

Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études

pour l'obtention du diplôme

Mastère en Mathématiques

Option :Analyse fonctionnelle et EDP

Thème

**Existence de solution positive pour un problème
aux limites singulier de deuxième ordre**

Présenté par :
Zaoui mohammed

Soutenu le : 2021

Devant le jury composé de :

Examineur : Dr.Brahim Khaldi M.C.B C-Univ. Ahmed Salhi-Naama
Examineur : Dr. Kamel Tahri M.C.A ESM-Tlemcen
Encadreur : Dr. Ali Zouaoui M.C.B Univ. Mustapha Stambouli-Mascara

Année universitaire 2020/2021

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	4
1 Préliminaire	6
1.1 Espaces vectoriels normés	6
1.1.1 Espace de Banach	7
1.2 Compacité	8
1.3 Théorème d'Ascoli-Arzela	9
1.3.1 Équicontinuité	9
1.3.2 Théorème d'Ascoli-Arzela	9
1.4 Méthode de sous et sur-solution	10
1.4.1 Sous-solution	10
1.4.2 Sur-solution	11
2 Étude d'un problème aux limites	12
2.1 Introduction	12
2.2 Existence de solution	13

2.2.1	Étape 1 : Existence de sous-solution	14
2.2.2	Étape 2 : Existence de sur-solution :	17
2.2.3	Étape 3 : Existence de la solution exacte	21
	Conclusions	28
	Bibliographie	29

Remerciements

Avant tout, nous remercions "Allah", le tout Puissant de nous avoir accordé la volonté et la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier infiniment **Dr.Zouaoui Ali** de m'avoir encadrés et je tiens **Mr.Latti.F** d'avoir pu bénéficier aussi bien de leurs conseils et ses compétences scientifiques, de nous avoir témoigné une grande confiance en nous laissant une large part d'initiative. Son soutien incessant aussi bien moral, ses conseils et ses encouragements furent déterminants. J'adresse également mes remerciements à **Mr.Khaldi.I** de l'honneur qu'elle nous a fait de présider le jury de notre master, et à **Mr.Tahri.K** d'avoir accepté la lourde tâche d'être examinateurs de ce travail .

Mes sincères remerciements ont aussi adressé à tous les enseignants de Mathématiques au centre universitaire **salhi-ahmed** de Nâama et surtout **Mr.Mekki**, ses conseils, critiques et remarques vont significativement améliorer la qualité de ce mémoire.

Je souhaite qu'ils trouvent ici l'assurance de notre gratitude, et aussi que nous n'oublions pas **Moulay .kh** et **Dr. Benaissa** et **Mr.El Yahaoui .Y** et **Md.Khelouati.H** et **Mr.Moussaoui.F**

Enfin, je ne trouve pas de mots pour exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à mes parents, mes frères, mes soeurs, mes amis et surtout le groupe *Naami.Y* et *Zidoune .y* et *Otmane.N* et *Boussag.M* et *Belhadje.K* et *Boukhalkhal.Z* et toutes les personnes qui ont contribué d'une manière directe ou indirecte à ce travail.

INTRODUCTION

L'étude des équations différentielles ordinaires se trouve à l'interface de nombreux problèmes scientifiques.

En effet, la plupart des phénomènes de la Physique ou des sciences de l'ingénieur sont modélisés par des équations différentielles avec des conditions soit initiales soit aux limites ; d'où l'importance d'étudier ce genre de problème.

C'est dans ce contexte que notre mémoire s'inscrit. En fait nous considérons dans ce mémoire le problème suivant

$$\begin{cases} u'' + \lambda \frac{u'}{t^m} - \gamma \frac{|u'|^2}{u^p} + f(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

ou u est une fonction qui dépend de t et $f(t)$ est une fonction continue $\forall t \in [0, 1]$; et λ, m, γ, p des nombres réels positifs.

Ce mémoire est constitué de deux chapitres ; le premier chapitre représente un rappel des notions de base nécessaire pour étudier ce problème.

Dans le deuxième chapitre et via la technique de sous et sur-solution on établit un

résultat d'existence de solution ; il faut bien noter que le théorème d'Ascoli-Arzela est un ingrédient essentiel dans notre démonstration.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions, et les théorèmes nécessaires pour la compréhension de notre travail.

