

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed de Naâma
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique



Mémoire de Master en Mathématiques

Thème

Analyse des séries temporelles non linéaires

Réalisé par :
M. BENBRAHIM DJAMEL.

Soutenue le 17-06-2021 devant le jury :

Pr.	C.U. Salhi Ahmed de Naâma	Président du jury
Dr.	C.U. Salhi Ahmed de Naâma	Examineur
Pr.	C.U. Salhi Ahmed de Naâma	Examineur
Dr. GASMI LAID	Univ. Ahmed Draya, Adrar	Rapporteur.

Année Universitaire :2020 -2021

Remerciement

<Merci et gratitude à Dieu d'abord qui nous a donné la santé et le bien-être et s'est moqué des bonnes conditions pour nous d'étudier et d'accomplir cette humble recherche, puis merci à tous ceux qui ont contribué à notre éducation de loin ou de près. Je mentionne en particulier le docteur GASMI LAID pour le festin de la recherche encadrée, qui ne nous a rien épargné. Je salue tous les professeurs du Centre Universitaire salhi (NAAMA) qui se consacrent à la formation des générations et les éclaire, Sans oublier le personnel administratif qui nous a bien reçus .mes salutation au collègues du class qui étaient mes meilleurs amis.

Dédicace

Je dédie cet humble travail aux parents à tous ceux qui ont appris sur leurs mains, de la première lettre à l'équation la plus complexe. à tous les amis et amants qui nous ont donné le moral..... et pour tout le monde, merci infiniment.

>

Contents

- 1.1 Introduction
- 1.2 Historique
- 1.3 Définition
- 1.4 Different types des series temporelles
- 1.5 Tendances et composantes saisonnieres
- 1.6 Estimation et elimination de la tendance et de la saisonnalite
- 1.6.1 Bruit blanc
- 1.6.2 Processus stationnaires
- 1.6.3 Estimation paramétrique de la tendance (trend)
- 1.6.4 Estimation non paramétrique : moyenne mobile Tendance
- 1.6.5 Elimination de la tendance et de la saisonnalite par la methode des differences
- 1.6.6 Test sur la serie residuelle
- 1.7 Modelisation des series stationnaires
- 1.7.1 Correlation, fonction d'auto correlation
- 2.2 MODÈLES LINÉAIRES UNIVARIÉS CLASSIQUES
- 2.2.1 DÉFINITION AR_p
- 2.2.2 DÉFINITION $ARX(p; s)$
- 2.2.3 DÉFINITION $ARMA(p, q)$
- 2.2.4. DÉFINITION $ARMAX(p, s, q)$
- 2.2.5 CONCLUSION
- 2.2.6 APPLICATION
- 2.3 Les processus ARIMA(p, d, q)
- 2.3.1 Definition
- 2.3.2 Determination des parametres p et q
- 3. LES SÉRIES TEMPORELLES NON LINÉAIRES
- 3.1 LA MODELISATION VAR(p)
- 3.2 LES MODÈLES NON LINÉAIRES
- 3.2.1 INITIATION
- 3.2.2 DÉFINITION MATHIMATIQUE
- 3.2.3. Modeles bilineaires
- 3.2.4. Modèles autorégressifs à seuils
- 3.2.5 Modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques

Chapitre 1

1.1.INTRODUCTION :

L'étude des séries chronologiques (ou séries temporelles) porte sur des données qui sont mesurées régulièrement dans le temps. Les mesures sont donc effectuées à des instants égaux, plus ou moins grands. Traditionnellement, les données macroéconomiques étaient mesurées annuellement, trimestriellement ou au mieux mensuellement. Avec la réalité des ordinateurs puissants et les bases de données volumineuses, il est fréquent d'obtenir des données mesurées selon une échelle temporelle plus fine (hebdomadaire, journalière ou même horaire). Dans tous les cas, le phénomène d'intérêt est supposé provenir d'un certain processus stochastique, et par définition, une série chronologique en représente une réalisation finie. Plusieurs domaines d'études comportent des séries temporelles d'intérêt théorique et pratique, particulièrement dans les applications économiques et financières. En effet, ces domaines comportent plusieurs types de valeurs évoluant dans le temps, par exemple le taux de chômage mensuel en économie ou les rendements quotidiens d'une action en finance. La modélisation de ces séries temporelles permet de représenter le comportement sous-jacent de la valeur évoluant dans le temps, et l'étude de ce comportement peut faciliter l'interprétation de l'élément étudié. La modélisation des séries rend également la prévision de valeurs futures intuitive, puisqu'il est généralement supposé que le comportement sous-jacent identifié se répétera dans le temps. La prévision de valeurs futures pour une série est d'un grand intérêt dans plusieurs domaines, par exemple en finance, où prédire le prix qu'une action prendra dans le futur peut mener à une prise de décision.

1.2 HISTORIQUE

Les séries temporelles sont considérées à tort comme étant une branche exclusive de l'économétrie. Cette dernière est une discipline qui est relativement jeune alors que les séries temporelles ont été utilisées bien avant, par exemple en astronomie (1906) et en météorologie (1968). L'objet des séries temporelles est l'étude des variables au cours du temps. Même s'ils n'ont pas été à l'origine de cette discipline, ce sont les économètres qui ont assuré les grandes avancées qu'a connues cette discipline (beaucoup de " Prix Nobel

" d'économie sont des économètres). Parmi ses principaux objectifs figurent la détermination de tendances au sein de ces séries ainsi que la stabilité des valeurs (et de leur variation) au cours du temps.

C'est de la déception des prévisions issues des modèles structurels d'inspiration keynésienne qu'est née la théorie des séries temporelles telle qu'on la connaît aujourd'hui. Et sur ce point, c'est la publication de l'ouvrage de Box et Jenkins en 1970 qui a été décisive. En effet, dans l'ouvrage les deux auteurs développent le très populaire modèle ARMA (Auto Regressive Moving Average). Pour donner un exemple, pour prévoir le PIB français en 2020 par exemple, il ne s'agit plus d'utiliser un modèle structurel qui explique le PIB (exemple par l'intermédiaire de la consommation, de l'investissement, des dépenses publiques et du solde commercial etc.) et de projeter ensuite les tendances passées. Mais avec le modèle ARMA, il s'agit de prévoir le PIB en 2020 en exploitant les propriétés statistiques du PIB (moyenne, variance etc.) Ce modèle utilise souvent des valeurs retardées du PIB (d'où le terme Auto Regressive) et de chocs aléatoires qui sont en général de moyenne nulle, de variance constante et non autocorrélés (bruit blanc) ; quand la variable qui représente ces chocs est retardée, on parle de moyenne mobile.

Le modèle ARMA est un cas particulier d'un modèle beaucoup plus général nommé ARIMA (en) où le I désigne Integrated en anglais ou Intégrée en français. En effet, le modèle ARMA ne permet de traiter que les séries dites stationnaires (des moments du premier ordre qui sont invariants au cours du temps). Les modèles ARIMA permettent de traiter les séries non stationnaires après avoir déterminé le niveau d'intégration (le nombre de fois qu'il faut différencier la série avant de la rendre stationnaire). Bien que possédant d'excellentes qualités prévisionnelles, le modèle ARIMA ou ARMA souffre d'une lacune majeure : il est incapable de traiter simultanément plus d'une variable (série). Par exemple, si les modèles structurels sont capables de répondre à une équation telle : "quel est l'effet de la hausse des taux d'intérêt sur le PIB ?", un modèle ARIMA est incapable d'y répondre. Pour contourner ce problème, il faut pouvoir généraliser le modèle ARIMA dans le cas à plusieurs variables. C'est ce qu'a fait en partie Christopher Sims en proposant en 1980 le modèle Vector Auto Regressive (VAR) qui permet de traiter concomitamment plusieurs variables. Mais, contrairement au modèle structurel à plusieurs variables, dans les modèles VAR, toutes les variables sont endogènes. Cette manière de modéliser en faisant abstraction d'une théorie économique a donné naissance à ce que l'on a appelé l'Économétrie sans théorie.

