



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Centre universitaire Salhi Ahmed -Naàma
Institut des Sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour obtenir le diplôme de
Master En Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Filière : Mathématiques

Thème

Transformée de Fourier rapide

Présenté par :

Brahimi Nour Djihan

Devant le jury composé de :

M^r. Kenouza Jamel

M^r. Mekki Slimane

M^{lle}. Moussaoui Fatma

Pr. C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-

Pr. C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-

Pr. C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-

Encadreur

Président

Examinatrice

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Louange à Dieu qui ma donné la force, le courage, et l'espoir nécessaire pour accomplir ce travail et surmonter l'ensemble des difficultés.

J'exprime d'abord ma gratitude, mes remerciements à **mes chers parents** qui ont fait leur mieux pour m'aider. Je tiens aussi à remercier vivement, Mon encadreur Professeur "**Mr. Kenouza Jamel**" pour ces conseils et son suivi durant la réalisation de mon projet, et à "**Mr. Mekki Slimane**" qui m'a aidé pour le succès de ce travail, et un merci spécial aux professeurs "**Moussaoui Fatma**" et "**Mekki Slimane**" ce qui étaient bien voulu faire partie du jury.

Aussi je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes que j'ai apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Sans oublier de remercier le corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences et Technologies des Maths et Informatiques, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Enfin, mes pensées vont à mes frères , mes soeur, mes amies, mes enseignants et mes collègues qui m'ont toujours soutenu et encouragé le long de ce travail.

DEDICACE

Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de **mes chers parents** qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui. Que dieux vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur.

Je dédie aussi ce travail à :

- ♡- Mes grands-parents .
- ♡- Mes frères et mes soeurs .
- ♡- Mes chères amies .
- ♡- Mes collègues et tous ceux qui m'estiment.

Table des matières

Table des figures	1
Liste des tableaux	2
Introduction	3
1 Généralités	5
1.1 Historique	5
1.2 Applications	9
1.3 Transformée de Fourier	10
1.4 Remarques	10
2 Séries de Fourier	12
2.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier	12
2.1.1 Coefficients de Fourier	13
2.2 Ecriture complexe des séries de Fourier	18
2.2.1 Relations entre les trois représentations de Fourier	19
2.2.2 les coefficients de Fourier pour les trois cas	20
2.3 Théorèmes fondamentaux	20
2.3.1 Théorème de Dirichlet	20
2.3.2 Théorème de convergence normale	21
2.3.3 Formule de Parseval	21
3 la transformée de Fourier rapide "Fast Fourier transform FFT"	22
3.1 Transformée de Fourier Discrète	22
3.1.1 Définition de la transformée de Fourier Discrète	23
3.1.2 Inversion de la transformée de Fourier Discrète	23
3.2 Transformée de Fourier Rapide	24
3.2.1 FFT avec entrelacement temporel	25
3.2.2 FFT avec entrelacement fréquentiel	29
3.2.3 Algorithme de Cooley-Tukey	32
Application numérique	36

Conclusion	51
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	52

Table des figures

2.1	Relations entre les trois représentations de Fourier	19
3.1	Forme graphique de "papillons "	37
3.2	Forme graphique de "papillons "2	41
3.3	Forme graphique de "papillons "3	43
3.4	Forme graphique de "papillons "4	44
3.5	L'amplitude et la phase	47
3.6	Organigramme	48
3.7	Programme calcul FFT en Pascal	50

Liste des tableaux

2.1	Tableau représente les coefficients de Fourier pour les trois cas	20
3.1	Classification transformées de Fourier	22
3.2	Bit reversal (pour N=4)	34
3.3	Bit reversal (pour N=8)	35

Introduction générale

Le traitement de signal a pour principal objectif la description des signaux liés au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission. Dans ce contexte, les transformations linéaires ont toujours joué un très grand rôle, et parmi ces dernières, la plus célèbre et la plus anciennement étudiée est la transformation de Fourier(1822).

Cette transformation permet d'explorer la composition fréquentielle du signal et par ses propriétés de lui appliquer facilement des opérateurs de filtrage. Lors de cette transformation, le signal est décomposé sur un ensemble de signaux "base" qui sont les cosinus et les sinus ou l'exponentielle imaginaire, mais, très tôt dans l'histoire du traitement de signal, il est apparu que la décomposition obtenue n'est pas toujours satisfaisante .

La transformée de Fourier est parmi les méthodes les plus robustes pour le traitement des signaux en régime stationnaire. Ses dérivées discrète (TFD) et rapide (TFR) comptent parmi les outils fondamentaux pour le calcul des caractéristiques spectrales des signaux et utilisent des programmes efficaces moyennant les systèmes numériques.

Dans cet étude on a concentré sur la transformée de Fourier rapide qui est appelée FFT (Fast Fourier Transform en anglais), est un algorithme qui permet de calculer des Transformées de Fourier Discrètes DFT (Discrete Fourier Transform en anglais).

Parce que la DFT permet de déterminer la pondération entre différentes fréquences discrètes, elle a un grand nombre d'applications en traitement du signal, par exemple pour du filtrage. Par conséquent, les données discrètes qu'elle prend en entrée sont souvent appelées signal et dans ce cas on considère qu'elles sont définies dans le domaine temporel. Les valeurs de sortie sont alors appelées les spectres et sont définies dans le domaine des fréquences. Toutefois, ce n'est pas toujours le cas et cela dépend des données à traiter.

Ce mémoire composée de trois chapitres substitue le support théorique de la FFT.

Le 1er chapitre de notre travail a permis de donner une idée sur l'historique de la transformée de Fourier rapide FFT et une petite définition du **Joseph Fourier** et quelques remarques sur la transformée de Fourier.

Le 2ème chapitre a été consacré à les séries de Fourier et établir quelques de ses propriétés.

Le 3ème chapitre a été consacré à la transformée de Fourier discrète DFT et la transformée de Fourier Rapide FFT et l'algorithme de Cooley-Tukey.

1.1 Historique

Au tout début du dix-neuvième siècle, J. Fourier, éloigné de Paris et du monde scientifique, occupait une partie des quelques loisirs que lui laissait sa fonction de préfet (très actif) de l'Isère, à la résolution des équations de propagation de la chaleur dans un solide. Afin d'en faciliter l'étude, il représentait la fonction cherchée comme une somme de sinusoides, dont la dérivation donne une fonction du même type. Il trouva aussi la formule permettant de calculer l'amplitude de chacune des sinusoides dans cette décomposition : la projection sur une base de fonctions orthogonales.

À la même époque et indépendamment (mais ses écrits sur ce sujet ne furent publiés que bien plus tard), C. F. Gauss étudiait les trajectoires des corps célestes. Pour interpoler leurs fonctions entre les instants d'observation, il utilisait les fonctions périodiques et leur décomposition en harmoniques ; pour accélérer les calculs, il inventa l'algorithme rapide redécouvert cent cinquante ans plus tard par Cooley et Tukey.

Ensuite, l'analyse des systèmes linéaires représentés par des équations différentielles et le développement de la transmission d'information par ondes herziennes nécessitèrent la formulation mathématique du filtrage et de la modulation des fonctions temporelles, de l'échantillonnage, etc. La compréhension de ces techniques passait par l'utilisation de la décomposition en sinusoides, la transformée de Fourier.

Au début de la deuxième moitié du vingtième siècle, le développement des calculateurs numériques et du traitement numérique du signal amena à la redécouverte de la transformée de Fourier rapide. En quelques dizaines d'années, elle est devenue d'usage courant dans une multitude d'applications à destination du grand public (JPEG, MPEG, MP3, télévision numérique, techniques de correction d'erreurs en enregistrement et transmission numérique par exemple) ou dans des domaines socio-économiques de grande importance comme l'imagerie médicale, l'astronomie, l'analyse des molécules et des cristaux, etc.

Aux origines du traitement du signal, on peut voir en **Joseph Fourier (1768-1830)** un précurseur. Pour établir les équations de la propagation de la chaleur, il mit au point une méthode mathématique nouvelle qui remplaça la description d'un signal dans le temps ou l'espace par celle de ses fréquences constitutives : la « **transformation de Fourier** ». Le scientifique a clairement formulé l'ambition de son programme dans son mémoire fondateur :

« Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux . La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions ; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche , et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles ».

En quelques mots, tout est dit sur la nécessité d'associer modèles physiques, méthodes mathématiques et algorithmes efficaces.

Fourier avait le souci des applications numériques mais les moyens du XIXe siècle étaient limités à cet égard et la transformation qu'il avait imaginée, qui a été et est encore centrale dans toute analyse de données, a vu son impact démultiplié en 1965 lorsque **John Tukey** en proposèrent un algorithme de calcul rapide (dit de **FFT** , pour **Fast Fourier Transform**). Parachevant la vision de Fourier, on peut considérer que cette année 1965 marque la vraie date de

naissance du traitement (numérique) du signal.

Si l'on remonte quelques années en arrière, c'est autour de la deuxième guerre mondiale que le traitement du signal a commencé à se développer, d'abord et essentiellement pour des besoins militaires liés à l'utilisation du sonar et du radar. L'immédiat après-guerre a vu l'éclosion d'approches nouvelles visant à donner des cadres théoriques à des notions, intuitives, mais alors encore vagues, comme celles de message, de signal, de bruit, de transmission, de contrôle. En quelques années apparurent la théorie de la communication de Dennis Gabor, la cybernétique de Norbert Wiener et, bien sûr, la théorie de l'information de Claude E. Shannon.

En parallèle, le physicien et mathématicien français André Blanc-Lapierre mit au point une « théorie des fonctions aléatoires » afin de pouvoir modéliser et analyser le « bruit de fond » rencontré en acoustique sous-marine. De cette collaboration entre l'université et la Marine nationale naquit l'association GRETSI qui, en 1967, organisa en France le tout premier congrès au monde dédié à la discipline nouvelle du traitement du signal. Celui-ci inaugura une série ininterrompue de rencontres biennales, jusqu'à celle de cette année. Le colloque a fêté son cinquantième anniversaire début septembre à Juan-les-Pins, signe d'une École française qui a toujours été florissante.