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.1 (*Espace métrique*) : Soit E un espace topologique. Une distance (ou métrique) sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie pour tout x, y et z de E :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.2 : Un espace $(E, \|\cdot\|)$ est dit espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} s'il est muni d'une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

$$1. \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ou $|\cdot|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$3. \forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (l'inégalité triangulaire).}$$

si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.3 (Suite de Cauchy) : On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X, d) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } n, m > N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

on écrit alors

$$d(x_n, x_m) \longrightarrow 0, \text{ quand } n, m \longrightarrow \infty$$

Remarque

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.1.4 (Espace Complet) on dit qu'un espace vectoriel normé E est complet, si toute suite de Cauchy dans E converge dans E

Définition 1.1.5 (Espace de Banach) : On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet

Exemple 1.1.1 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ est espace de Banach, où

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

2. Toute espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

1.2 Compacité

Définition 1.2.1 (Espaces métrique compacte) Soit (E, d) est un espace métrique, On dit que (E, d) est un espace compacte si tout suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E admet une suite extraite convergente vers un point de E .

Le résultat suivant caractérise les ensembles compacts dans l'espace \mathbb{R}^n .

Théorème 1.2.1 (Théorème de Hein-Borel) Soit K un sous ensemble de \mathbb{R}^n ; K est compacte si et seulement si K est fermé et borné.

Ainsi les intervalles fermé et borné de \mathbb{R} sont des espaces compacts, les suites numériques convergentes sont aussi des espaces compacts. Généralement dans un espace normé de dimension finie les espaces compacts sont exactement les fermés bornés, mais cela n'est pas vrai dans le cas des espaces de dimension infinies comme le montre le théorème suivant

Théorème 1.2.2 (Théorème de Riesz) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.

Donc pour caractériser les ensembles compacts dans un espace de dimension infinie, on fait appelle au théorème d'Ascoli-Arzela.

1.3 Théorème d'Ascoli-Arzela

1.3.1 Équicontinuité

Soient E et F deux espaces métrique munis d'une métrique d , notons par $C(E, F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F .

Définition 1.3.1 (*Ensemble équicontinue*) On dit qu'un ensemble A de $C(E, F)$ est équicontinue en un point $x \in E$, si A vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall y \in E, d(x, y) \leq \delta_\epsilon \implies \forall f \in A, d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Si A est équicontinue $\forall x \in A$, on dit que A est équicontinue sur A .

En d'autre terme, une suite de fonction continues $(f_n)_n$ est équicontinue sur A , si $\forall x \in A$ étant donné $\epsilon > 0$, on peut prendre le même δ_ϵ pour toutes les fonctions f_n de la suite $(f_n)_n$.

Exemple 1.3.1 .

1. Par définition toute partie formée d'un nombre fini de fonctions continues est équicontinue.
2. Si toutes les fonctions de A sont λ -lipschitziennes pour la même constante λ , alors A est équicontinue.

1.3.2 Théorème d'Ascoli-Arzela

Théorème 1.3.1 (*Théorème d'Ascoli-Arzela*) Pour $A \subset C([0, 1], \mathbb{R})$; A est compact si et seulement si, A est fermé, borné et équicontinue.

Proposition 1.3.1 soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant :

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement bornée (ie)

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}; \|f_n\| \leq M$$

2. est équicontinue

(ie) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0; \forall x, y \in [a, b] :$

$$|x - y| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente (ie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte).

Corollaire 1.3.1 Si la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

1.4 Méthode de sous et sur-solution

1.4.1 Sous-solution

On s'intéresse à l'existence de solution via la méthode de sous-sur solution on considère le problème suivant :

$$(P_\epsilon) \begin{cases} (L_\epsilon)U(t) = 0, t \in [0, 1] \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

soit $f \in C[0, 1]$ et $f(t) > 0$.

Définition 1.4.1 (*Sous-solution pour un problème aux limites*) On dit que U est une sous-solution pour le problème (P_ϵ) si

$$(L_\epsilon u)(t) \leq 0, t \in [0, 1]$$

et $U(t) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$.

1.4.2 Sur-solution

Définition 1.4.2 (*Sur-solution pour un problème aux limites*) On dit que V_ϵ est une sur-solution pour le problème (P_ϵ) s'il vérifie

$$(L_\epsilon V_\epsilon)(t) \geq 0, t \in [0, 1]$$

et $U(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$.

CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES

2.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u'' + \lambda \frac{u'}{t^m} - \gamma \frac{|u'|^2}{u^p} + f(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ou , u est une fonction qui dépend de t .

$f(t)$ est une fonction continue $\forall t \in [0, 1]$; et λ, m, γ, p des nombres réels positifs qui vérifient certaines conditions.

Plus précisément, nous prouvons dans ce chapitre l'existence de solution pour le problème (2.1) et nous démontrons le résultat suivant :

2.2 Existence de solution

Théorème 2.2.1 [4] Soit $\lambda \in]0, +\infty[$, $p \in [1, 2[$, $m \in]0, \frac{p}{2-p}]$

et soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues).

On suppose que $f(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$. Donc, si

$$\gamma > \inf_{t \geq 1} \mathcal{G}(t)$$

où $\mathcal{G}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est définie par :

$$\mathcal{G}(t) = \frac{p + \lambda(2 - p)}{2} t^{p-1} + \frac{(2 - p)^2 \max_{[0,1]} f}{4} t^{p-2}$$

Alors le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution non triviale.

La preuve de ce théorème passe par trois étapes ; le premier étape consiste à approcher le problème (2.1) par le problème ϵ -approché (P_ϵ) suivant

$$(P_\epsilon) \begin{cases} u'' + \lambda \frac{u'}{(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^m} - \gamma \frac{|u'|^2}{(u + \epsilon^2)^p} + f(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases}$$

Remarquer ici qu'on a mis des ϵ aux dénominateurs des fonctions $\frac{u'}{(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^m}$ et $\frac{|u'|^2}{(u + \epsilon^2)^p}$

et cela pour éviter des quantités indéfinies lorsque t tend vers 0 ou bien u tend vers 0.

Afin de démontrer l'existence d'une solution ϵ -approchée u_ϵ , on utilise la méthode de sur et sous-solution, cette méthode consiste à démontrer que (P_ϵ) possède une sous-solution (étape 01) et une sur-solution (étape 02) et par conséquent (P_ϵ) possède une solution.

Après avoir prouvé l'existence de la solution ϵ -approchée u_ϵ pour (P_ϵ) ; on passe à l'étape final.

Dans cet étape on suppose que ϵ est une suite $(\epsilon_k)_k$ qui tend vers "0" et par suite, il vient d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà qu'il existe une sous suite $(u_{\epsilon_k})_{\epsilon_k}$ qui tendre vers u (la solution exacte du problème (2.1)); c-à-d

$$u_{\epsilon_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u \text{ dans } \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$$

2.2.1 Étape 1 : Existence de sous-solution

Nous considérons le problème (p_ϵ) suivant :

$$(P_\epsilon) \begin{cases} L_\epsilon(u(t)) = 0, & t \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où

$$L_\epsilon(u) := -u'' - \lambda \frac{u'}{(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^m} + \gamma \frac{|u'|^2}{(u + \epsilon^2)^p} - f(t)$$

avec $\alpha = \frac{2}{2-p}$ et λ, γ, m des nombres réels .

Dans un premier temps on démontre le lemme

Lemme 2.2.1 Posons $U = C_1 W^\alpha$ avec $\alpha = \frac{2}{2-p}$; où $W(t) = t(1-t)$ et $C_1 \in]0, 1[$ tels que

$$2C_1\alpha + C_1\alpha\lambda 2^{\alpha-1-m} + \gamma C_1^{2-p}\alpha^2 \leq \min_{[0,1]} f(t). \quad (2.2)$$

Alors U est une sous-solution du problème (P_ϵ) .

On rappelle qu' une fonction U est une sous-solution pour le problème (P_ϵ) si

$$L_\epsilon(U) \leq 0, \text{ sur }]0, 1[$$

et $U(t) \leq 0$ pour $t = 0, 1$.

Démonstration.