Ces modèles (ARIMA et VAR) ne permettent de traiter que des phénomènes qui sont linéaires ou approximativement (par exemple le PIB) mais ne permettent pas de "capturer" les propriétés des phénomènes qui sont non linéaires (les variables financières par exemple, inflation, cours d'action etc.). Pour prendre en compte à la fois non linéarité et la forte variabilité de ces variables, l'économètre américain Robert F. Engle a le premier développé le

modèle dit ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity) en 1982.

1.3.DÉFINITION :

Une série temporelle ou série chronologique est une suite d'observation d'un phénomène physique au cours du temps :

consommation d'électricité, cours de pétrole, trafic internet, population algérienne, rythme cardiaque ect. Il s'agit d'une suite finie des valeurs réelles, indicées par un temps continu ou discret régulier, typiquement d'un signal échantillonné à une fréquence fixe.

L'étude des séries temporelle poursuit plusieurs buts pratique :

- une meilleure compréhension du phénomène physique représenté par la série ; -une représentation simplifiée par un modèle stochastique ; une prédiction du futur de la série à partir de la partie observée.

MATHÉMATIQUEMENT :

Une série temporelle, est une réalisation finie de suite $(y_t), t \in Z$ de taille T , avec chaque élément de la série observé typiquement de façon équidistante aux instants $t = 1; \dots; T$. y_t est un vecteur aléatoire de dimension $k \times 1$ tel que

$$y_t = (y_{t1}; y_{t2}; \dots; y_{tk})'$$

1.4. LES DIFFÉRENTS TYPES DES SÉRIES TEMPORELLES :

A partir de l'étude des séries temporelles on peut déduire qu'il y a deux types des séries temporelles sont :

- 1.les séries temporelles à temps discrets(heures, jours, mois et années...)
- 2.les séries temporelles à temps continu comme la représentation graphique de rythme cardiaque...

EXEMPLES DES SÉRIES TEMPORÉLLES DISCRETS :

les séries temporelles sont présentes dans les nombreux domaines d'application par exemple, en démographie, on peut tracer l'évolution de la taille d'une population comme celle des USA entre 1790 et 1990, représentée dans la Figure 1.

En écologie, une série temporelle souvent citée en exemple est celle du nombre de lynx capturés au Canada de 1821 à 1934 et dont la représentation est donnée par la Figure 2.

En économie également, les séries temporelles sont très utilisées. Un exemple est donné par la série (AirPassengers) du nombre de passagers dans les lignes aériennes entre les années 1949 et 1960 et est représentée dans la Figure 3

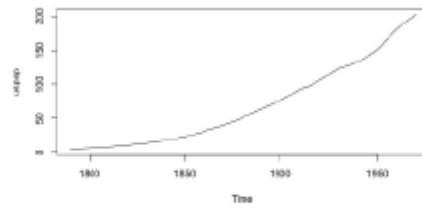


FIGURE 1. Taille de la population (en million d'habitants) des USA entre les années 1790 et 1990

FIGURE 1.1 –

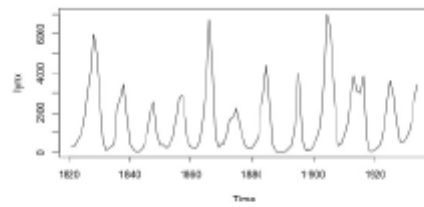


FIGURE 2. Nombre de lynx capturés au Canada de 1821 à 1934

FIGURE 1.2 –

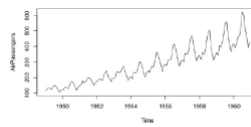


FIGURE 3. Nombre mensuel de passagers (en milliers) entre les années 1949 et 1960 dans les lignes aériennes.

FIGURE 1.3 –

Exemple 1.2 (Morts par accident) Le nombre mensuel de morts et blessés graves par accident de la route en France métropolitaine (la Figure(1.2) haut) montre d'importantes fluctuations saisonnières. En vérité elles sont peu explicites sur la série complète, alors qu'un zoom de la série sur quelques années (Yves (2011)) (la Figure(1.2) bas)

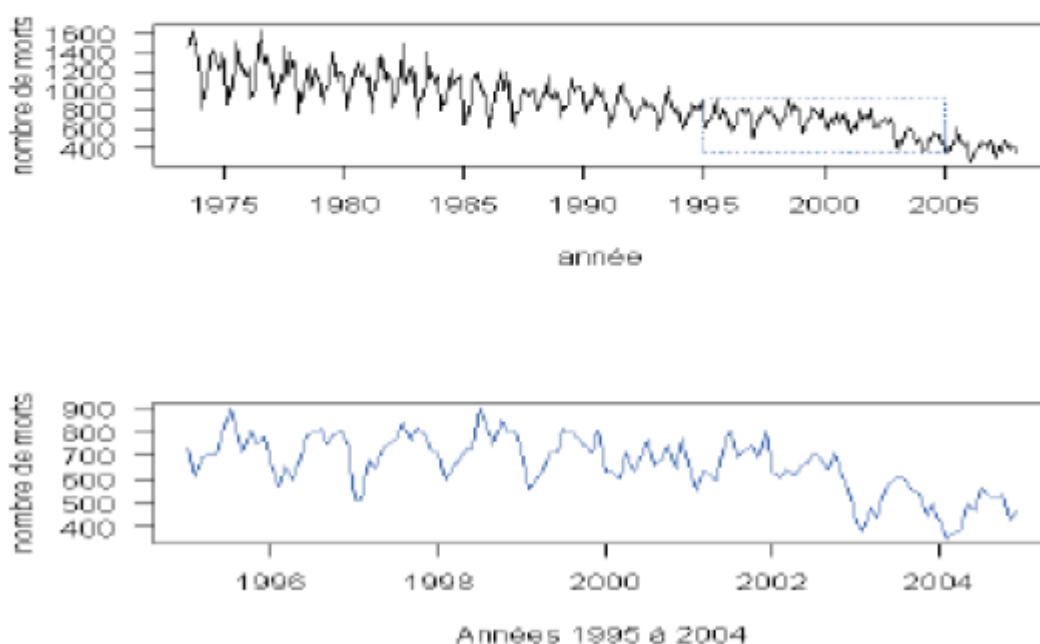


FIGURE 1.4 – accidents de la route - morts à 30 jours

1.5 Tendances et composantes saisonnières

Définition : On dit que la série admet une tendance si on peut écrire $x_t = f(t) + \varepsilon_t$ avec f une fonction fixée (ε_t) des bruits aléatoires.

- si $f(t) = \alpha(t) + \beta$ on dit que la tendance est linéaire, plus généralement, si $f(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i$ on dit que la tendance est polynomiale.

- Si $f(t)$ est périodique, on dit que la tendance est périodique.

- Si $f(t) = s(t) + \alpha t + \beta$ avec s une fonction périodique on dit que la série a une tendance linéaire et une composante périodique (/saisonnière). (On remarque que ces définitions ne sont pas très cohérentes.)

- si $f(t) = s_t$ ou s_t est periodique, on dit que la tendance est periodique.

s_t periodique : c'est-a- dire $s_{t+T} = s_t$, avec T la periode (supposee entier). lorsque la period est de 6 mois ou 1 an ,on parle generalement de composante saisonniere.

1.6 Estimation et elimination de la tendance et de la saisonnalite

Une serie temporelle $(x_t) 1 \leq t \leq n$ est l'observation des n premieres realisations d'un processus stochastique $(X_t)_t$. C'est ce processus que l'on cherche desormais a modeliser. Pour cela, la demarche suivante doit etre adoptee :

- représenter graphiquement la serie afin de reperer les tendances et saisonnalites ;
- estimer et supprimer les tendances et saisonnalites (partie deterministe du processus stochastique) ;
- choisir un modele pour les residus (partie aleatoire du processus stochastique) et l'estimer ;
- predire les realisations futures a l'aide de ce modele.