Joseph Fourier

(21 mars 1768 à Auxerre - 16 mai 1830 à Paris) est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier. Il a été instruit par les Bénédictins à l'école militaire d'Auxerre. Il était destiné à l'état monastique, mais il préféra s'adonner aux sciences. Il a participé à la révolution française, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur, il a été sauvé de justesse par la chute de Robespierre. Il intègre l'Ecole Normale Supérieure, où il aura comme professeur entre autres Joseph-Louis Lagrange. Fourier est connu pour sa théorie analytique de la chaleur (1822). C'est à Grenoble qu'il conduit ses expériences sur la propagation de la chaleur qui lui permettront de modéliser l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques. Ces travaux qui apportent une grande amélioration à la modélisation mathématique de phénomènes ont contribué aux fondements de la thermodynamique.

1.2 Applications

Aujourd'hui le traitement du signal largement dépassé le cadre de ses premières applications, investissant progressivement des champs de plus en plus nombreux de la science et de la technologie. Signe de son importance, la société savante mondiale la plus importante du domaine, l'IEEE Signal Processing Society, n'hésite pas à définir son objet comme « the science behind our digital life ».

Comme cela a été remarqué précédemment avec la **FFT**, il faut bien comprendre que c'est le développement prodigieux des moyens de calcul depuis les années 1960 qui a été un levier essentiel pour le traitement du signal. La puissance des ordinateurs a permis de mettre en oeuvre, souvent en temps réel, des solutions de plus en plus complexes.

Sans que l'on en soit nécessairement conscient, le traitement du signal est présent dans notre vie de tous les jours, en même temps qu'au coeur d'avancées scientifiques fondamentales. Un smartphone est par exemple un concentré de traitement du signal, assurant toutes sortes de fonctions grâce auxquelles on peut communiquer, échanger ou stocker de la voix, de la musique, des photos ou des vidéos (des formats grand public comme MP3, JPEG, MPEG, etc., sont de purs produits du traitement du signal).

Le champ de la santé offre de nombreux autres exemples d'applications pour lesquels se déploient des méthodes d'analyse de signaux, d'images ou de séquences sous différentes modalités, que ce soit pour le suivi du rythme cardiaque, la localisation de foyers épileptiques dans le cerveau, l'échographie ou l'imagerie par résonance magnétique. De même dans de grands secteurs comme l'énergie ou les transports, où la prolifération de capteurs et la nécessité de traiter l'information qu'ils collectent placent le traitement du signal au

centre d'enjeux globaux comme les smart grids ou les villes intelligentes.

1.3 Transformée de Fourier

Nous avons vu que les signaux périodiques pouvaient être représentés en fréquence à partir de leur décomposition en série de Fourier. La transformée de Fourier peut se généraliser à des signaux non-périodiques.

Définition 1.3.1. [6] Soit $x(t)$ un signal quelconque, on note $X(f)$ ou $TF(x(t))$ sa transformée de Fourier telle que :

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

Inversement, on peut définir une transformée de Fourier inverse TF^{-1} telle que :

$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df$$

$X(f)$ est une fonction complexe même si $x(t)$ est réel. La transformée de Fourier contient donc une partie réelle et une partie imaginaire et est représentée facilement grâce à son **module** et à son **argument** : $|X(f)|$ est appelé **spectre d'amplitude** et $\arg(X(f))$ le **spectre de phase** du signal. La variable f s'appelle la fréquence dont l'unité est le Hertz (en abrégé : **Hz**).

1.4 Remarques

-La représentation complète d'une transformée de Fourier nécessite 2 graphiques : le module et la phase, ou bien la partie réelle et le partie imaginaire.

- Pour représenter les transformées de Fourier de signaux, il est communément utilisé l'échelle logarithmique. Pour un signal acoustique,

par exemple, on calcule $20 \log(|X(f)|/2.10^{-5})$ et $\arg(X(f))$.

Ainsi, la transformée de Fourier est un opérateur mathématique qui permet d'analyser et de représenter un signal dans le domaine fréquentiel.

La TF ne modifie pas le signal mais permet seulement de l'observer selon différents points de vue (temporel ou fréquentiel).

Il est important de retenir que $x(t)$ et $X(f)$ sont deux descriptions équivalentes du même signal. Ces deux fonctions contiennent la même information il s'agit juste de deux descriptions dans des domaines différents.

$X(f)$ apporte des informations sur le système physique à l'origine du signal.

Elle permet par exemple de différencier un son de trompette d'un son trombone, ou bien encore différentes ondes cérébrales,

plus facilement qu'en observant le signal dans le domaine temporel. Le **contenu spectral** d'un signal est en effet assimilable à sa « carte d'identité». [6]

Séries de Fourier

On commence par quelques définitions utiles pour détailler les séries de Fourier et leurs applications.

2.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier

Définition 2.1.1. [7] On appelle série trigonométrique, une série de la forme

$$S(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots$$

On sous forme plus compacte :

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad , x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Les constantes a_0, a_k, b_k ($k=1,2,3,\dots$) sont des coefficients de la série, si la série converge, sa somme est une fonction périodique $x(t)$ de période T .

Etant donné que $\sin kt$ et $\cos kt$ sont des fonctions de sorte que $x(t+T) = x(t)$ Si la série converge vers $x(t)$ périodique de période T et $x(t)$ continue par morceau sur l'intervalle $[0,T]$. On note (2.1) **série de Fourier**.

On peut changer la variable t par $2\pi ft$

On considère un signal périodique $x(t)$ de période T . $T = \frac{1}{f}$ sur développement un série de Fourier et alors :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(2\pi kft) + b_k \sin(2\pi kft)] \quad (2.2)$$

$f_0 = \frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale, a_0 est la valeur moyen
 a_0, a_k, b_k les coefficients de Fourier.

Proposition 2.1.1. [7] *Si les séries numériques $\sum |a_k|$ et $\sum |b_k|$ convergent absolument, alors la série trigonométrique (2.1) converge normalement dans \mathbb{R} . En outre, la somme de la série est une fonction continue sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .*

Démonstration

Notons que

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par hypothèse, les séries numériques $\sum |a_k|$ et $\sum |b_k|$ convergent, donc la série $\sum (|a_k| + |b_k|)$ converge aussi et d'après **le critère de Weierstrass** la série (2.1) converge normalement dans \mathbb{R} .

En outre, comme $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ est continue sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on déduit du théorème de continuité que la somme de la série (2.1) est continue sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1.1 Coefficients de Fourier

Définition 2.1.2. [7] Soit f une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Les nombres a_k et b_k définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \geq 0, \quad (2.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 1,$$

s'appellent **coefficients de Fourier** de f et la série trigonométrique

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2.4)$$

est dite série de Fourier de f .

Remarque 2.1.1. [7] On écrit

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

pour dire que la série (2.4) est la série de Fourier associée à la fonction f . Le fait que les intégrales (2.3) existent, n'impliquent pas que la série (2.4) converge et, même si elle converge, sa somme n'est pas nécessairement égale à la fonction $f(x)$.

Remarque 2.1.2. [7] Au lieu de considérer l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on peut considérer tout autre intervalle d'amplitude 2π , par exemple $[0, 2\pi]$.

Propriété 2.1.1. [7] Pour une fonction f , $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[-L, L]$ d'amplitude quelconque finie, la série de Fourier associée à la fonction f est donnée par

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

où

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, & k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, & k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Démonstration

En effet, on a $-L \leq x \leq L$ d'où $-\pi \leq \frac{\pi x}{L} \leq \pi$, ce qui suggère le changement de variable suivant :

$t = \frac{\pi x}{L}$, c'est-à-dire $x = \frac{Lt}{\pi}$ et $dt = \frac{\pi}{L} dx$. Posons

$$f(x) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \equiv g(t).$$

La fonction g étant 2π -périodique, sa série de Fourier s'écrit

$$g(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

où

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ktdt, \quad k \geq 0, \quad (2.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ktdt, \quad k \geq 1,$$

Alors,

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

où

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos ktdt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0, \quad (2.7)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ktdt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.1.3. [7] Soit f une fonction $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[-L, L]$. Au lieu de développer $f(x)$ en série de Fourier sur $[-L, L]$, on peut la développer, moyennant le changement de variable $t = \frac{\pi x}{L}$, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Propriété 2.1.2. [7] Pour une fonction f , $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[\alpha, \alpha + 2L]$ où α est une constante arbitraire, on a

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) dx$$

Démonstration

En effet, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) dx = \int_{\alpha}^{-L} f(x) dx + \int_{-L}^L f(x) dx + \int_L^{\alpha+2L} f(x) dx$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx &= \int_{-L}^{\alpha} f(t+2L)dt, \quad t = x - 2L \\ &= \int_{\alpha}^{-L} f(t)dt \quad \text{car } f \text{ est } 2\pi - \text{périodique} \\ &= - \int_{\alpha}^{-L} f(x)dx \end{aligned}$$

d'où le résultat. D'après la propriété précédente, on peut donc remplacer l'intervalle $[-L, L]$ par $[\alpha, \alpha + 2L]$ et les coefficients de Fourier deviennent :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Propriété 2.1.3. [7] *Si f est paire, alors*

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = 0,$$

et

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \quad (\text{série cosinus}).$$

Si f est impaire, alors

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

et

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (\text{série sinus}).$$

Démonstration

En effet, la preuve résulte immédiatement du fait que si f est paire (resp. impaire), alors $f(x) \cos kx$ est paire (resp. impaire) et $f(x) \sin kx$ est impaire (resp. paire).

Remarque 2.1.4. Soit f une fonction $2L$ -périodique, définie sur l'intervalle $[0, L]$. On peut lui faire correspondre soit une fonction paire, soit une fonction impaire, définie sur $[-L, L]$. On procède comme suit :

On prolonge $f(x)$ sur $[-L, 0]$ de telle façon qu'on ait pour $x \in [-L, 0]$, $f(x) = f(-x)$ ou $f(x) = -f(-x)$.