On a

$$L_\epsilon(U) = -U'' - \lambda \frac{U'}{(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^m} + \gamma \frac{|U'|^2}{(U + \epsilon^2)^p} - f(t) = 0$$

et comme $U > 0$ alors

$$U + \epsilon^2 \geq U \Rightarrow (U + \epsilon^2)^p \geq U^p \Rightarrow \frac{1}{(U + \epsilon^2)^p} \leq \frac{1}{U^p}$$

et par suite

$$L_\epsilon(U) \leq -U'' - \lambda \frac{U'}{(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^m} + \gamma \frac{|U'|^2}{U^p} - f(t)$$

On remplace U par sa formule (i.e)

$$U(t) = C_1 W^\alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{2}{2-p}$$

remarquer ici que

$$U'(t) = \alpha C_1 W(t)^{\alpha-1} W'(t)$$

et

$$U''(t) = C_1 \alpha(\alpha - 1) W(t)^{\alpha-2} W'(t)^2 + \alpha C_1 W(t)^{\alpha-1} W''(t)$$

et

$$W''(t) = -2$$

et par conséquent

$$L_\epsilon(U) \leq 2C_1\alpha W^{\alpha-1} - C_1\alpha(\alpha-1)W^{\alpha-2}W'^2 - C_1\alpha\lambda \frac{W^{\alpha-1}W'}{\left(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m} + \gamma \frac{(\alpha C_1 W^{\alpha-1} W')^2}{(C_1 W^\alpha)^p} - f(t)$$

$$L_\epsilon(U) \leq 2C_1\alpha W^{\alpha-1} - C_1\alpha\lambda \frac{W^{\alpha-1}W'}{\left(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m} + \gamma\alpha^2 C_1^{2-p} \frac{(W^{\alpha-1}W')^2}{W^{\alpha p}} - f(t) \quad (2.3)$$

où on a utilisé le fait que

$$C_1\alpha(\alpha-1)W(t)^{\alpha-2}W'(t)^2 \geq 0 \Rightarrow -C_1\alpha(\alpha-1)W(t)^{\alpha-2}W'(t)^2 \leq 0$$

et comme $W \leq t < 1$, donc $W^{\alpha-1} \leq 1$.

Ce qui donne

$$2C_1\alpha W^{\alpha-1} \leq 2C_1\alpha \quad (2.4)$$

et comme $W' = (t - t^2)' = 1 - 2t \geq -1$, donc

$$-C_1\alpha\lambda \frac{W^{\alpha-1}W'}{\left(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m} \leq C_1\alpha\lambda \frac{W^{\alpha-1}}{\left(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m}. \quad (2.5)$$

ainsi avec (2.4) et (2.5); (2.3) devient

$$L_\epsilon(U) \leq 2C_1\alpha + C_1\alpha\lambda \frac{W^{\alpha-1}}{\left(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^m} + \gamma\alpha^2 C_1^{2-p} W'^2 W^{2\alpha-2-\alpha p} - f(t).$$

Or

$$2\alpha - 2 - \alpha p = 0, \text{ car } \alpha = \frac{2}{2-p}$$

$$L_\epsilon(U) \leq 2C_1\alpha + \lambda C_1\alpha \left(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-m} W^{\alpha-1} + \gamma\alpha^2 C_1^{2-p} W'^2 - f(t) \quad (2.6)$$

Maintenant, on remplace $W(t)$ par sa formule

$$\begin{aligned} W(t) &= t(1-t) \\ &= t - t^2 \\ &\leq t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

et par suite

$$W^{\alpha-1} \leq (t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1} \quad (2.7)$$

et

$$W' = 1 - 2t \leq 1 \quad (2.8)$$

avec (2.7) et (2.8), on déduit de (2.6)

$$\begin{aligned} L_\epsilon(U) &\leq 2C_1\alpha + \lambda C_1\alpha(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1-m} + \gamma\alpha^2 C_1^{2-p} - f(t) \\ &\leq 2C_1\alpha + \lambda C_1\alpha 2^{\alpha-1-m} + \gamma\alpha^2 C_1^{2-p} - \min_{[0,1]} f(t) \\ &\leq 0, \quad \text{d'après la condition (2.2)} \end{aligned}$$

□

2.2.2 Étape 2 : Existence de sur-solution :

Lemme 2.2.2 *Il existe une constante positive $\epsilon_0 \in]0, 1[$, telle que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$,*

$$V_\epsilon = C_*(t + \epsilon^{1/\alpha})^\alpha$$

est une sur-solution pour le problème (P_ϵ) .

Il suffit de démontrer que $L_\epsilon(V_\epsilon) \geq 0$.