1.6.1 Bruit blanc

Definition 1.6.1

Un processus de bruit blanc est une suite de variables aleatoires $(X_t)_t$ independantes, d'esperance et de variance constantes. Si l'esperance est nulle, le bruit blanc est centre, et si les variables aleatoires sont gaussiennes, le bruit blanc est gaussien.

1.6.2. Processus stationnaires

pour les modèles linéaires, on considère que les processus soient stationnaires.

Définition 6.2

Un processus Y est faiblement stationnaire (ou stationnaire du second ordre) si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$E(y_t) = m, \forall t$ (la moyenne est constante)

$Var(x_t) < \infty$ (la variance est finie et invariable dans le temps)

$Cov(y_t, y_{t+h}) = \Gamma(h), \forall t, \forall h$ (la covariance est indépendante de temps)

Un processus faiblement stationnaire est de moyenne constante et homoscedastique. $\Gamma(\cdot)$

est appelé la fonction d'autocovariance. En divisant chaque autocovariance par le produit des écart-types, on obtient les autocorrélations qui constituent la fonction d'autocorrélation $p(\cdot)$, ou $\rho(\cdot)$ dans le cas unidimensionnel.

pour un processus $x_t, t > 0$ stationnaire, on définit la fonction d'auto-covariance par ;

$h \in Z \mapsto \sigma(h) = Cov(X_t; X_{t+h})$ (ne dépend pas de t) , et la fonction d'auto-corrélation par :

$h \in N^* \mapsto \rho(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(0)}$

on remarque que la fonction σ est paire.

Définition 6.3

Un processus Y est fortement stationnaire si et seulement si la distribution de

$(y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \dots, y_{t_k+h})$ est égale à la distribution de $(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_k})$: pour tout h , pour tout k et pour tout k -uplet (t_1, \dots, t_k) .

Remarque :

Un processus du second ordre qui est fortement stationnaire est également faiblement stationnaire. Un processus gaussien faiblement stationnaire est aussi fortement stationnaire.

Les séries traitées peuvent rarement être considérées comme générées par des processus stationnaires. Des transformations permettent de rendre constantes la moyenne et la variance : par exemple, la différenciation

$(\Delta(y_t)$ ou $\Delta(y_t = y_t - y_{t-1}))$

pour la moyenne, et la transformation logarithmique pour la variance.

1.6.3 Une estimation paramétrique de la tendance (trend)

Nous supposons que la série temporelle étudiée soit la réalisation d'un processus stochastique composé d'une tendance déterministe m_t et d'une partie aléatoire ε_t (supposée de moyenne nulle) :

$$X_t = m_t + \varepsilon_t.$$

Une méthode simple consiste à supposer que cette tendance est linéaire :

$$m_t = a + bt,$$

et d'estimer les paramètres a et b par moindres carrés. Ainsi, si on observe la série x_1, \dots, x_n , il faut trouver a et b qui minimisent la quantité :

$$\sum_{t=1}^n (x_t - a - bt)^2$$

Les solutions de ce problème sont :

$$\hat{a} = \frac{6}{n(n-1)} \left(- \sum_{t=1}^n tx_t + \frac{2n+1}{3} n\bar{x} \right)$$

$$\hat{b} = \frac{12}{n(n^2-1)} \left(\sum_{t=1}^n tx_t + \frac{n+1}{2} n\bar{x} \right)$$

l'hypothèse de linéarité de la tendance convient très bien à certaines séries temporelles.

(voir la Figure(1.3)) Mais ce n' est pas le cas de toutes les séries(voir la Figure(1.4))

Il est alors possible de supposer que la tendance soit de forme polynomiale :

$$m_t = a + bt + ct^2$$

et d'estimer les paramètres a , b et c par moindres carrés. Mais il est parfois difficile d'estimer le degré d.u polynôme, et lorsque le degré est trop important, le nombre de paramètres à estimer devient grand et les calculs

fastidieux. Dans cette situation, on a recourt à une méthode d'estimation non paramétrique (Jacques (2013)).

1.6.4 Estimation non paramétrique : moyenne mobile Tendance : supposons que la tendance m_t soit dans un petit intervalle $[t - q, t + q]$ autour de t . Dans ce cas, un bon estimateur de la tendance est la moyenne sur cet intervalle :

$$\hat{m}_t = \frac{1}{2q+1} \sum k = -qq + x_t + k$$

On peut donc estimer la tendance à chaque temps t en calculant la moyenne sur les observations étant dans une fenêtre de largeur $2q+1$ autour de t . c'est ce que l'on appelle une estimation par moyen mobile :

Pour éviter les problèmes de bord, on suppose que

$$x_t = x_1 \text{ si } t < 1 \text{ et } x_t = x_n \text{ si } t > n .$$

Tendance et saisonnalité : Supposons désormais que le processus ne comporte pas uniquement une tendance, mais également une saisonnalité :

$$X_t = m_t + s_t + \varepsilon_t,$$

avec s_t une fonction T-périodique.

le principe d'estimation est (en simplifiant légèrement) le suivant : On estime la tendance moyenne sur une période, puis on estime la composante saisonnière en moyennant sur toutes les périodes les écarts à la tendance moyenne de la période.

Application :

Nous faisons une décomposition du trafic mensuel en tendance, saisonnalité et erreur . La Figure(1.5) donne de haut en bas : le trafic mensuel brut, la tendance, la composante saisonnière et l'erreur .Septembre 2001est marqué par un trait verticale.Examinons ces chronogrammes . Le premier montre la croissance du trafic et sa saisonnalité prononcée qui rend peu lisible l'effet du 9/11.par contre , le graphique de la tendance met en évidence la chute de trafic due au 9/11, puis la reprise progressive de la croissance par la suite (Yves (2011)).

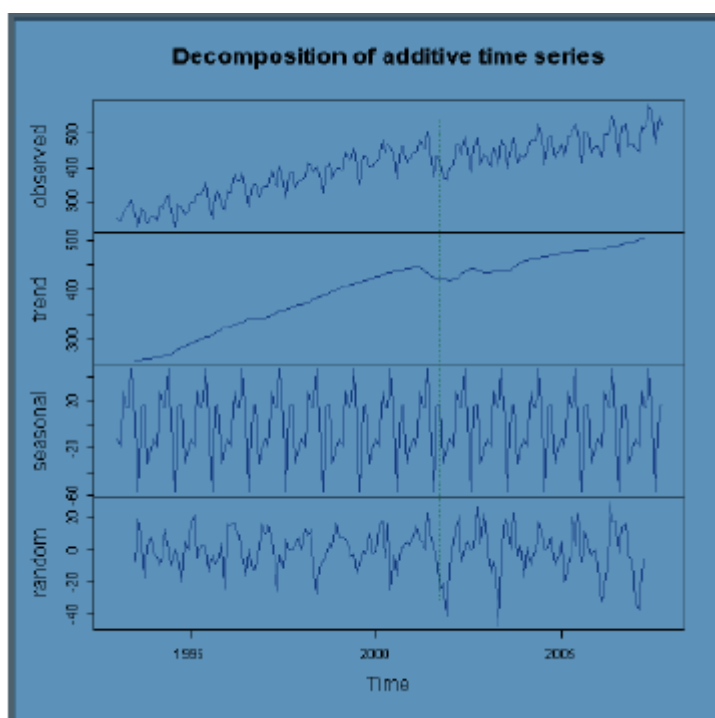


FIGURE 1.5 – Trafic passager mensuel et sa décomposition additive, unité 10^3 passagers

1.6.5 Elimination de la tendance et de la saisonnalite par la methode des differences

Cette methode permet de supprimer les tendances et saisonnalite d'une serie temporelle sans les estimer.