Dans le premier cas, la fonction f sera paire sur $[-L, L]$, d'où

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos kx dx \quad \text{et} \quad b_k = 0.$$

Dans le second cas, f sera impaire sur $[-L, L]$, d'où

$$a_k = 0 \quad \text{et} \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin kx dx.$$

Exemple 2.1.1. Considérons sur $[-\pi, \pi]$, la fonction $f(x) = x$. Cette fonction étant impaire, on a

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx dx = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Par conséquent, la série de Fourier associée à f est

$$f(x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Exemple 2.1.2. Considérons sur $[-\pi, \pi]$, la fonction $f(x) = x^2$. Cette fonction étant paire, on a

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2(\pi)^2}{3}.$$

et

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos kx dx = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'où,

$$f(x) \sim \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

2.2 Ecriture complexe des séries de Fourier

Définition 2.2.1. [7] En notation complexe, la série de Fourier d'une fonction 2π – périodique f s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration

En effet, on a

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \right), \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikx} \right) \end{aligned}$$

On Pose $c_0 = a_0$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$. D'où

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}), \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exprimons c_k et c_{-k} au moyen d'intégrales. On a

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx.$$

Finalement,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.2.1. On déduit de ce qui précède que si f est $2L$ -périodique, sa série de Fourier s'écrit en notation complexe sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{L}x},$$

où

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L}x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.2.1 Relations entre les trois représentations de Fourier

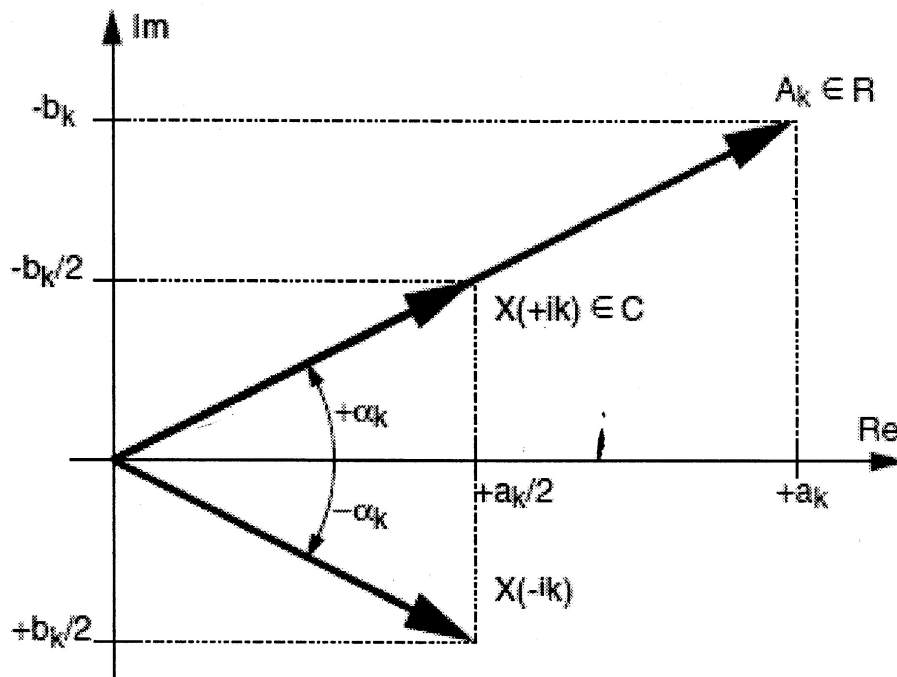


FIGURE 2.1 – Relations entre les trois représentations de Fourier

2.2.2 les coefficients de Fourier pour les trois cas

Le tableau suivant représente les coefficients de Fourier pour les trois cas :

$n=0$	$\frac{a_0}{2}$	A_0	C_0
$n > 0$	(a_n, b_n)	A_n	$C_n, -\infty < n < +\infty$
a_n	a_n	$+A_n \cos(\alpha_n)$	$+2\operatorname{Re}[C_n]$
b_n	b_n	$-A_n \sin(\alpha_n)$	$-2\operatorname{Im}[C_n]$
A_n	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	A_n	$2 C_n $
α_n	$\operatorname{artg} \frac{-b_n}{a_n}$	α_n	$\operatorname{artg} \left[\frac{\operatorname{Im}(C_{+n})}{\operatorname{Re}(C_{-n})} \right]$
C_n	$\frac{1}{2}(a_n - ib_n)$	$\frac{1}{2}A_n e^{-i\alpha_n}$	C_n
C_{-n}	$\frac{1}{2}(a_n + ib_n)$	$\frac{1}{2}A_n e^{-i\alpha_n}$	C_{-n}

TABLE 2.1 – Tableau représente les coefficients de Fourier pour les trois cas

2.3 Théorèmes fondamentaux

2.3.1 Théorème de Dirichlet

Théorème 1. [1] soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π – périodique et de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge **simplement** sur \mathbb{R} . En chaque point $x \in \mathbb{R}$, la somme de la série de Fourier de f est égale à la demi-somme des limites à gauche et à droite de f .

En particulier si f est continue au point $x \in \mathbb{R}$, alors la somme de la série de Fourier de f au point x est égale à $f(x)$.

2.3.2 Théorème de convergence normale

Théorème 2. [1] soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π – périodique , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, et continue sur \mathbb{R} . Alors la série de Fourier de f converge **normalement** sur \mathbb{R} , et sa somme est égale à f .

2.3.3 Formule de Parseval

Théorème 3. [10] soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π – périodique continue par morceaux. Alors les séries numériques $\sum |c_n|^2$, $\sum |c_{-n}|^2$, $\sum |a_n|^2$ et $\sum |b_n|^2$ sont convergentes et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2), \\ &= \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \end{aligned}$$

- f et g deux fonctions continues et 2π – périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.

la transformée de Fourier rapide

"Fast Fourier transform FFT"

3.1 Transformée de Fourier Discrète

[3] Selon le type des signaux à transformer, différents types de transformées de Fourier sont définis :

	Non périodique	Périodique
Continue	Transformée de Fourier	Série de Fourier
Discret	DTFT (discrete time Fourier transform)	DFT(Discrete Fourier transform)

TABLE 3.1 – Classification transformées de Fourier

Pour un signal discret et périodique la transformée correspondante porte le nom de transformée de Fourier discrète (on utilise habituellement l'abréviation anglaise DFT pour "Discrete Fourier Transform").

3.1.1 Définition de la transformée de Fourier Discrète

Définition 3.1.1. [2] On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$, définis par

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné : $x_n = x(nT_e)$, et les N termes $X(k)$ correspondre à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = kf_e/N$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est à dire f entre 0 et f_e .

3.1.2 Inversion de la transformée de Fourier Discrète

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

En effet, calculons :[2]

$$A = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} \right)$$

$$\text{si } i \neq n \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} = \frac{1 - e^{i2\pi(n-i)}}{1 - e^{i2\pi \frac{n-i}{N}}} = 0$$

$$\text{si } i = n \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} \right) = \frac{1}{N} x(n) N$$

$$A = x(n) \text{c.q.f.d.}$$

3.2 Transformée de Fourier Rapide

Définition 3.2.1. La Transformée de Fourier Rapide (notée par la suite FFT) est simplement une transformée de Fourier Discrète calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations et, en particulier, le nombre de multiplications à effectuer. Il faut noter cependant, que la réduction du nombre d'opérations arithmétiques à effectuer, n'est pas synonyme de réduction du temps d'exécution. Tout dépend de l'architecture du processeur qui exécute le traitement. Pour calculer une transformée de Fourier Discrète , on doit calculer N valeurs X(k) :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

et ceci pour $k \in [0, N - 1]$. Si on effectue le calcul directement sans algorithme efficace, on doit effectuer :

$$\begin{cases} N^2 & \text{multiplications complexes} \\ N(N-1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

Il existe différents algorithmes de FFT. Le plus connu est sûrement celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel ou à « decimation in time ») qui réduit à

$$\frac{N}{2} \log_2(N) \quad \text{le nombre de multiplications.}$$

Il existe deux versions de l'algorithme :

- FFT avec entrelacement temporel,
- FFT avec entrelacement fréquentiel.

L'algorithme nécessite que N soit une puissance de 2. Le principe de l'algorithme consiste à décomposer le calcul de la transformée de Fourier Discrète d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives.[2]

3.2.1 FFT avec entrelacement temporel

Illustrons tout d'abord la méthode par un exemple pour $N = 4$. Les données sont notées $x(n)$ et la suite TFD $X(n)$.

La notation w représente $e^{-j2\pi/N}$, c'est-à-dire $e^{-j2\pi/4}$. On peut remarquer que $w^N = 1$ et $w^{N/2} = -1$. Pour $N = 4$, $w^4 = 1$ et $w^2 = -1$. la suite TFD s'écrit :

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3)) \\ X(1) &= x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + w^1(x(1) - x(3)) \\ X(2) &= x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\ X(3) &= x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - w^1(x(1) - x(3)) \end{aligned}$$

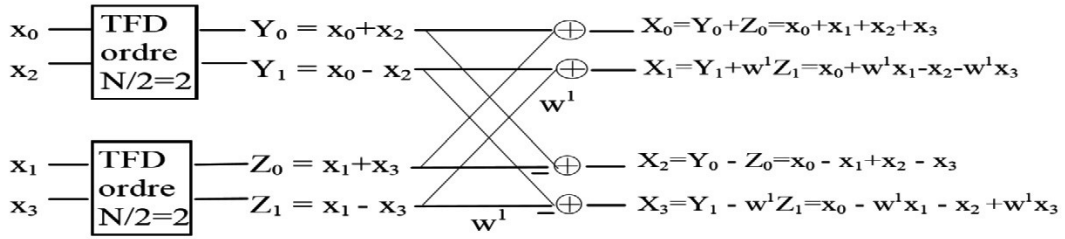
Les données $(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$ sont regroupées en 2 paquets :

un paquet formé des données d'indices pairs $(x(0), x(2), \dots, x(N-2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(x(1), x(3), \dots, x(N-1))$.

Soit pour $N = 4$, un paquet $(x(0), x(2))$ et un paquet $(x(1), x(3))$.

Puis sur chaque paquet on effectue une DFT d'ordre $N/2$ et on combine les résultats de ces 2 DFT pour obtenir celle d'ordre N .

Ce qui donne, toujours pour $N = 4$:



Pour obtenir les 4 valeurs $X(k)$, il suffit donc de calculer 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$ et de combiner les résultats 2 à 2 à l'aide d'une addition et d'une multiplication au maximum, pour chaque valeur $X(k)$. Cette étape est appelée étage de «**papillons**», pour des raisons évidentes liées à la forme du schéma de calcul.

Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet :

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) e^{-j2\pi \frac{2ik}{N}} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) e^{-j2\pi \frac{2(i+1)k}{N}}$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}}$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}}$$

On note $y(i)=x(2i)$ et $z(i)=x(2i+1)$, pour $i \in [0, (N/2 - 1)]$. On remarque que les 2 termes de la somme donnant $X(k)$ se déduisent directement des 2 TFD d'ordre $N/2$ des suites $y(i)$ et $z(i)$ de $N/2$ points. On note ces TFD $Y(k)$ et $Z(k)$.

Ainsi pour $k \leq N/2 - 1$, les 2 termes de la somme se déduisent des termes de rang k de $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} = Y(k) + w^k Z(k)$$

Pour $k \in [N/2, (N - 1)]$, on peut écrire $k = k' + N/2$, avec $k' \in [0, (N/2 - 1)]$. De plus, comme quelque soit i entier $e^{-j2\pi i} = 1$, on peut déduire $X(k)$ des termes de

rang $k-N/2$ des 2 TFD $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{i(k+N/2)}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{i(k+N/2)}{N/2}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ik}{N/2}}
 \end{aligned}$$

$$X(k) = Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2)$$

En conclusion, pour tout N multiple de 2, on peut calculer chaque terme $X(k)$ de la TFD d'ordre N en combinant, à l'aide d'au plus 1 multiplication et 1 addition, 2 termes des TFD d'ordre $N/2$ des 2 suites $y(i)$ et $z(i)$ de longueur $N/2$, formées respectivement des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs de la suite $x(n)$.

En notant $Y(k)$ et $Z(k)$ les TFD d'ordre $N/2$ de ces suites on peut écrire :

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] \quad X(k) = Y(k) + w^k Z(k)$$

$$\text{Pour } k \in \left[\frac{N}{2}, N - 1\right] \quad X(k) = Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2)$$

On appelle « papillon », l'étape de calcul consistant à calculer 2 points de la transformée de Fourier Discrète d'indices distants de $N/2$, par exemple $X(k)$ et $X(k+N/2)$ avec $k \in [0, N/2 - 1]$. Le calcul de ce couple de valeurs de la TFD d'ordre N utilise le couple de valeurs $Y(k)$ et $Z(k)$ des transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/2$:

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] \quad \begin{cases} X(k) = Y(k) + w^k Z(k) \\ X(k + N/2) = Y_k + w^{k+N/2} Z(k) = Y(k) - w^k Z(k) \end{cases}$$

Chaque papillon nécessite 1 multiplication et 2 additions ou soustractions.

Ainsi toute transformée de Fourier Discrète d'ordre N multiple de 2, peut se calculer à l'aide de 2 transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/2$ et d'un étage de $N/2$ papillons.

La complexité de calcul, pour la transformée de Fourier Discrète d'ordre N est donc égale à celle de 2 transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/2$ plus celle de $N/2$ papillons. Si on suppose que les transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/2$ sont calculées directement (sans algorithmes efficace), on peut dire que :

Le calcul d'une transformée de Fourier Discrète d'ordre N pair, avec cet algorithme, demande :

$$\text{Le calcul de 2 TFD d'ordre } N/2 : \begin{cases} 2(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2} & \text{multiplications complexes} \\ 2\frac{N}{2}(\frac{N}{2} - 1) = N(\frac{N}{2} - 1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

$$\text{Le calcul de } N/2 \text{ papillons} : \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{multiplications complexes} \\ N & \text{additions/soustractions} \end{cases}$$

Soit un total de

$$\begin{cases} \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} & \text{multiplications complexes} \\ \frac{N^2}{2} & \text{additions complexes} \end{cases}$$

au lieu de :

$$\begin{cases} N^2 & \text{multiplications complexes} \\ N(N - 1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

pour le calcul direct.

Ainsi pour $N = 4$, on a besoin de 10 multiplications et de 8 additions/soustractions complexes au lieu de 16 multiplications et de 12 additions/soustractions complexes.

Si $N/2$ est un multiple de 2, on peut réitérer la méthode pour le calcul des 2 transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/2$. Chaque transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/2$ est alors calculée à l'aide de 2 transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/4$ et de $N/4$ papillons, ce qui donne au total 4 transformée de Fourier Discrète d'ordre $N/4$ plus 2 étages de $N/2$ papillons.

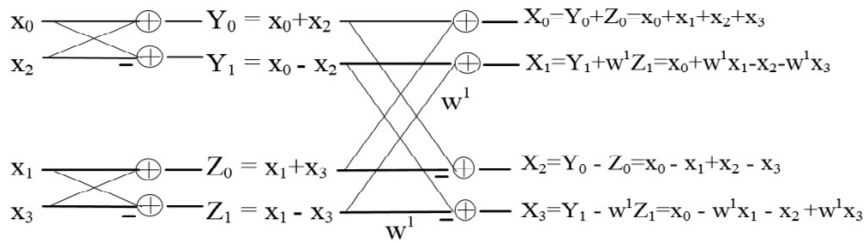
D'une manière plus générale si N est une puissance de 2, $N = 2^l$, on peut réitérer la méthode l fois et calculer la transformée de Fourier Discrète d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons, avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une transformée de Fourier Discrète d'ordre N devient alors celle de l étages de $N/2$ papillons, soit :

$$\begin{cases} l\frac{N}{2} = \log_2(N)\frac{N}{2} & \text{multiplications complexes} \\ lN = \log_2(N)N & \text{additions complexes} \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de FFT avec entrelacement temporel (base 2) de **Cooley-Tukey**.

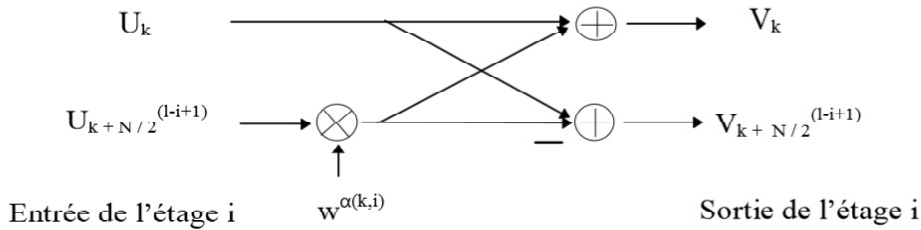
Ainsi pour $N = 1024 = 2^{10}$, le calcul direct demande : 1024×1024 multiplications et 1024×1023 additions, alors que le calcul avec l'algorithme de FFT demande : 10×512 multiplications et 10×1024 additions. Dans ce cas, l'algorithme divise environ par 200 le nombre d'opérations à effectuer. L'efficacité de la FFT augmente avec N .

Pour $N = 4$, le schéma complet de l'algorithme est le suivant :



On remarque sur ce schéma que les données $x(n)$ en entrée sont désordonnées, alors que celles de sortie $X(k)$ sont dans l'ordre naturel. De ce fait cet algorithme de FFT s'appelle FFT avec entrelacement temporel. On verra par la suite qu'il existe un algorithme symétrique appelé FFT avec entrelacement fréquentiel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement temporel, un papillon élémentaire, à l'étage i (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante :



A l'étape i , les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_i , N_i étant la taille des DFT intervenant à l'étape i , c'est à dire $N_i = 2^{i-1} = 2^l / 2^{(l-i+1)} = N / 2^{(l-i+1)}$. Le terme $w^{\alpha(i,k)}$ vaut :

$$w^{\alpha(i,k)} = e^{-ij2\pi \frac{k}{2N_i}} = e^{-ij2\pi \frac{k}{N} \frac{N}{2^i}} = w^{k2^{l-i}}$$

3.2.2 FFT avec entrelacement fréquentiel

Cet algorithme est symétrique du précédent. Les données temporelles $x(n)$ restent dans l'ordre naturel, mais les résultats $X(k)$ sont désordonnés.

Le principe consiste encore à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives. Mais le regroupement de données se fait différemment.

Illustrons la méthode par un exemple pour $N = 4$.

Les données fréquentielles $(X(0), X(1), \dots, X(N-1))$ sont regroupées en 2 paquets : un paquet formé des données d'indices pairs $(X(0), X(2), \dots, X(N-2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(X(1), X(3), \dots, X(N-1))$.

Soit pour $N=4$, un paquet $(X(0), X(2))$ et un paquet $(X(1), X(3))$.

Pour $N = 4$, on peut écrire :

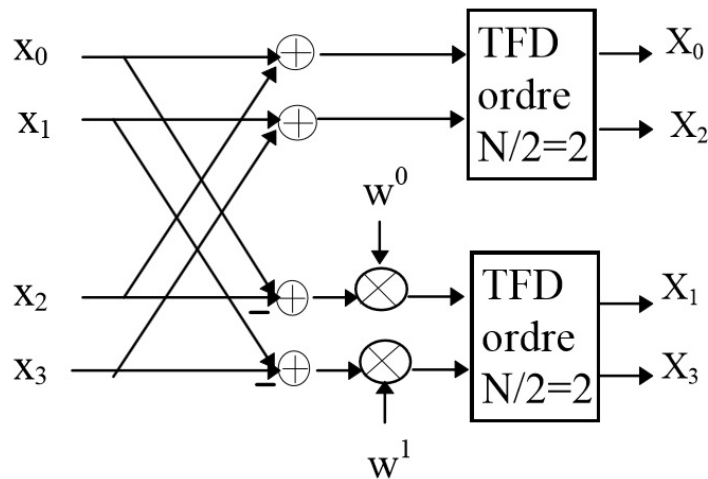
$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3))$$

$$X(2) = x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3))$$

$$X(1) = x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + [w^1(x(1) - x(3))]$$

$$X(3) = x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - [w^1(x(1) - x(3))]$$

Pour obtenir chaque paquet de résultats fréquentiels, on effectue une DFT d'ordre $N/2$ sur des données résultant d'une étape de papillons sur les données $x(n)$.