Démonstration. On a

$$L_\epsilon(V_\epsilon) = -V_\epsilon'' - \lambda \frac{V_\epsilon'}{(t + \epsilon^{\frac{1}{\alpha}})^m} + \gamma \frac{|V_\epsilon'|^2}{(V_\epsilon + \epsilon^2)^p} - f(t). \quad (2.9)$$

Or

$$\begin{aligned} V_\epsilon'(t) &= C_* \alpha (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1} \\ |V_\epsilon'(t)|^2 &= C_*^2 \alpha^2 (t + \epsilon^{1/\alpha})^{2(\alpha-1)} \\ V_\epsilon''(t) &= C_* \alpha (\alpha - 1) (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2} \end{aligned}$$

et par suite(2.9) devient

$$\begin{aligned} L_\epsilon(V_\epsilon) &= -C_* \alpha (\alpha - 1) (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2} - \lambda \frac{C_* \alpha (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1}}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^m} + \gamma \frac{|C_* \alpha (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1}|^2}{(C_* (t + \epsilon^{1/\alpha})^\alpha + \epsilon^2)^p} - f(t) \\ &= -C_* \alpha (\alpha - 1) (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2} - \lambda \alpha C_* (t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1-m} \\ &\quad + \gamma C_*^{2-p} \alpha^2 \left[1 + \epsilon^2 C_*^{-1} (t + \epsilon^{1/\alpha})^{-\alpha} \right]^{-p} - f(t). \end{aligned}$$

On remarque maintenant

1. $\forall t \in [0, 1]$;

$$f(t) \leq \max_{[0,1]} f(t)$$

ce qui donne

$$-f(t) \geq -\max_{[0,1]} f(t) \quad (2.10)$$

2. On a $(t + \epsilon^{1/\alpha}) \leq (1 + \epsilon^{1/\alpha})$, puisque $t \leq 1$; d'autre part, comme $\alpha - 2 \geq 0$, on aura

$$(t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2} \leq (1 + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2} \quad (2.11)$$

et de la même façon, comme $\alpha - 1 - m \geq 0$, donc

$$(t + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1-m} \leq (1 + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1-m} \quad (2.12)$$

3. comme $t \geq 0$ donc $t + \epsilon^{1/\alpha} \geq \epsilon^{1/\alpha}$, or $\alpha > 0$ ce qui donne

$$C_*(t + \epsilon^{1/\alpha})^\alpha \geq C_*\epsilon$$

ou encore

$$\frac{\epsilon^2}{C_*(t + \epsilon^{1/\alpha})} \geq \frac{\epsilon^2}{C_*\epsilon} = C_*^{-1}\epsilon$$

et puis que $p > 0$;

$$\left[1 + \frac{\epsilon^2}{C_*(t + \epsilon^{1/\alpha})^\alpha}\right]^p \leq [1 + \epsilon C_*^{-1}]^p$$

on passe à l'inverse

$$\frac{1}{\left[1 + \frac{\epsilon^2}{C_*(t + \epsilon^{1/\alpha})^\alpha}\right]^p} \geq \frac{1}{[1 + \epsilon C_*^{-1}]^p} \quad (2.13)$$

d'où, il vient d'après les inégalités (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13)

$$\begin{aligned} L_\epsilon(V_\epsilon) &\geq -C_*\alpha(\alpha - 1)(1 + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2} - \lambda\alpha C_* (1 + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1-m} \\ &= +\gamma C_*^{2-p} \alpha^2 [1 + C_*^{-1}\epsilon]^{-p} - \max_{[0,1]} f(t) \end{aligned}$$

ou encore

$$L_\epsilon(V_\epsilon) \geq C_*\alpha(\alpha - 1) + \gamma C_*^{2-p} \alpha^2 - \lambda\alpha C_* - \max_{[0,1]} f(t) + e_\epsilon$$

où

$$e_\epsilon = C_*\alpha(\alpha-1) [1 - (1 + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-2}] + \lambda\alpha C_* [1 - (1 + \epsilon^{1/\alpha})^{\alpha-1-m}] + \gamma C_*^{2-p}\alpha^2 [(1 + \epsilon C_*^{-1})^{-p} - 1]$$

et lorsqu'on fait tendre ϵ vers 0, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e_\epsilon = 0$$

Autrement dit, il existe un certain ϵ_0 assez petit pour lequel, le nombre e_ϵ devient négligeable devant la quantité

$$\gamma C_*^{2-p}\alpha^2 - C_*\alpha(\alpha-1) - \lambda\alpha C_* - \max_{[0,1]} f(t)$$