Soit Δ_T l'opérateur qui associe

$$(X_t - X_{t-T})(X_t) :$$

$$\Delta_T = X_t - X_{t-T}$$

. On note Δ l'opérateur Δ_1 , et Δ_T^k

l'opérateur $\Delta_T \circ \dots \circ \Delta_T$ k fois.

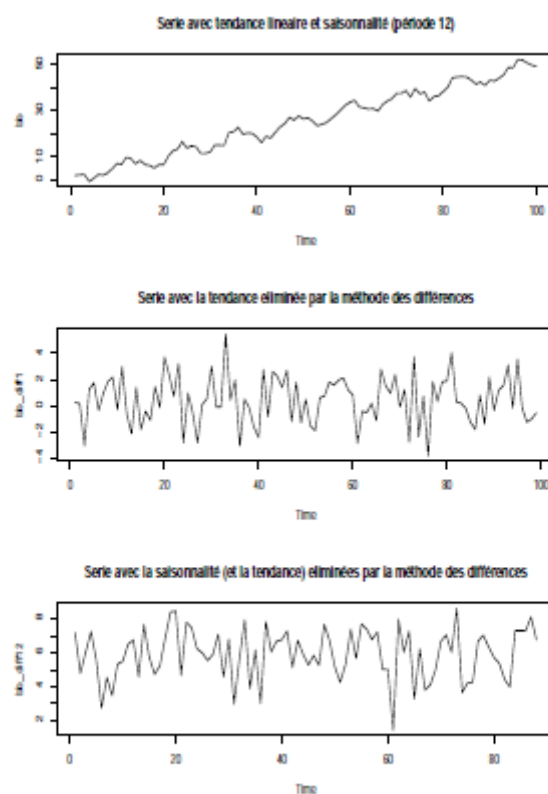


FIGURE 17 – Elimination de la tendance et de la saisonnalite par la methode des differences (figure du haut : serie $x_t = \frac{t}{2} + 3 \cos \frac{\pi t}{6} + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$; figure du milieu : serie $x_t - x_{t-1}$; figure du bas : serie $x_t - x_{t-12}$)

FIGURE 1.6 –

Proposition 1.6.1 Soit un processus admettant une tendance polynomiale d'ordre k :

$$X_t = \sum_{j=0}^k a_j t^j + \varepsilon_t.$$

Le processus ΔX_t admet une tendance polynomiale d'ordre $k-1$. Ainsi, en appliquant k fois Δ , on élimine la tendance.

1.6.6 Test sur la série résiduelle

L'objectif des techniques présentées est d'obtenir une série stationnaire (ou tout au moins le plus stationnaire possible), et en particulier sans tendance ou saisonnalité. L'étape suivante consiste à modéliser la série résiduelle obtenue. La première chose à faire est donc de tester s'il y a dépendance entre les termes de cette série. Si ce n'est pas le cas, on dit que la série résiduelle (stationnaire) est un bruit blanc (définition 1.6.1).

Comment tester si on est en présence d'un bruit blanc ? Par l'étude de la fonction d'auto-corrélation empirique. Lorsque n est assez grand, les auto-corrélations d'un bruit blanc sont approximativement indépendantes et de loi $N(0; \frac{1}{n})$. Ainsi, 95% des auto-corrélations devraient se trouver dans l'intervalle $[-\frac{1.96}{n}, \frac{1.96}{n}]$, et en traçant les 40 premières auto-corrélations il ne devrait pas y en avoir plus de 3 en dehors de ces limites.

A l'aide du test du portemanteau Plutôt que de regarder si chaque auto-corrélation est dans les bornes de l'intervalle précédent, nous considérons la statistique définie par la somme des h premières auto-corrélations au carré

$$Q = n \sum_{j=1}^k \hat{\rho}^2(j)$$

La statistique Q suit une loi du χ^2 à h degrés de liberté. Il est donc possible de construire un test qui consistera à rejeter l'hypothèse nulle (la série est un bruit blanc) si Q est supérieur au quantile $\chi_{h,1-\alpha}^2$ Ljung et Box (1978) ont amélioré ce test en considérant la statistique ³

1

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{j=0}^h \frac{\hat{\rho}^2(j)}{n-j}$$

dont la distribution est mieux approximée que la précédente par une loi du χ^2 à h degrés de liberté

1. C'est ce test qui est implémenté dans la fonction `Box.test` de R

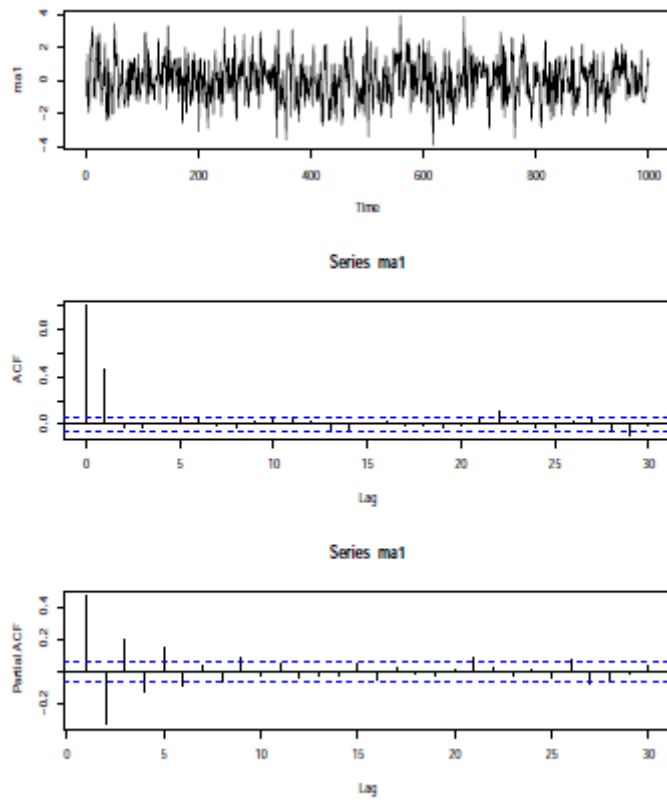


FIGURE 23 – Simulation d'un $MA_1 : X_t = \epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1}$, auto-corrélation et auto-corrélation partielle.

FIGURE 1.7 –

1.7 Modelisation des series stationnaires

Après avoir examiné des outils d'exploration, nous abordons la modélisation des séries temporelles. On considère qu'une série temporelle observée $y_t, t = 1, \dots, T$ est la réalisation de v.a. (variables aléatoires) $Y_t, t = 1, \dots, T$ qui forment elles-mêmes une portion d'un processus aléatoire $Y_t, t = \dots, 0, 1, 2, \dots$, c'est-à-dire d'une série infinie de v.a. Pour pouvoir faire de l'estimation (de moyenne, de variance, . . .), il faut que le phénomène ait une certaine stabilité. La notion de stationnarité, est la clef de l'analyse des séries temporelles (Argon (2009)).

1.7.1 Correlation, fonction d'auto correlation

Fonction d'auto correlation (ACF). Considérons une série (faiblement) stationnaire X_t . On est souvent intéressé par décrire la dépendance de X_t par rapport à son passé, notamment pour expliquer le niveau actuel de la série par le niveau à une date précédente. Si une dépendance est linéaire, elle est bien décrite par le coefficient d'auto correlation. Par définition, le coefficient d'auto correlation d'ordre l est :

$$\rho_l = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-l})}{\sqrt{V(X_t)V(X_{t-l})}}$$

mais $V(X_{t-l}) = V(X_t) = \gamma_0$ et $E(X_t) = \mu$ donc :

$$\rho_l = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-l})}{\sqrt{V(X_t)}} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0}$$

Chapitre 2

2.2 MODÈLES LINÉAIRES UNIVARIÉS CLASSIQUES

Lors de l'étude de séries chronologiques, il est pertinent d'ajuster un modèle aux données observées afin de permettre l'analyse de la série et la prévision de valeurs futures à l'aide du modèle.