On a donc un étage de 2 papillons suivi d'un étage de 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$. Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$X(2i) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n2i}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n2i}{N}}$$

$$X(2i) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m + N/2)e^{-j2\pi \frac{mi}{N/2}}$$

$$X(2i) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) + x(n + N/2))e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}}$$

Ainsi les $N/2$ termes $X(k)$ de rang pair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $(x(n) + x(n + N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$. De même

pour les termes $X(k)$ de rang impair :

$$X(k) = \sum_n x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$X(2i + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n(2i+1)}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n(2i+1)}{N}}$$

$$X(2i + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n}{N}} e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m + N/2)e^{-j2\pi \frac{m}{N}} e^{-j2\pi \frac{mi}{N/2}}$$

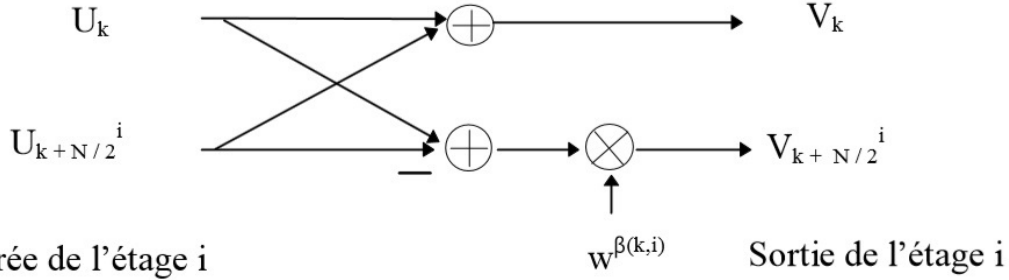
$$X(2i + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} w^n (x(n) - x(n + N/2))e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}}$$

les $N/2$ termes $X(k)$ de rang impair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $w^n (x(n) - x(n + N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

D'une manière générale si N est une puissance de 2 : $N = 2^l$, on peut réitérer la méthode 1 fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de 1 étage de $N/2$ papillons., avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une FFT avec entrelacement

fréquentiel est identique à celle de la FFT avec entrelacement temporel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement fréquentiel, un papillon élémentaire, à l'étage i (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante :



A l'étage i , Les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_i , N_i étant la taille des DFT intervenant à l'étage i , c'est à dire $N_i = N/2^i$. Et le terme $w^{\beta(i,k)}$ vaut :

$$w^{\beta(i,k)} = e^{-j2\pi \frac{k}{2N_i}} = e^{-j2\pi \frac{k2^i}{2N}} = w^{k2^{i-1}}$$

3.2.3 Algorithme de Cooley-Tukey

Le calcul de la suite F_k nécessite à priori n^2 multiplication complexe . [3] Mais la transformée de Fourier discrète de la suite f_j dont le nombre d'élément peut être calculé en fonction de la TFD des deux sous suites des termes de rang paire et des termes impaire .

Soit $f = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ de longueur $2m$ on décompose f en deux suites qui sont $f' = f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ et $f'' = f_1, f_3, \dots, f_{2m-1}$

Soient $F' = F'_0, F'_1, \dots, F'_{m-1}$ et $F'' = F''_0, F''_1, \dots, F''_{m-1}$ les transformées discrètes de Fourier de respectivement f' et f'' la transformée de f est notée F

$$F = F_0, F_1, \dots, F_{n-1}.$$

On utilise les mêmes notations que précédemment :

$N = 2^r$ $W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ on utilise le fait que $W^N = 1$ et que $W^{\frac{N}{2}} = -1$ On a

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j W^{kj} \quad \text{ou} \quad X_k = \sum_{j=0}^{2^r-1} x_j W^{kj}$$

On définit les indices j et k par décomposition binaire

$$j = 2^{r-1}d_{j,r-1} + \dots + 2^2d_{j,2} + 2^1d_{j,1} + d_{j,0} \tag{3.1}$$

$$k = 2^{r-1}d_{k,r-1} + \dots + 2^2d_{k,2} + 2^1d_{k,1} + d_{k,0} \tag{3.2}$$

Avec : $d_{j,0}, d_{j,1}, d_{j,2}, \dots, d_{j,r-1}, d_{k,0}, d_{k,1}, d_{k,2}, \dots, d_{k,r-1} \in [1, 0]$

On effectue le produit k^*j en développant selon j , (Il suffirait de développer selon k pour obtenir l'algorithme avec entrelacement temporel) :

$$X_k = \sum_{j=0}^{2^r-1} x_j W^{kj} = \sum_{d_{j,0}=0,1} \sum_{d_{j,1}=0,1} \sum_{d_{j,2}=0,1} \dots \sum_{d_{j,r-1}=0,1} x_j W^{kj} \quad (3.3)$$

$$X_k = x_j \left[\sum_{d_{j,0}=0,1} W^{kd_{j,0}} \sum_{d_{j,1}=0,1} W^{2kd_{j,1}} \sum_{d_{j,2}=0,1} W^{4kd_{j,2}} \dots \sum_{d_{j,r-1}=0,1} W^{2^{r-1}d_{j,r-1}} \right] \quad (3.4)$$

En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier

$$\begin{aligned} W &= W^{2^{r-1}d_{k,0}} \\ W^{2^{r-2}kd_{j,r-2}} &= W^{2^{r-1}(d_{k,0}+2d_{k,1})d_{j,r-1}} \\ W^{2^{r-3}kd_{j,r-3}} &= W^{2^{r-3}(d_{k,0}+2d_{k,1}+2^2d_{k,2})d_{j,r-2}} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ W^{2^{r-p}kd_{j,r-p}} &= W^{2^{r-p}d_{j,r-p}(d_{k,0}+2d_{k,1}+2^2d_{k,2}+\dots+2^{p-1}d_{k,p-1})} \end{aligned}$$

On a ainsi décomposé la sommation unique sur k en $r=\log_2(N)$ sommations sur $2^{r-1}d_{k,r}, \dots, 2^2d_{k,2}, 2^1d_{k,1}, d_{k,0}$.

Si on effectue la sommation sur k , on obtient un terme :

Si l'on considère l'ensemble des valeurs T_p que l'on peut obtenir en donnant aux indices $(d_{k,0}, \dots, d_{k,p-2}, d_{j,r-p}, \dots, d_{k,1}, d_{j,0})$ toutes les valeurs possibles, on obtient N valeurs $T_r(k)$ avec $k \in [0, N-1]$ qui vérifient les relations :

On peut écrire la formule

$$T_0(d_{j,r-2}, \dots, d_{j,2}, d_{j,1}, d_{j,0}) = x_j$$

$$T_1(d_{k,0}, d_{j,r-2}, \dots, d_{j,2}, d_{j,1}, d_{j,0}) = \sum_{d_{j,r-1}=0,1} T_0(d_{j,r-1}, \dots, d_{j,1}, d_{j,0}) W^{2^{r-1}d_{j,r-1}d_{k,0}}$$

$$T_2(d_{j,r-3}, \dots, d_{j,1}, d_{j,0}, d_{k,0}, d_{k,1}) = \sum_{d_{j,r-2}=0,1} T_1(d_{k,0}, d_{j,r-2}, \dots, d_{j,2}, d_{j,1}, d_{j,0}) W^{2^{r-2}d_{j,r-2}(d_{k,0}+2d_{k,1}}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$T_p(d_{k,0}, \dots, d_{k,p-1}, d_{j,r-p-1}, \dots, d_{j,2}, d_{k,1}, d_{j,0}) = \sum_{d_{j,r-p}=0,1} T_{p-1}(d_{k,0}, \dots, d_{k,p-1}, d_{j,r-p}, \dots, d_{k,1}, d_{j,0}) W^{2^{r-p}(d_{k,0}+2d_{k,1}+\dots+2^{r-1}d_{k,p-1})}$$

On conclusion le r-ième vecteur intermédiaire T_r n'est outre que le vecteur X que l'on cherche à calculer, à une réorganisation du sous indices $d_{k,0}, d_{k,1}, \dots, d_{k,r-2}, d_{k,r-1}$ près. Cette réorganisation correspondant en fait à un ordre différent de stockage différent des différents éléments des tableaux, peut être décrite par le diagramme suivant :

$$d_{k,r-1}, d_{k,r-2}, \dots, d_{k,1}, d_{k,0} \Rightarrow d_{k,0}, d_{k,1}, \dots, d_{k,r-2}, d_{k,r-1}$$

Cette remise en ordre des éléments de tableau est appelée cryptage/décryptage binaire, elle consiste à faire un miroir binaire sur les indices.

On donne ici à titre indicatif la table de transformation des différents indices correspondant à :

Par exemple pour N=4 et r=2 on a

Indice	Décomposition binaire	Miroir binaire	Indice après transformation
0	00	00	0
1	01	10	2
2	10	01	1
3	11	11	3

TABLE 3.2 – Bit reversal (pour N=4)

Et pour $N=8$ et $r=3$ on a

Indice	Décomposition binaire	Miroir binaire	Indice après transformation
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

TABLE 3.3 – Bit reversal (pour $N=8$)

Il existe deux variantes de cet algorithme, la première possibilité à calculer les r itérations, puis à réordonner les éléments de tableau pour obtenir le résultat final. La seconde possibilité consiste à réordonner les éléments de tableau avant de calculer itérations. Ces deux variantes son équivalentes et constituent l'algorithme de Cooley-Tukey.

