}{\tau\alpha}, \quad \varepsilon_5 > \frac{b}{2}.$$

Nous choisissons

$$\varepsilon_6 = 2\frac{ab\Psi}{\tau\alpha}, \quad \varepsilon_5 = b.$$

Utiliser à nouveau  $N_6 = \frac{\Psi}{\alpha\tau} N_5$  and  $N_2 = \frac{\beta\Psi}{\alpha^2\tau} N_5$ , inequality (4.49) devenir

$$\frac{b\Psi^2}{\beta\tau} c_p + \Phi b < \frac{\beta\Psi}{\alpha\tau} \quad (4.50)$$

Third part : Il suffit d'examiner les équations (4.46), (4.33), (4.39) et (4.50).

Nous prenons  $h := \frac{\Psi}{\Gamma}$ , alors  $\Lambda = \Psi + \Gamma = (1 + h)\Gamma = (1 + h)\frac{2\lambda}{1 - e^{-2\lambda}}$

First step. Commençons par l'hypothèse (4.46) qui peut être traduit en

$$1 < \frac{A}{k} < (1 - e^{-2\lambda})(1 + h)^2 \quad (4.51)$$

Nous choisissons  $h := e^{-2\lambda}$ . Alors

$$(1 - e^{-2\lambda})(1 + h)^2 = (1 - h)(1 + h)^2 = 1 + h - h^2 - h^3 > 1$$

Pour  $\lambda$  assez large. Nous choisissons  $A = 1 + h - h^2 - 2h^3 - 4h^4$  and  $k = 1 - h^4$ .

Nous avons, pour  $\lambda$  assez large,  $A > 1$ ,  $0 < k < 1$  et (4.51) est satisfait puisque

$$1 < \frac{A}{k} = 1 + h - h^2 - 2h^3 + o(h^3) < (1 - h)(1 + h)^2 \quad (4.52)$$

Second step. Estimation de  $\varepsilon_2$ ,  $b$  et  $\varepsilon_3$  selon  $h$  et  $\lambda$  pour  $\lambda$  assez large. on a

$$\begin{aligned} \frac{k}{A} &= \frac{1 + o(h^2)}{1 + h - h^2 + o(h^2)} \\ &= 1 - h + 2h^2 + o(h^2) \end{aligned} \quad (4.53)$$

et

$$\Gamma = \frac{1}{2\lambda}(1 - h)$$

alors

$$\begin{aligned} 2\lambda\Gamma\frac{k}{A} &= (1 - h)(1 - h + 2h^2 + o(h^2)) \\ &= 1 - 2h + 3h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

On obtient donc, en utilisant (4.47),

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= (1 - h + \frac{3}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)) \\ &= (1 - h + h^2 + o(h^2)). \end{aligned}$$

Nous évaluons  $b$ . D'abord,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon_2} &= \frac{1}{2(1-h+h^2+o(h^2))} \\ &= \frac{1}{2}(1+h-h^2+(h-h^2)^2+o(h^2)) \\ &= \frac{1}{2}(1+h+o(h^2)),\end{aligned}$$

Alors

$$1+h-\frac{1}{2\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(1+h+o(h^2))$$

Par conséquent

$$\frac{1}{1+h-\frac{1}{2\varepsilon_2}} = 2(1-h+h^2+o(h^2)).$$

Enfin, de (4.36) et en utilisant  $\Lambda = (1+h)\Gamma$  on a

$$\begin{aligned}b = \frac{A}{\Gamma(1+h-\frac{1}{2\varepsilon_2})} &= 4\lambda \frac{(1+h-h^2+o(h^2))(1-h+h^2+o(h^2))}{1-h} \\ &= 4\lambda(1+h+o(h^2)).\end{aligned}\tag{4.54}$$

On évalue maintenant  $\varepsilon_3$  :

Rappelons d'abord que

$$\frac{A}{2\lambda k} = \frac{1}{2\lambda}(1+h-h^2-2h^3-3h^4+o(h^4))\tag{4.55}$$

Alors

$$\frac{A\Gamma}{2\lambda k} = \frac{1}{4\lambda^2}(1-2h^2-h^3-h^4+o(h^4))$$

et

$$\sqrt{\frac{A\Gamma}{2\lambda k}} = \frac{1}{2\lambda}(1 - h^2 - \frac{1}{2}h^3 - h^4 + o(h^4)) \quad (4.56)$$

À l'aide de (4.44), (4.55), (4.56) et cela  $\Lambda = \frac{1}{2\lambda}(1 - h^2)$  on a

$$\varepsilon_3 = \frac{\tau}{h^3}(1 - h + o(h)). \quad (4.57)$$

*Third step. Interprétation de Inégalité (4.33). Tout d'abord, nous devons exprimer*

$\Phi$  *selon*  $h$  *et*  $\lambda$ .