Dans le cas univarié, les modèles les plus fréquemment utilisés sont les modèles linéaire classiques, soit les modèles AR(p) et ARMA(p;q), ainsi que leurs extensions à l'inclusion de variables exogènes, comme par exemple les modèles ARX(p,s) et ARMAX(p;s;q) :

2.2.1 DÉFINITION AR_p .

Un modèle autorégressif d'ordre p, noté AR(p), est un processus qui satisfait l'équation aux différences stochastiques :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t; \quad (1.2.1)$$

où (y_t) est stationnaire ;

$\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_p$ sont des paramètres, telle que :

$\phi_p \neq 0$; et ε_t est un bruit blanc .

Le modèle AR(p) peut être étendu pour inclure des variables exogènes $x_1; \dots; x_s$ permettant d'expliquer la variable réponse y_t , ces variables étant également respectivement des processus. On obtient alors le modèle ARX(p;s).

Remarque :

ε_t est l'innovation contenue dans le processus au temps t Les coefficients ϕ_j doivent vérifier la contrainte suivante pour assurer la stationnarité du processus : le polynôme caractéristique du processus (1.2.1),

$$A(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

ne doit avoir que des racines (réelles ou complexes) de module strictement supérieur à 1.

2.2.2 DÉFINITION $ARX(p;s)$.

Un modèle autorégressif avec variables exogènes d'ordre (p;s), noté ARX(p;s), satisfait l'équation aux différences stochastiques :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \gamma_1 x_{1t} + \dots + \gamma_s x_{st} + \varepsilon_t; \quad (1.2.2)$$

où (y_t) est stationnaire ;

$(x_{1t}); \dots; (x_{st})$ sont des processus stochastiques exogènes ;

$\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_p; \gamma_1; \dots; \gamma_s$ sont des paramètres tels que :

$\phi_p \neq 0$ et $\gamma_s \neq 0$ et (ε_t) est un bruit blanc.

Ces deux modèles autorégressifs univariés sont les formes linéaires classiques utilisées lorsque la composante autorégressive du modèle univarié se base uniquement sur les valeurs précédentes de la variable modélisée. Toutefois, ces modèles peuvent également être élargis afin d'inclure une composante moyenne mobile. Cette inclusion mène aux modèles linéaires ARMA(p,q) et ARMAX(p,s,q).

2.2.3 DÉFINITION ARMA(p, q).

un modèle autorégressif à moyenne mobile d'ordre (p,q), noté arma(p,q), est un processus satisfaisant l'équation :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}; \quad (1.2.3)$$

où (y_t) est stationnaire ; $\phi_1; \dots; \phi_p; \theta_1; \dots; \theta_q$ sont des paramètres, avec

$\phi_p \neq 0$ et $\theta_q \neq 0$;

et (ε_t) est un bruit blanc.

Comme pour le modèle AR(p), le modèle ARMA(p,q) peut être étendu au cas comportant des variables exogènes

Remarque :

La stationnarité d'un ARMA⁶ est assurée si toutes les racines du polynôme

$$A(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

sont de module strictement supérieur à 1. Ce polynôme forme avec

$$B(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$$

les deux polynômes caractéristiques du processus. On supposera également que les polynômes A et B n'ont pas de racine commune, afin de s'assurer qu'il n'y a pas de représentation plus courte. On peut écrire le processus ARMA(p, q) sous la forme suivante :

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q};$$

$$\text{ou } \Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

$\Phi(L)$ est l'opérateur de autoregressif

$\Theta(L)$ est l'opérateur de moyenne mobile

1. Wold (1954) montre que les séries stationnaires peuvent être représentées par les processus ARMA.

2.2.4. DÉFINITION $ARMAX(p, s, q)$.

Un modèle autorégressif à moyenne mobile avec variables exogènes d'ordre (p, s, q) , noté $ARMAX(p, s, q)$, satisfait l'équation :

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \gamma_1 x_{1t} + \dots + \gamma_s x_{st} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}; \quad (1.2.4)$$

où (y_t) est stationnaire ;

$(x_{1t}); \dots; (x_{st})$ sont des processus stochastiques exogènes ;

$\phi_1; \dots; \phi_p; \theta_1; \dots; \theta_q; \gamma_1; \dots; \gamma_s$ sont des paramètres, avec

$\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0, \gamma_s \neq 0$; et (ε_t) est un bruit blanc.

Le modèle $ARMAX(p, s, q)$ est ainsi une extension du modèle $ARMA(p, q)$ acceptant aussi des variables exogènes $x_1; \dots; x_s$ pouvant influencer le modèle. Les méthodes d'estimation pour ces modèles linéaires sont élaborées par plusieurs auteurs, notamment Shumway et Stoffer (2010) et Hannan et Deistler (2012).

Les modèles linéaires classiques sont appropriés et suffisants dans plusieurs applications puisqu'ils parviennent généralement à adéquatement représenter les données macroéconomique sou encore observées à des espaces temporels relativement grands (mois, années, etc).

Toutefois, il existe certains cas où les modèles linéaires ne peuvent pas bien représenter le vrai modèle sous-jacent aux données, particulièrement dans le cas où il y a plusieurs régimes.

Un régime est par définition la structure dans le temps et l'espace d'un système économique. Ainsi, la présence de plusieurs régimes sous-entend que les données comportent plusieurs structures sous-jacentes dans le temps et l'espace. Cela se voit notamment en économie, où plusieurs types de jeux de données comportent deux régimes ou plus, avec une transition entre les deux.

Il convient alors d'utiliser un modèle plus approprié que les modèles linéaires classiques pour ces données, ce qui nous mène à l'étude des modèles non-linéaires

2.2.5 CONCLUSION :

Généralement Le modèle autorégressif univarié est de la forme :

$$y_t = f(z_t) + \varepsilon_t ;$$

où z_t est un vecteur pouvant inclure les variables retardées $y_{t-1}; \dots; y_{t-p}$ et les variables exogènes $x_{1t}; \dots; x_{st}$.

si la fonction f est linéaire le modèle dit linéaire.

2.2.6 APPLICATION :

Exemple 1 :

Pour une régression linéaire simple (RLS)

dans un instant t en administrant un teste de lecture a 12 enfants ages de

7;8 et 9ans et nous avons les resultats obtenus par ces sujets :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X(age)	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
Y(note de teste)	6	8	8	7	9	8	6	9	7	8	9	7

l'équation de régression sous la forme :

$$y = ax + b$$

l'idée est d'estimer les paramètres inconnus a et b
cette relation nous conduit à la relation d'estimation

$$\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b} \text{ l'équation d'ajustement}$$

y :une valeur observée

\hat{y} :une valeur theorique(estimer)

Exemple2 :

Pour une régression linéaire multiple(RLM)ou(VAR) on considère le tableau suivant :

x_1	14	25	16	34	15	46
x_2	7	8	6	2	1	3
y	10	12	12	25	45	12

l'équation de régression sous la forme $y = ax_1 + bx_2 + c$

les inconnus a estimée sont a ; b et c.

2.3 Les processus ARIMA(p, d, q)

Lorsque l'on a une série (X_t) a non stationnarite stochastique, il convient de la modéliser a l'aide d'un processus ARIMA(p, d, q) ou d designe l'ordre de différenciation (ou d'intégration).

2.3.1 Definition Un processus ARIMA(p, d, q) ou "Autoregressive Inté-grated Moving Average" d'ordre p, d, et q pour la série (X_t) est un processus de la forme suivante :

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \nabla^d x_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

ou encore

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d x_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

ou ε_t est un bruit blanc centre de variance σ^2 , B est l'opérateur de retard tel que $Bx_t = x_{t-1}$ et $B^p x_t = x_{t-p}$, ∇^d est l'opérateur de difference de degré d ($d > 0$ est un entier positif), (ϕ_1, \dots, ϕ_p) et $(\theta_1, \dots, \theta_q)$ sont des coefficients a estimer.

la série (X_t) est une série non stationnaire alors que la série $W_t = \nabla^d X_t$ est une série stationnaire.