Le résultat final

$$X_k(d_{k,r-1}, d_{k,r-2}, \dots, d_{k,1}, d_{k,0}) = T_r(d_{k,0}, d_{k,1}, \dots, d_{k,r-2}, d_{k,r-1}) \quad (3.5)$$

Application numérique

Trouver la FFT du signal $x_j = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$ On illustre l'algorithme pour le cas $N = 8 = 2^3$ $r = 3$

$$X_k = \sum_{j=0}^{2^r-1} x_j w^{kj} \quad 0 \leq k \leq 2^r - 1$$

Les indices Pair

Les indices Impair

$$0 = 2^0 \times 0 + 2^1 \times 0 + 2^2 \times 0 = [0 \ 0 \ 0] \quad 1 = 2^0 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^2 \times 0 = [0 \ 0 \ 1]$$

$$2 = 2^0 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times 0 = [0 \ 1 \ 0] \quad 3 = 2^0 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times 0 = [0 \ 1 \ 1]$$

$$4 = 2^0 \times 0 + 2^1 \times 0 + 2^2 \times 1 = [1 \ 0 \ 0] \quad 5 = 2^0 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^2 \times 1 = [1 \ 0 \ 1]$$

$$6 = 2^0 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times 1 = [1 \ 1 \ 0] \quad 7 = 2^0 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times 1 = [1 \ 1 \ 1]$$

On dit que $f_j = T_0[j] = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$

alors :

$$0) - T_0(0 \ 0 \ 0) = 1 \quad 1) - T_0(0 \ 0 \ 1) = 2$$

$$2) - T_0(0 \ 1 \ 0) = 3 \quad 3) - T_0(0 \ 1 \ 1) = 4$$

$$4) - T_0(1 \ 0 \ 0) = 5 \quad 5) - T_0(1 \ 0 \ 1) = 6$$

$$6) - T_0(1 \ 1 \ 0) = 7 \quad 7) - T_0(1 \ 1 \ 1) = 8$$

Première étape : calcul $T_1(d_{k,0}, d_{j,1}, d_{j,0})$

En appliquant les relations précédentes pour calcul $T_1(d_{k,0}, d_{j,1}, d_{j,0})$

$$T_1(d_{k,0}, d_{j,1}, d_{j,0}) = T_0(0, d_{j,1}, d_{j,0})w^0 + T_0(1, d_{j,1}, d_{j,0})w^{2^{r-1}d_{k,0}}$$

$$T_1(d_{k,0}, d_{j,1}, d_{j,0}) = T_0(0, d_{j,1}, d_{j,0})w^0 + T_0(1, d_{j,1}, d_{j,0})w^{4d_{k,0}}$$

$d_{k,0} = 1$ Implique que $W^{4d_{k,0}} = w^4$ $w^4 = e^{-i\frac{2\pi}{8}4} = e^{-i\pi}$
 $e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi = -1$

$$\begin{aligned} T_1(000) &= T_0(000) + T_0(100) = 1 + 5 = 6 \\ T_1(001) &= T_0(001) + T_0(101) = 2 + 6 = 8 \\ T_1(010) &= T_0(010) + T_0(110) = 3 + 7 = 10 \\ T_1(011) &= T_0(011) + T_0(111) = 4 + 8 = 12 \\ T_1(100) &= T_0(000) - T_0(100) = 1 - 5 = -4 \\ T_1(101) &= T_0(001) - T_0(101) = 2 - 6 = -4 \\ T_1(110) &= T_0(010) - T_0(110) = 3 - 7 = -4 \\ T_1(111) &= T_0(011) - T_0(111) = 4 - 8 = -4 \end{aligned}$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de "papillons "

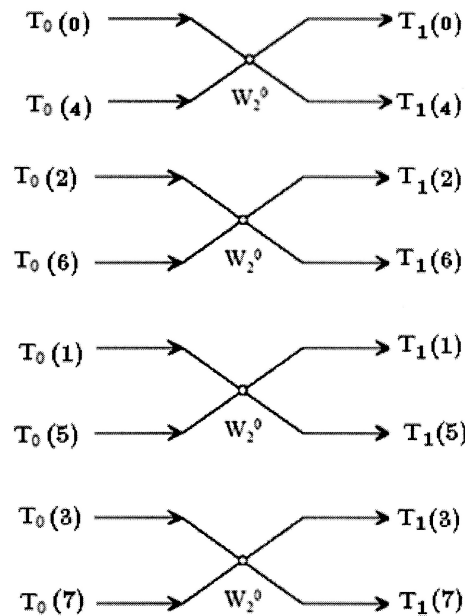


FIGURE 3.1 – Forme graphique de "papillons "

On a le résultat suivant

$$\begin{array}{ll} T_1(0\ 0\ 0) = 6 & T_1(1\ 0\ 0) = -4 \\ T_1(0\ 0\ 1) = 8 & T_1(1\ 0\ 1) = -4 \\ T_1(0\ 1\ 0) = 10 & T_1(1\ 1\ 0) = -4 \\ T_1(0\ 1\ 1) = 12 & T_1(1\ 1\ 1) = -4 \end{array}$$

Deuxième étape : calcul $T_2(d_{k,0}, d_{k,1}, d_{j,0})$ En appliquant les relations précédentes pour calcul $T_2(d_{k,0}, d_{k,1}, d_{j,0})$

$$T_2(d_{k,0}, d_{k,1}, d_{j,0}) = T_1(d_{k,0}, 0, d_{j,0})w^0 + T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})w^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})}$$

On calcul $T_2(0\ 0\ 0)$

$$T_2(0\ 0\ 0) = T_1(0\ 0\ 0) + T_1(0\ 1\ 0) = 6 + 10 = 16$$

$$d_{k,0} = 0 \quad d_{k,1} = 0$$

$$T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})w^{2(0+2*0)} = T_1(0\ 1\ 0) * w^0 = 10$$

$$T_2(0\ 0\ 0) = T_1(0\ 0\ 0) + T_1(0\ 1\ 0) = 6 + 10 = 16$$

On calcul $T_2(0\ 0\ 1)$

$$T_2(0\ 0\ 1) = T_1(0\ 0\ 1) + T_1(0\ 1\ 1) = 8 + 12 = 20$$

$$d_{k,0} = 0 \quad d_{k,1} = 0$$

$$T_1(0\ 1\ 1)w^{2(0)} = T_1(0\ 1\ 1) = 12$$

$$T_2(0\ 0\ 1) = T_1(0\ 0\ 1) + T_1(0\ 1\ 1) = 8 + 12 = 20$$

On calcul $T_2(0\ 1\ 0)$

$$T_2(0\ 1\ 0) = T_1(0\ 0\ 0) - T_1(0\ 1\ 0)$$

$$d_{k,0} = 0 \quad d_{k,1} = 1$$

$$T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})w^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})} \quad d_{k,0} + 2d_{k,1} = 2$$

$$T_1(0\ 1\ 0)w^{-2(2)} = T_1(0\ 1\ 0)w^4$$

$$w^4 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(4)} = e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi = (-1)$$

$$T_2(0 \ 1 \ 0) = T_1(0 \ 0 \ 0) - T_1(0 \ 1 \ 0) = 6 - 10 = -4$$

On calcul $T_2(0 \ 1 \ 1)$

$$T_2(0 \ 1 \ 1) = T_1(0 \ 0 \ 1) - T_1(0 \ 1 \ 1) = 8 - 12 = -4$$

$$d_{k,0} = 0 \quad d_{k,1} = 1$$

$$T_1(0 \ 1 \ 0)w^{2(2)} = T_1(0 \ 1 \ 0)w^4 \quad w^4 = -1$$

$$T_2(0 \ 1 \ 1) = T_1(0 \ 0 \ 1) - T_1(0 \ 1 \ 1) = -4$$

On calcul $T_2(1 \ 0 \ 0)$

$$T_2(1 \ 0 \ 0) = T_1(1 \ 0 \ 0) - iT_1(1 \ 1 \ 0) = -4 + 4i$$

$$T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})w^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})}$$

$$d_{k,0} = 1 \quad d_{k,1} = 0$$

$$T_1(1 \ 1 \ 0)w^{2(1+2*0)} = T_1(1 \ 1 \ 0)w^{-2}$$

$$w^2 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(2)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$$

$$T_2(1 \ 0 \ 0) = T_1(1 \ 0 \ 0) - T_1(1 \ 1 \ 0) = -4 + 4i$$

On calcul $T_2(1 \ 0 \ 1)$

$$T_2(1 \ 0 \ 1) = T_1(1 \ 0 \ 1) - iT_1(1 \ 1 \ 1)$$

$$T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})w^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})}$$

$$d_{k,0} = 1 \quad d_{k,1} = 0$$

$$T_1(1 \ 1 \ 1)w^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})} = T_1(1 \ 1 \ 1)w^{2(1)}$$

$$w^2 = -i$$

$$T_2(1 \ 0 \ 1) = T_1(1 \ 0 \ 1) + iT_1(1 \ 1 \ 1) = -4 + 4i$$

On calcul $T_2(1 \ 1 \ 0)$

$$T_2(1 \ 1 \ 0) = T_1(1 \ 0 \ 0) + iT_1(1 \ 1 \ 0) = -4 - i4$$

$$d_{k,0} = 1 \quad d_{k,1} = 1$$

$$T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})W^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})} = T_1(1 \ 1 \ 0)W^{2(3)} = T_1(1 \ 1 \ 0)W^6$$

$$w^6 = \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} = i$$

$$T_2(1 \ 1 \ 0) = T_1(0 \ 0 \ 1) + iT_1(1 \ 1 \ 1) = -4 - 4i$$

On calcul $T_2(1 \ 1 \ 1)$

$$T_2(1 \ 1 \ 1) = T_1(1 \ 0 \ 1) + iT_1(1 \ 1 \ 1) = -4 - i4$$

$$d_{k,0} = 1 \quad d_{k,1} = 1$$

$$T_1(d_{k,0}, 1, d_{j,0})W^{2(d_{k,0}+2d_{k,1})} = T_1(1 \ 1 \ 1)w^6$$

$$T_2(1 \ 1 \ 1) = T_1(1 \ 0 \ 1) - iT_1(1 \ 1 \ 1) = -4 - 4i$$

On a le résultat suivant

$$T_2(0 \ 0 \ 0) = 16$$

$$T_2(1 \ 0 \ 0) = -4 + 4i$$

$$T_2(0 \ 0 \ 1) = 20$$

$$T_2(1 \ 0 \ 1) = -4 + 4i$$

$$T_2(0 \ 1 \ 0) = -4$$

$$T_2(1 \ 1 \ 0) = -4 + 4i$$

$$T_2(0 \ 1 \ 1) = -4$$

$$T_2(1 \ 1 \ 1) = -4 + 4i$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de " papillons "