*Depuis*

$$\begin{aligned} f(\rho) &= e^{\lambda\rho} \left( h\Gamma + \int_{\rho}^1 e^{-2\lambda s} ds \right) \\ &= \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda\rho} (e^{-2\lambda}(1 - e^{-2\lambda}) + (e^{-2\lambda\rho} - e^{-2\lambda})) \\ &= \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda\rho} (e^{-2\lambda\rho} - e^{-4\lambda}) \end{aligned}$$

*alors,*

$$\begin{aligned} f^2(\rho) &= \frac{1}{4\lambda^2} e^{2\lambda\rho} (e^{-4\lambda\rho} - 2e^{-4\lambda} e^{-2\lambda\rho} + e^{-8\lambda}) \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} (e^{-2\lambda\rho} - 2e^{-4\lambda} + e^{-8\lambda} e^{2\lambda\rho}). \end{aligned}$$

*D'où*

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^1 f^2(\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} \left( \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2\lambda} - 2e^{-4\lambda} + \frac{1}{2\lambda} (e^{-6\lambda} - e^{-8\lambda}) \right) \\ &= \frac{1}{8\lambda^3} (1 - h - 4\lambda h^2 + o(h^2)). \end{aligned}$$

Maintenant, l'inégalité (4.33) peut être réécrit comme :

$$2\alpha c_p(1 - h^2 + o(h^2)) + \frac{\tau^2 \alpha^2}{4\lambda^2 h^4}(1 - h + o(h)) < \beta^2.$$

Ensuite, nous prenons

$$2 \left( \frac{c_p}{\alpha \tau^2} + \frac{e^{8\lambda}}{8\lambda^2} \right) < \left( \frac{\beta}{\alpha \tau} \right)^2 \quad (4.58)$$

avec  $\lambda$  assez large.

Fourth step. État (4.39) et l'existence de  $\varepsilon_4$ . Inégalité (4.39) peut être réécrit comme :

$$\frac{\alpha \gamma}{2\beta \kappa}(1 - h^2 + o(h^2)) < \varepsilon_4 < \frac{\alpha}{\gamma c_p}(1 - h + o(h)).$$

Ensuite, nous prenons

$$\frac{\gamma^2}{2\kappa} c_p < \beta(1 - h + o(h)) \quad (4.59)$$

et  $\varepsilon_4$  peut être pris égal à  $\frac{\alpha}{2} \left( \frac{\gamma}{2\beta \kappa} + \frac{1}{\gamma c_p}(1 - h + o(h)) \right)$ , avec  $\lambda$  assez large.

Fifth step. Interprétation de l'hypothèse (4.50). Il peut être réécrit comme :

$$2h \frac{c_p}{\tau \beta}(1 - h^2 + o(h^2)) + \frac{1}{\lambda h}(1 + h + o(h)) < \frac{\beta}{\tau \alpha}.$$

Il suffit de prendre

$$\left( 2e^{-2\lambda} \frac{c_p}{\tau \beta} + \frac{1}{\lambda}(e^{2\lambda} + 1 + o(1)) \right) < \frac{\beta}{\alpha \tau}. \quad (4.60)$$

avec  $\lambda$  assez large.

Notez que pour  $\lambda$  assez large,  $\beta = \alpha \tau e^{4\lambda}$  remplit les trois conditions (4.58, 4.59) et (4.60). De plus, il existe  $\beta_0 > 0$  telle que chaque  $\beta > \beta_0$  remplit les trois conditions

(4.58, 4.59) et (4.60).

Pour chaque  $\beta > \beta_0$  on a

$$\dot{V}(t) \leq -n_0 \tilde{V}(t) \tag{4.61}$$

où  $n_0 = \min\{n_1, n_2, \frac{1}{c_p}n_3, \frac{1}{c_p}n_4\}$ . Rappeler que  $V(t)$ ,  $\tilde{V}(t)$  et  $E(t)$  sont équivalents alors, il existe  $a_0 > 0, C > 0$  tel que

$$E(t) < Ce^{-a_0 t}.$$

## Comments

On peut remplacer les conditions de Neumann pour  $\theta$

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0$$

par les conditions de Dirichlet

$$\theta(0, t) = \theta(\ell, t) = 0,$$

on obtient alors les mêmes résultats.

# Chapitre 5

## Conclusion

Dans ce travail, on a considéré un système suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t - \tau) + \gamma \theta_x(x, t) = 0, & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ \theta_t(x, t) - \kappa \theta_{xx}(x, t) + \gamma u_{xt}(x, t) = 0, & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(\ell, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

utilisant les théorèmes L'axe-Milgram et Hille-Yosida on a montré l'existence et l'unicité des solutions de problème, et utilisant la méthode des multiplicateurs on a établi un résultat de stabilité exponentielle de l'énergie de ce système. En perspectives, j'espère de poursuivre l'étude sur ce sujet et pouvoir développer certaines idées, en avenir proche. A titre d'exemple, l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'un système Thermoélasticité linéaire unidimensionnel.

# Bibliographie

- [1] Ameri Kamal.(2019/2020).Problème de type kirchho faissant intervenir p-laplacien et un terme singuler. Centre Universitaire Salhi Ahmed-Naàma.
- [2] Ellouze Imen .(2010).Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs.l'Université Paul Verlaine de Metz et de l'Université de Sfax.
- [3] BELBALI Hadjer.(2010).Existence, unicité et stabilisation d'un système de type Timoshenko.Université Ahmed Draia D'Adrar.
- [4] KEDDI Ahmed .(2018).Comportement asymptotique de quelques systèmes thermoélastiques.UNIVERSITE DJILLALI LIABES FACULTE DES SCIENCES EXACTES SIDI BEL ABBES.
- [5] SMAIN MOULAI KHATIR AND FARHAT SHEL.(2010).WELL-POSEDNESS AND EXPONENTIAL STABILITY OF A THERMOELASTIC SYSTEM WITH INTERNAL DELAY.