Estimer les paramètres du processus ARIMA(p, d, q) pour la série (X_t) non stationnaire revient à estimer les coefficients du processus ARMA(p, q) pour la série (W_t) stationnaire.

2.3.2 Détermination des paramètres p et q Ayant transformé correctement ces données, le problème revient à trouver un modèle ARMA satisfaisant et particulièrement aussi à déterminer p et q à trouver les fonctions d'autocorrélation et les fonctions d'autocorrélation partielle. L'identification se base principalement sur l'analyse des ACF et des PACF des séries considérées. On peut distinguer les cas d'espèces suivants : Si on trouve que les ACF et les PACF ne sont pas significatifs pour tous les retards, alors les résidus obéissent à un processus de bruit blanc (voir Lagnoux (1996)).

Chapitre 3

3. LES SÉRIES TEMPORELLES NON LINÉAIRES

3.1 La modélisation VAR(p)

le modèle d'autorégression vectorielle VAR étend l'idée d'autorégressions de k séries aux régressions de k séries chronologiques, où les valeurs décalées de toutes les séries k apparaissent comme des régresseurs. Autrement dit, dans un modèle VAR, nous régressons un vecteur de variables de séries temporelles sur des vecteurs décalés de ces variables. comme pour les modèles AR(p), l'ordre de décalage est noté p, de sorte que le modèle VAR(p) de deux variables X_t et Y_t ($k = 2$) est donné par les équations

$$X_t = A_{10} + A_{11}Y_{t-1} + \dots + A_{1p}Y_{t-p} + B_{11}X_{t-1} + \dots + B_{1p}X_{t-p} + u_{1t}$$

$$Y_t = A_{20} + A_{21}Y_{t-1} + \dots + A_{2p}Y_{t-p} + B_{21}X_{t-1} + \dots + B_{2p}X_{t-p} + u_{2t}$$

dans le cas générale La représentation VAR a k variables et a p décalages VAR(p) s'écrit sous forme matricielle,

$$Y_t = A_0 + A_1Y_{t-1} + \dots + A_pY_{t-p} + \varepsilon_t, \dots \dots (*)$$

avec

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^k \end{bmatrix} \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{1i}^1 & a_{1i}^2 & \dots & a_{1i}^k \\ a_{2i}^1 & a_{2i}^2 & \dots & a_{2i}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ki}^1 & a_{ki}^2 & \dots & a_{ki}^k \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_k^0 \end{bmatrix} \quad \text{et } \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t^k \end{bmatrix}$$

La matrice de covariance des erreurs $\Sigma = E(\varepsilon_t' \varepsilon_t)$ est ici inconnue. De la même façon que dans le cas univariante, on pourra noter

$$A(L)Y_t = A_0 + \varepsilon_t$$

ou A est un polynôme matriciel ($k * k$);

$$A(z) = I - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p,$$

et on appera polynome caracteristique

$$(I - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p)$$

Remarque : L'écriture VAR presentee ici suppose que la ième équation, définissant Y_t^i ne fasse intervenir aucun Y_t^j

Ceci n'est pas forcement toujours le cas : considerons les deux processus stationnaires (X_t) et (Y_t) définis par les relations suivantes

$$X_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_p X_{t-p} - \delta Y_t + \gamma_1 Y_{t-1} + \dots + \gamma_q Y_{t-q} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = a + b_1 Y_{t-1} + \dots + b_r Y_{t-p} - d X_t + c_1 X_{t-1} + \dots + c_s X_{t-s} + \eta_t;$$

qui peut se reecrire sous forme matricielle

$$DZ_t = A + A_1 Z_{t-1} + \dots + A_n Z_{t-n} + u_t \text{ ou } n = \max\{p, q, r, s\}$$

avec les notations matricielles

$$Z_t = \begin{bmatrix} y_t \\ X_t \end{bmatrix} \quad u_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t & \eta_t \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ d & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha \\ a \end{bmatrix} \quad \text{et pour } i = 1, \dots, n$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \beta_i & \gamma_i \\ b_i & c_i \end{bmatrix}$$

avec la convention, par exemple, $\beta_i = 0$ pour $p < i \leq n$. On supposera que les bruits (ε_t) et (η_t) sont non-correles.

Il est alor possible d'écrire l'équation sous forme reduite, obtenue en multipliant par D^{-1} :

$$Z_t = C + C_1 Z_{t-1} + \dots + C_n Z_{t-n} + v_t \text{ ou } v_t = D^{-1} u_t :$$

On constate que les innovations (v_t) sont alors fonctions des innovations de la forme structurelle, (ε_t) et (η_t) , et peuvent etre correles :

$$v_t = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_t - \delta \eta_t}{1 - \delta d} & \frac{\eta_t - d \varepsilon_t}{1 - \delta d} \end{pmatrix}$$

Si chacunes des composantes sont i.i.d. les variances sont alors respectivement

$$(\sigma_\varepsilon^2 + \delta \sigma_\eta^2) / (1 - \delta d)^2$$

$$\text{et } (\sigma_\eta^2 + d \sigma_\varepsilon^2) / (1 - \delta d)^2$$

On constate que l'on peut alors toujours se ramener a des processus de la forme (*).

rappele : Le processus Y_t est stationnaire (au second ordre) si

- (i) $E(Y_t) = 1$ pour tout t
- (ii) $V(Y_t)$ est finie et constante
- (iii) $cov(Y_t; Y_{t+k}) = E([Y_t - \mu][Y_{t+k} - \mu]) = \tau_k$ pour tout t

Propriete : Un processus VAR(p) est stationnaire si le polynome caracteristique (defini a partir du determinant

$$\det(I - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p)$$

a ses racines a l'exterieur du cercle unite¹

Exemple 3 :

Le processus bivarie defini par

$$Z_t = \begin{bmatrix} y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \end{bmatrix}$$

a pour polynome caracteristique

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \right) Z = \begin{bmatrix} 1 - 0.7z & -0.4z \\ -0.2z & 1 - 0.3z \end{bmatrix} = 1 - z + 0.3z^2$$

qui admet pour racines $z_1 = 0.84$ et $z_2 = -0.15$: le processus n'est pas stationnaire.

Exemple 4 :

Le processus defini par

$$\begin{bmatrix} y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \end{bmatrix}$$

a pour polynome caracteristique

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \right) Z = \begin{bmatrix} 1 - 0.2z & -0.7z \\ -0.3z & 1 - 0.4z \end{bmatrix} = 1 - 0.6z + 0.13z^2$$

qui admet pour racines $z_1 = 1.3$ et $z_2 = -5.91$:

1. Preuve. Hamilton (1994) page 259

le processus est stationnaire

Les processus VAR(p) peuvent se mettre sous forme VAR(1) en utilisant l'écriture suivante. Soit

$$Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^n) \in \mathfrak{R}^n$$

satisfaisant la représentation VAR(p) suivante : pour tout t,
 $Y_t = \tau + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

soit $A(L)Y_t = \tau + \varepsilon_t$:

L'esperance de ce processus est alors

$$* E(X_t) = E\phi(L)^{-1}[\tau + \varepsilon_t] = \phi(1)^{-1}c = \mu \text{ pour tout } t :$$

On peut alors réécrire

$$\phi(L)[Y_{t-1}] = \varepsilon_t.$$

Considerons alors

$$Z_t = \begin{pmatrix} y_t - u \\ y_{t-1} - u \\ \vdots \\ y_{t-p+1} - u \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ I_n & o_n & \dots & o_n \\ o_n & I_n & & o_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ o_n & \dots & & I_n & o_n \end{pmatrix}, \text{ et } \eta_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^1 \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}$$

On peut alors noter que le processus VAR(p) (Y_t) peut se réécrire sous la forme d'un processus transformé Z_t satisfaisant une représentation VAR (1) :

$$Z_t = AZ_{t-1} + \eta_t :$$

Exemple 5 :

Considerons le processus bivarie défini par :

$$\begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^1 \\ y_{t-1}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-2}^1 \\ y_{t-2}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \end{bmatrix}$$

suivant un modèle VAR(2). Le polynôme autoregressif A(L) est alors donné par

$$A(L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} L + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} L^2$$

3.2. LES MODÈLES NON LINÉAIRES

3.2.1 INITIATION .

Sur le plan économétrique et financiers, le nouveau détective est de trouver des modèles capables de capturer et de reproduire ces asymétries et de mieux les expliquer.