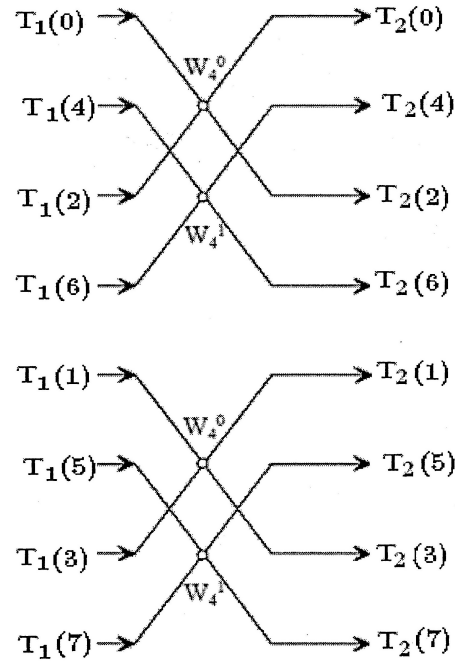


FIGURE 3.2 – Forme graphique de "papillons "2

Troisième étape : calcul $T_3(d_{k,0}, d_{k,1}, d_{k,2})$ En appliquant les relations précédentes pour calcul $T_3(d_{k,0}, d_{k,1}, d_{k,2})$

$$T_3(d_{k,0}, d_{k,1}, d_{k,2}) = T_2(d_{k,0}, d_{k,1}, 0)w^0 + T_2(d_{k,0}, d_{k,1}, 1)w^{(d_{k,0}+2d_{k,1}+4d_{k,2})}$$

$$T_3(0 \ 0 \ 0) = T_2(0 \ 0 \ 0)w^0 + T_1(0 \ 0 \ 1)w^0$$

$$d_{k,0} = 0 \quad , d_{k,1} = 0 \quad , d_{k,2} = 0$$

$$T_3(0 \ 0 \ 1) = T_2(0 \ 0 \ 0)w^0 + T_1(0 \ 0 \ 1)w^4$$

$$d_{k,0} = 0 \quad , d_{k,1} = 0 \quad , d_{k,2} = 1$$

$$T_3(0 \ 1 \ 0) = T_2(0 \ 1 \ 0)w^0 + T_1(0 \ 1 \ 1)w^2$$

$$d_{k,0} = 0 \quad , d_{k,1} = 1 \quad , d_{k,2} = 0$$

$$T_3(0\ 1\ 1) = T_2(0\ 1\ 0)w^0 + T_1(0\ 1\ 1)w^6$$

$$d_{k,0} = 0 \quad , d_{k,1} = 1 \quad , d_{k,2} = 1$$

$$T_3(1\ 0\ 0) = T_2(1\ 0\ 0)w^0 + T_1(1\ 0\ 1)w^1$$

$$d_{k,0} = 1 \quad , d_{k,1} = 0 \quad , d_{k,2} = 0$$

$$T_3(1\ 0\ 1) = T_2(1\ 0\ 0)w^0 + T_1(1\ 0\ 1)w^5$$

$$d_{k,0} = 1 \quad , d_{k,1} = 0 \quad , d_{k,2} = 1$$

$$T_3(1\ 1\ 0) = T_2(1\ 1\ 0)w^0 + T_1(1\ 1\ 1)w^3$$

$$d_{k,0} = 1 \quad , d_{k,1} = 1 \quad , d_{k,2} = 0$$

$$T_3(1\ 1\ 1) = T_2(1\ 1\ 0)w^0 + T_1(1\ 1\ 1)w^7$$

$$d_{k,0} = 1 \quad , d_{k,1} = 1 \quad , d_{k,2} = 1$$

Calcul w^l : On a l varie entre 0 et 7 et $W^l = e^{i2(\frac{\pi}{8})l}$
D'après le calcul on a :

$$w^4 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(4)} = e^{-i\pi} = -1 = -W^0$$

$$w^2 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(2)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$w^6 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(6)} = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = i = -W^2$$

$$w^1 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(1)} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w^5 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(5)} = e^{-i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -W^1$$

$$w^3 = e^{-i\frac{2\pi}{8}(3)} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w^7 = e^{-\frac{(i2\pi)7}{8}} = e^{-i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -W^3$$

Quatrième étape : La dernière suite de valeurs est égale à la suite cherchée $X[K]$

$$X[0] = T_3(0\ 0\ 0) = 36$$

$$X[4] = T_3(0\ 0\ 1) = -4$$

$$X[1] = T_3(1\ 0\ 0) = -4 + 4(1 + \sqrt{2})i \quad X[5] = T_3(1\ 0\ 1) = -4 + 4(1 - \sqrt{2})i$$

$$X[2] = T_3(0\ 1\ 0) = -4 + 4i \quad X[6] = T_3(1\ 1\ 0) = -4 - 4i$$

$$X[3] = T_3(0\ 1\ 1) = -4 - 4i \quad X[7] = T_3(1\ 1\ 1) = -4 - 4(1 + \sqrt{2})i$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de "papillons"

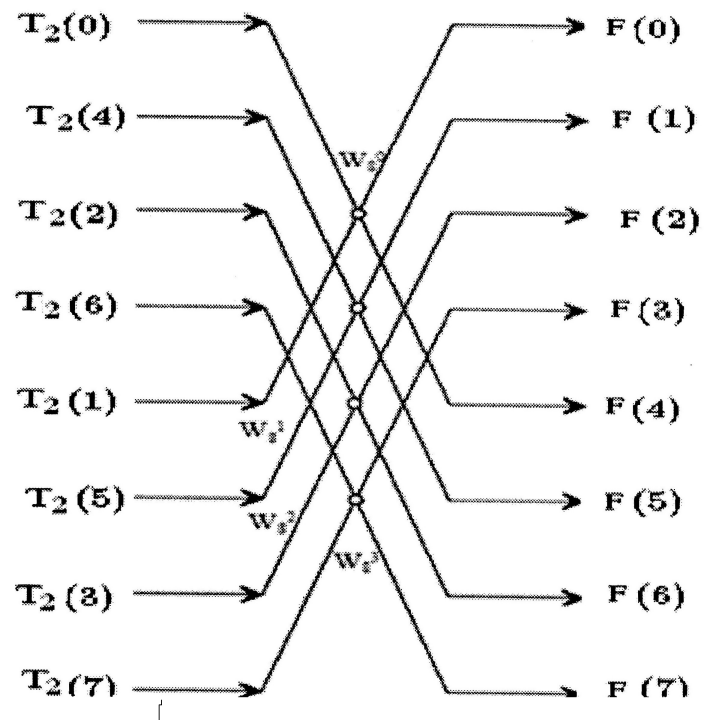


FIGURE 3.3 – Forme graphique de "papillons" 3

En résumé pour la forme graphique de papillon :

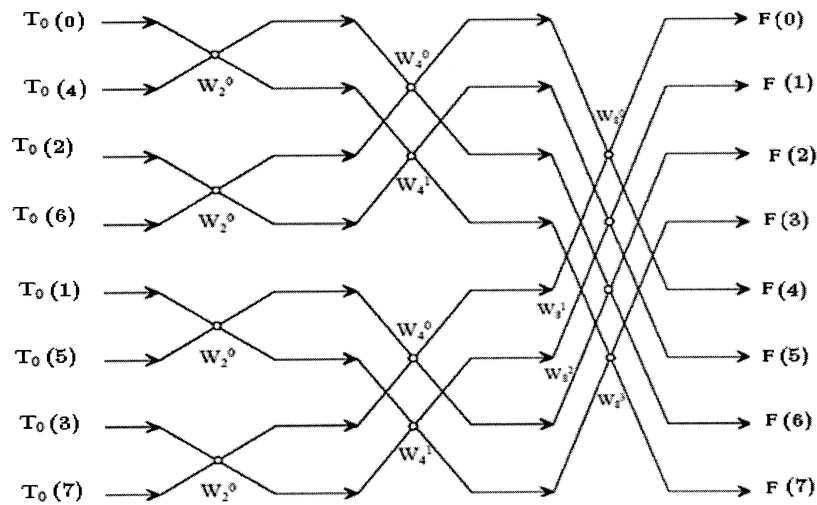


FIGURE 3.4 – Forme graphique de "papillons "4

L'ensemble des relations précédentes peut s'écrire sous la forme matricielle suivant : $T_{n+1} = MT_n$ avec T_{n+1} et T_n des vecteurs et M la matrice de passage

Calcul T_1

$$\begin{bmatrix} T_1(0) \\ T_1(1) \\ T_1(2) \\ T_1(3) \\ T_1(4) \\ T_1(5) \\ T_1(6) \\ T_1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(0) \\ T_0(1) \\ T_0(2) \\ T_0(3) \\ T_0(4) \\ T_0(5) \\ T_0(6) \\ T_0(7) \end{bmatrix}$$

Les valeurs de T_2 se calculent 2 par 2 à partir des 2 valeurs de T_1 de mêmes indices de l'étape précédentes . Les relations précédentes correspondent à la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_2(0) \\ T_2(1) \\ T_2(2) \\ T_2(3) \\ T_2(4) \\ T_2(5) \\ T_2(6) \\ T_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(0) \\ T_1(1) \\ T_1(2) \\ T_1(3) \\ T_1(4) \\ T_1(5) \\ T_1(6) \\ T_1(7) \end{bmatrix}$$

Les valeurs de T_2 se calculent 2 par 2 à partir des 2 valeurs de T_1 de mêmes indices de l'étape précédentes .Les noeuds duaux sont espacés de $\frac{N}{2^3} = 1$

Les relations précédentes correspondent à la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_3(0) \\ T_3(1) \\ T_3(2) \\ T_3(3) \\ T_3(4) \\ T_3(5) \\ T_3(6) \\ T_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & w^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2(0) \\ T_2(1) \\ T_2(2) \\ T_2(3) \\ T_2(4) \\ T_2(5) \\ T_2(6) \\ T_2(7) \end{bmatrix}$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_3(0) \\ T_3(1) \\ T_3(2) \\ T_3(3) \\ T_3(4) \\ T_3(5) \\ T_3(6) \\ T_3(7) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & w^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^6 \end{bmatrix} \\
& * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(0) \\ T_0(1) \\ T_0(2) \\ T_0(3) \\ T_0(4) \\ T_0(5) \\ T_0(6) \\ T_0(7) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La méthode illustrée pour N=8 se généralise pour tout N puissance de 2