Les modèles linéaires de la famille ARMA, de par la constance de leurs paramètres, ne permettant pas cette tâche, il a fallu sortir de leur cadre restrictif et explorer des modèles non-linéaires. Or, la notion de non-linéarité étant assez générale, la famille des modèles non-linéaires est très large. Néanmoins, une classe très particulière a émergé et a eu du succès en économie, c'est la classe des modèles à changement de régimes. Avec cette nouvelle forme de modélisation, la construction et l'évaluation des prévisions ont été entièrement repensées.

3.2.2 DÉFINITION MATHÉMATIQUE.

nous avons vu que l'équation de modèle autorégressif univarié général est de la forme :

$$y_t = f(z_t) + \varepsilon_t$$

tous simplement si f n'est pas linéaire alors le modèle est non linéaire. à partir de cette définition on constate qu'il y a de nombreuses manières d'introduire des non linéarités dans un modèle de série temporelle quelques unes essentielles entre elles, sont :

1. les modèles bilinéaires
2. les modèles avec seuil
3. les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ("ARCH") et GARCH

3.2.3. Modeles bilineaires

Les modeles bilineaires (Granger et Andersen, 1978) generalisent les modeles ARMA en introduisant des termes lineaires separement en Y et en ε , donc bilineaires.

L'equation du modele bilineaire general est donc

$$Y_t = \sum_{i=0}^p \theta_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=0}^P \sum_{j=0}^Q \lambda_{ij} Y_{t-i} \varepsilon_{t-j}$$

où le processus ε est un bruit blanc gaussien (cette hypothese peut etre souvent remplacee par celle d'un bruit blanc fort avec existence de la variance). Il est designe par le sigle BL(p, q; P, Q).

3.2.4. Modèles autorégressifs à seuils

Les modèles autorégressifs à seuils ("threshold autoregressive" ou TAR) ont été proposés par Tong (1978) (voir aussi Tong 1983, 1990). Tong les a introduit comme des approximations discrètes de modèles non linéaires en temps continu sous forme d'équation différentielles non linéaires. Ils permettent de produire des phénomènes tels qu'un cycle limite et une dépendance entre amplitude et fréquence. Supposons que le processus Y vérifie au temps t une équation parmi plusieurs équations différentielles selon la valeur d'une variable (autre que Y). Chaque équation correspond à un régime. dans le cas d'un seuil unique et d'une variable, on aura par exemple :

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p_1} \theta_i^{(1)} Y_{t-i} + \varepsilon_t \dots si X_t \leq \alpha.$$

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p_2} \theta_i^{(2)} Y_{t-i} + \varepsilon_t \dots si X_t > \alpha$$

Tong a considere l'existence de plusieurs seuils. La variable x_t est soit une variable exogene, soit une valeur retardee de δ de la variable etudiee, $y_{t-\delta}$

3.2.5 MODELES ARCH ET GARCH Divers problèmes tels que l'établissement des prix des options dans le secteur financier ont motivé l'étude de la volatilité, ou variabilité, d'une série chronologique. Les modèles ARMA ont été utilisés pour modéliser la moyenne conditionnelle d'un processus lorsque la variance conditionnelle était constante. En utilisant un AR(1) comme exemple, nous avons supposé

$$E(x_t) = \phi x_{t-1} \text{ et } var(x_t) = var(w_t) = \sigma_w^2 :$$

Dans de nombreux problèmes, cependant, l'hypothèse d'une variance conditionnelle constante sera violée. Des modèles tels que le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique ou ARCH, introduit pour la première fois par Engle (1982), ont été développés pour modéliser les changements de volatilité. Ces modèles ont ensuite été étendus aux modèles ARCH

généralisés, ou GARCH par Bollerslev (1986). Dans ces problèmes, nous nous intéressons à la modélisation du rendement ou du taux de croissance d'une série. Par exemple, si x_t est la valeur d'un actif au temps t , alors le rendement ou le gain relatif, r_t , de l'actif au temps t est

$$r_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \dots\dots\dots (5.34)$$

La définition (5.34) implique que :

$$x_t = (1 + r_t)x_{t-1}.$$

Ainsi, sur la base de la discussion dans la section 3.7, si le retour représente un petit changement en pourcentage (en magnitude), alors :

$$\nabla \log(x_t) \approx r_t \dots\dots\dots (5.35)$$

Soit la valeur, $\nabla \log(x_t)$ ou $(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$, sera appelé le retour, 5.2 et sera noté r_t .

En règle générale, pour les séries financières, le rendement r_t , n'a pas de variance conditionnelle constante, et les périodes très volatiles ont tendance à être regroupées. En d'autres termes, il y a une forte dépendance aux sursauts soudains de variabilité dans un retour sur le propre passé de la série. Par exemple, la Figure 1.4 montre les rendements quotidiens du Dow Jones Industrial Average (DJIA) du 20 avril 2006 au 20 avril 2016. Dans ce cas, comme c'est typique, le rendement r_t est assez stable, à l'exception des rafales à court terme de forte volatilité. le modèle ARCH le plus simple, l'ARCH(1), modélise le retour comme

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t (5, 36)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 \dots\dots\dots 5.37^\circ$$

lorsque ε_t est un bruit blanc gaussien standard, ε_t iid $N(0, 1)$. L'hypothèse normale peut être assouplie ; nous en discuterons plus tard. Comme pour les modèles ARMA, nous devons imposer certaines contraintes sur les paramètres du modèle pour obtenir les propriétés souhaitables. Une contrainte évidente est que $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ car σ_t^2 est une variance.

Comme nous le verrons, les modèles ARCH(1) reviennent comme un processus de bruit blanc avec une variance conditionnelle non constante, et cette variance conditionnelle dépend du retour précédent.

Tout d'abord, notez que la distribution conditionnelle de r_t donnée r_{t-1} est gaussienne :

$$r_t|r_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \dots \dots \dots (5,38)$$

De plus, il est possible d'écrire le modèle ARCH(1) en tant que modèle AR(1) non gaussien dans le carré des retours r_t^2 . Tout d'abord, réécrivez (5,36)-(5,37) comme

$$r_t^2 = \sigma^2 \varepsilon_t^2$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 = \sigma_t^2$$

et soustraire les deux équations pour obtenir

$$r_t^2 - (\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$$

:

Maintenant, écrivez cette équation comme

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + v_t \dots (5.39)$$

où $v_t = \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)$.

Parce que ε_t^2 est le carré d'un $N(0,1)$ Variable aléatoire, $\varepsilon_t^2 - 1$ est un décalé (pour avoir une moyenne nulle), X_1^2 variable aléatoire.

Pour explorer les propriétés d'ARCH, nous définissons

$R_s = \{r_s, r_{s-1}, \dots\}$. Ensuite, en utilisant (5,38), nous voyons immédiatement que r_t a une moyenne nulle²

$$E(r_t) = EE(r_t|R_{t-1}) = EE(r_t|r_{t-1}) = 0 \dots \dots \dots (5,40)$$

Parce que $E(r_t|R_{t-1}) = 0$, le processus r_t est dit être une différence de martingale. Puisque r_t est une différence de martingale, c'est aussi une séquence non corrélée. Par exemple, avec $h > 0$

$$\begin{aligned} & , cov(r_{t+h}, r_t) = E(r_t r_{t+h}) \\ & = EE(r_t r_{t+h} | R_{t+h-1}) \\ & = E\{E(r_{t+h} | R_{t+h-1})\} \\ & = 0 \dots \dots \dots (5.41) \end{aligned}$$

La dernière ligne de (5.41) suit parce que r_t appartient à l'ensemble d'informations

2. Rappelez si $r_t = (x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$ est un petit pourcentage, alors $\log(1 + r_t) \simeq r_t$. Il est plus facile de programmer $\nabla \log x_t$, donc c'est souvent utilisé au lieu de calculer r_t directement. Bien qu'il s'agit d'un terme impropre, $\nabla \log x_t$ est souvent appelé le log-return; mais les retours ne sont pas enregistrés.

R_{t+h-1} pour $h > 0$, et $E(r_{t+h}|R_{t+h-1}) = 0$, tel que déterminé en (5.40). Un argument similaire à (5.40) et (5.41) établira le fait que le processus d'erreur v_t dans (5.39) est également une différence de martingale et, par conséquent, une séquence non corrélée. Si la variance de v_t est finie et constante par rapport au temps, et $0 \leq \alpha_1 < 1$, alors basé sur la propriété 3.1, (5.39) spécifie un processus AR(1) causal pour r_t^2 . Par conséquent, $E(r_t^2)$ et $var(r_t^2)$

doit être constant par rapport au temps t . Ceci, implique que

$$E(r_t^2) = var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \dots \dots \dots (5.42)$$

et, après quelques manipulations,

$$E(r_t^4) = \frac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \dots \dots \dots (5.43)$$

La condition d'existence du moment d'ordre 4 est $3\alpha_1^2 < 1$, et on en déduit alors l'expression de la kurtosis

$$k = \frac{E(X_t^4)}{E(X_t^2)^2} = 3 \frac{1-3\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

(cas de la loi normale).

Les queues de la distribution marginale d'un processus ARCH(1) sont donc plus épaisses que pour un processus gaussien (on parlera de distribution leptokurtique).

3.2.6 Processus ARCH (p)

Les modèles ARCH(p) sont des extensions des modèles ARCH(1) :

Les modèles ARCH(1) étaient

$$r_t^2 = \sigma^2 \varepsilon_t^2$$

$$\text{posons } X_t = r_t^2, h_t = \sigma^2$$

$$\text{alors : } X_t = \varepsilon_t h_t$$

$$\text{où } h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

$$\text{et } \varepsilon_s \sim N(0; \sigma^2)$$

et les modèles ARCH (p) font intervenir plusieurs retards

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

où $h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$
 et $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

La volatilité de la date t est alors fonction des carrés des écarts à la moyenne observés dans le passé proche. Si les coefficients α_i sont tous positifs (et assez grands), il y a une persistance des niveaux de volatilité : on observe des périodes de forte volatilité suivies de période de faible volatilité. On peut alors écrire

$$E(X_t | X_{t-1}) = 0 \text{ et } E(X_t^2 | X_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2$$

14 Les graphiques ci-dessous permettent de comparer un processus AR(1) et un processus ARCH(1)

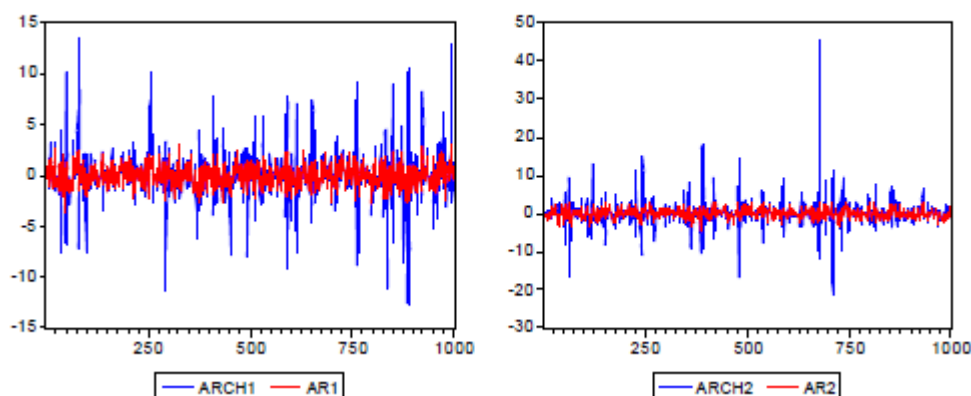


FIGURE 3.1 –

3.2.7 Processus GARCH (p ; q)

Ces modèles ont été introduits par Bollerslev en 1986, inspirés de la démarche de Box et Jenkins, avec une dynamique autorégressive,

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

où

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \dots + \beta_q h_{t-q}^2$$

On peut noter tout d'abord que, sous cette forme, les coefficients p et q ne sont pas analogues à ceux des modèles ARMA : en particulier, q correspond au caractère autorégressif du processus (h_t^2) . On a alors $E(X_t | X_{t-1}) = 0$ et $E(X_t^2 | X_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \dots + \beta_q h_{t-q}^2$

Propriété 5 Si le processus GARCH (p ; q) est stationnaire au second ordre, alors nécessairement

$$C = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p + \beta_1 + \dots + \beta_q < 1$$

et dans ce cas, la variance de X_t est

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-C}$$

si $C=0$ on dira alors que le processus GARCH(p, q) est intégré, et on parlera de processus IGARCH(p, q)

Dans le cas d'un processus GARCH(1, 1), il est possible de montrer que la kurtosis de X_t est de la forme

$$k(X_t) = \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \alpha_1^2(\mu_4 - 1)} (\varepsilon_t)$$

où $\mu_4 = E(\varepsilon_t^4)$

CONCLUSION < A propos de la recherche requises sur les séries chronologiques non linéaires, nous avons défini des séries chronologiques et donné un bref historique avec des exemples montrant l'importance de ces chaînes dans les prédictions et les événements futurs. Ces modèles AR ARMA ARIMA... Ce qui détermine la linéarité de la série et les lectures liées à l'incertitude (bruit blanc) ce qui également important pour les séries non linéaires c'est la stationnarité et comment la modifier, en particulier lorsque les chaînes sont y_t non stationnaire.

Lorsque y_t est vectorielle avec k composantes, nous utilisons le modèle VAR pour simplifier les équations et traiter la stationnarité à l'aide des matrices et des polynômes liés au modèle. Toutes ces étapes que nous avons mentionnées sont importantes pour aborder les séries non linéaires. qui est représentées par différents modèles tels que ARCH, GARCH et le modèle bilinéaire... pour une meilleur prédiction. Ce sont des modèles modernes qui sont en accord avec les exigences de l'époque et les fluctuations physiques, climatiques et environnementales...

traduction

Based on the required research on nonlinear time series, we defined time series and gave a brief history with examples showing the importance of these chains in predictions and future events. These AR ARMA ARIMA models... What determines the linearity of the series and the readings related to uncertainty (white noise) what is also important for nonlinear series is stationarity and how to modify it, especially when the channels are y_t non-stationary.

When y_t is vector with k components, we use the VAR model to simplify equations and process stationarity using matrixes and des polynomials linked to the model. All these steps that we have mentioned are important to approach nonlinear series. which is represented by different models such as ARCH, GARCH and the bilinear model... for a better prediction. These are modern models that are in line with the requirements of the time and the physical, climatic and environmental fluctuations.>

Références

- 1) Aragon, Y. Séries temporelles avec R. Méthodes et cas., Springer, Paris, 2011
- 2) Time Series Analysis and Its Applications .With R Examples
Robert H. Shumway .David S. Stoffer
- 3) COURS DE SERIES TEMPORELLES THEORIE ET APPLICATIONS
ARTHUR CHARPENTIER
- 4) Introduction to Econometrics with R.
Christoph Hanck, Martin Arnold, Alexander Gerber, and Martin Schmelzer
- 5) internet.