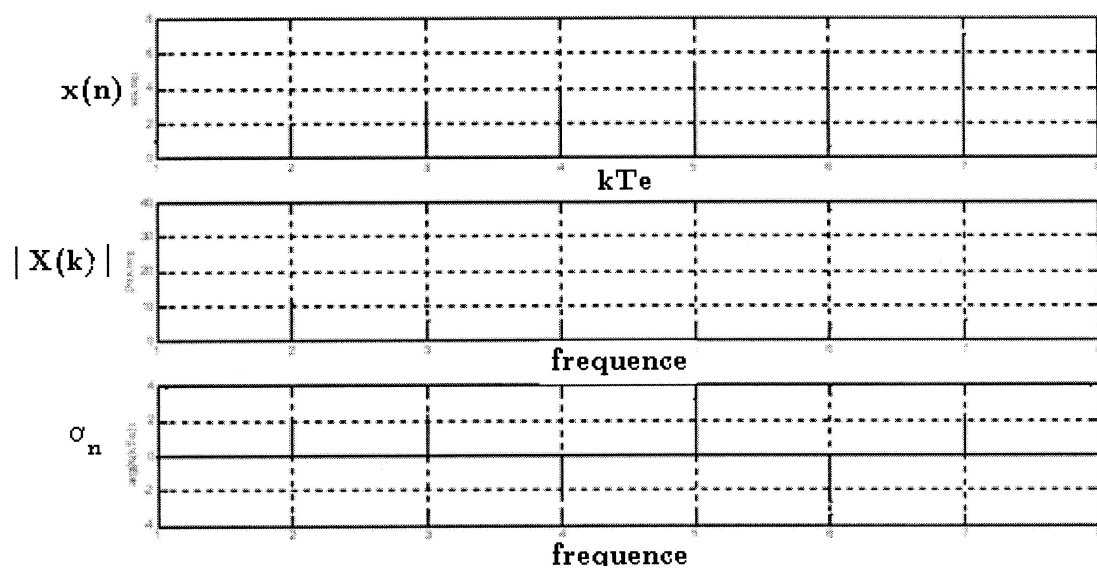


FIGURE 3.5 – L'amplitude et la phase

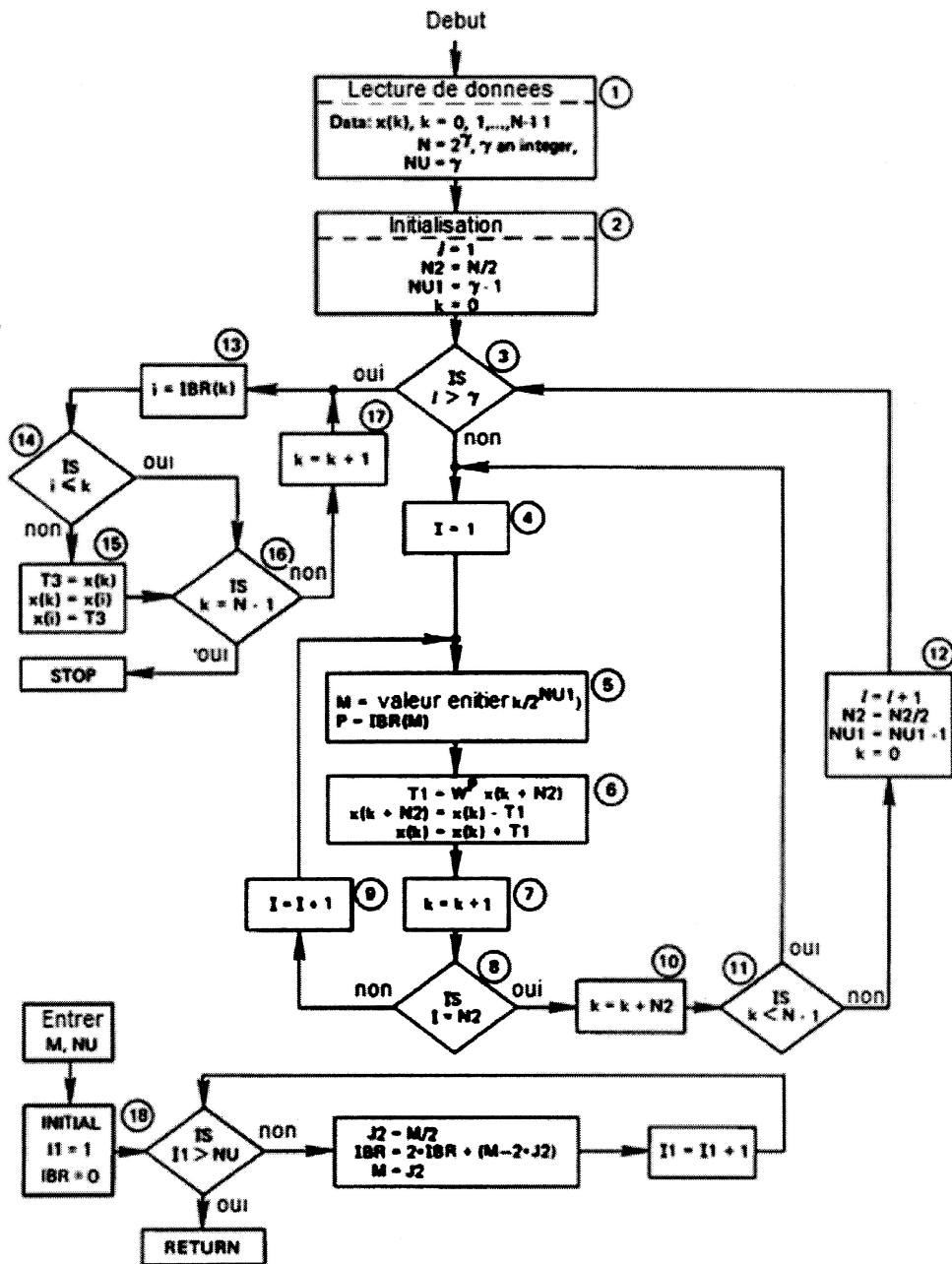


FIGURE 3.6 – Organigramme

```

program fourier;
uses crt ;
(*
(* PROGRAMME QUI CALCUL LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE FFT *)
*)
type realarray=array[0..31] of real;
(*
(*      fonction qui permet de faire l'inversion binaire      *)
*)
function ibitr (j,nu:integer):integer;
var i,j1,j2,k: integer;
begin
j1:=j;
k:=0;
for i:=1 to nu do
begin
j2:=j1 div 2;
k:=k*2+(j1-2*j2);
j1:=j2
end;
ibitr:=k;
end;
(*
(*      sous programme qui calcule la transform,e de fourier rapide FFT      *)
*)
procedure fft (var xreal,ximag:realarray;n,nu:integer);
var n2,nu1,i,l,k,m:integer;
treal,timag,p,arg,c,s:real;
label lbl;
begin
  n2:=n div 2;
  nu1:=nu-1;
  k:=0;
  for l:=1 to nu do
  begin
  lbl:
  for i:=1 to n2 do
  begin
  m:=k div round(exp(nu1*ln(2)));
  p:=ibitr(m,nu);
  arg:=6.283185*p/n;
  c:=cos(arg);
  s:=sin(arg);
  treal:=xreal[k+n2]*c+ximag[k+n2]*s;
  timag:=ximag[k+n2]*c-xreal[k+n2]*s;
  xreal[k+n2]:=xreal[k]-treal;

```

```

    ximag[k+n2]:=ximag[k]-timag;
    xreal[k]:=xreal[k]+treal;
    ximag[k]:=ximag[k]+timag;
    k:=k+1;
  end;
  k:=k+n2;
  if k<n then goto lbl;
  k:=0;
  nu1:=nu1-1;
  n2:=n2 div 2;
  end;
  for k:=0 to n-1 do
    begin
      i:=ibitr(k,nu);
      if i>k then
        begin
          treal:=xreal[k];
          timag:=ximag[k];
          xreal[k]:=xreal[i];
          ximag[k]:=ximag[i];
          xreal[i]:=treal;
          ximag[i]:=timag;
        end;
      end;
    end;
  (*                                     *)
  (*          PROGRAMME PRINCIPALE          *)
  (*                                     *)
  var xreal,ximag:realarray;
  i:integer;
  BEGIN
  clrscr;
  for i:=0 to 7 do
    begin
      xreal[i]:=i+1;
      ximag[i]:=0;
    end;
  fft(xreal,ximag,8,3);
  for i:=0 to 7 do
    writeln(xreal[i]:2:2,' ',ximag[i]:2:2,'i');
    readln;
    readln;
  END.

```

FIGURE 3.7 – Programme calcul FFT en Pascal

Conclusion

L'analyse **FFT** est utilisée pour la description du signal temporel dans le domaine fréquentiel avec une résolution fréquentielle constante sur une échelle linéaire de fréquence.

Aussi, l'analyse FFT sert à observer des signaux qui ne sont pas périodiques (aléatoires par exemple). Cette extension de capacité du calcul FFT, qui n'est pas naturelle pour ce type de signal, appelle à la plus grande prudence dans l'interprétation des résultats.

La transformée de Fourier est une des méthodes (la plus utilisée aujourd'hui) pour représenter un phénomène temporel dans le domaine fréquentiel.

Cette représentation fréquentielle est une image parmi d'autres possibles du phénomène étudié. Il existe d'autres méthodes plus complexes mais plus efficaces.

La compréhension de la FFT aide cependant à mieux les comprendre.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES



- [1] Jean-Pierre RAMIS André WARUSFEL :Mathématiques Tout-en-un pour la Licence
- [2] G. BAUDOIN et J.-F. BERCHER : TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE .École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique.Novembre 2001
- [3] Mohamed Amine Bergach :Adaptation du calcul de la Transformée de Fourier Rapide sur une architecture mixte CPU/GPU intégrée
- [4] Antoine Etesse- Frederic Jacobs- Jie-Fang Zhang :Séries de Fourier et applications . 1er avril 2011
- [5] Jacky DUMAS - François LAMBERT :Analyse Fréquentielle
- [6] Laboratoire d'Acoustique, Conservatoire National des Arts et Métiers :Traitement du signal . 2014-2015
- [7] Osmanov Hamid Ibrahim ,et Boudref Mohamed Ahmed :Séries de Fourier. Rappels de cours et exercices.Université de Boumerdes, 3500, Algérie 2 Université de Béjaia, 0600, Algérie.2015
- [8] Dr.RAHMOUNE Chemseddine : Analyse et traitement du courant statoriquepour ladétection des défauts dans les systèmes électromécaniques .Mémoire de magister présenté UNIVERSITÉ MHAMED BOUGARA. BOUMERDES.2011
- [9] Claude Gasquet-patrick Witomski : Analyse de Fourier . Ed.Masson, Paris 1990
- [10] Ahmed Lesfari : Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE. Cours et exercices
- [11] K.R.Rao ; D.N.Kim ; J.J.Hwang : Fast Fourier Transform : Algorithms and Applications .
- [12] G. Abramovici : Théorie des distributions.janvier 2015