. En conclusion, $\exists \epsilon_0 \in]0, 1[$, tel que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$

$$L_{\epsilon_0}(V_{\epsilon_0}) \geq 0$$

dés que la quantité

$$\gamma C_*^{2-p}\alpha^2 - C_*\alpha(\alpha-1) - \lambda\alpha C_* - \max_{[0,1]} f(t)$$

soit positive. Or

$$\begin{aligned} \gamma C_*^{2-p}\alpha^2 - C_*\alpha(\alpha-1) - \lambda\alpha C_* - \max_{[0,1]} f(t) &= C_*^{2-p}\alpha^2 \left[\gamma - C_*^{p-1} \frac{\alpha-1}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - C_*^{p-1} \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\max_{[0,1]} f(t)}{C_*^{2-p}\alpha} \right] \end{aligned}$$

Donc, si

$$\underbrace{\gamma - \left(C_*^{p-1} \frac{\alpha-1}{\alpha} - C_*^{p-1} \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\max_{[0,1]} f(t)}{C_*^{2-p}\alpha} \right)}_{(A)} \geq 0$$

Alors

$$L_\epsilon(V_\epsilon) \geq 0$$

Autrement dit, si

$$\gamma \geq \mathcal{G}(C_*)$$

avec

$$\mathcal{G}(t) = \frac{p + \lambda(2-p)}{2} t^{p-1} + \frac{(2-p)^2 \max_{[0,1]} f(t)}{4} t^{p-2}$$

Alors : $L_\epsilon(V_\epsilon) \geq 0, \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$

Le lemme est démontré. □

2.2.3 Étape 3 : Existence de la solution exacte

Il vient d'après le théorème 1 référence[1] et en vertu du lemme démontré ,qu'il existe $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$ une solution u_ϵ dans $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ pour le problème approché (P_ϵ) qui satisfait $u'_\epsilon \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $\forall t \in]0, 1[$

$$V_\epsilon \geq u_\epsilon \geq U > 0 \tag{2.14}$$

D'ou, u_ϵ vérifie , $\forall t \in]0, 1[$

$$u''_\epsilon + \lambda \frac{u'_\epsilon}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^m} - \gamma \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} + f(t) = 0 \tag{2.15}$$

Lemme 2.2.3 *Il existe une constante positive C indépendante de ϵ , telle que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$*

$$|u'_\epsilon(t)| \leq C, \forall t \in [0, 1] \tag{2.16}$$

1. où on a remplacé α par sa valeur $\alpha = \frac{2}{2-p}$ dans (A)

Démonstration.

On a par hypothèse $u_\epsilon(1) = u_\epsilon(0) = 0$ et $u_\epsilon \geq 0, \forall t \in [0, 1]$ et par conséquent

$$u'_\epsilon(0) := \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \frac{u_\epsilon(t) - u_\epsilon(0)}{t} = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \frac{u_\epsilon(t)}{t} \geq 0$$

car $t \geq 0$ et $u_\epsilon(t) \geq 0$.

et

$$u'_\epsilon(1) := \lim_{t \xrightarrow{<} 1} \frac{u_\epsilon(t) - u_\epsilon(1)}{t - 1} = \lim_{t \xrightarrow{<} 1} \frac{u_\epsilon(t)}{t - 1} \leq 0.$$

car $u_\epsilon(t) \geq 0$ mais $t - 1 \leq 0$; ($t \leq 1$)

En conclusion, on a

$$u'_\epsilon(0) \geq 0 \geq u'_\epsilon(1). \quad (2.17)$$

Maintenant, une intégration par partie sur (2.15) nous permet d'écrire

$$\int_0^1 u''_\epsilon(t) dt + \lambda \int_0^1 \frac{u'_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^m} dt - \gamma \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt + \int_0^1 f(t) dt = 0 \quad (2.18)$$

ou encore

$$[u'_\epsilon(t)]_0^1 + \lambda \left[\frac{u_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^m} \right]_0^1 + \lambda m \int_0^1 \frac{u_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^{m+1}} dt - \gamma \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt + \int_0^1 f(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} u'_\epsilon(1) - u'_\epsilon(0) + \lambda \left[\frac{u_\epsilon(1)}{(1 + \epsilon^{1/\alpha})^m} - \frac{u_\epsilon(0)}{\epsilon^{m/\alpha}} \right] + \lambda m \int_0^1 \frac{u_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^{m+1}} dt \\ - \gamma \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt + \int_0^1 f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$u'_\epsilon(1) - u'_\epsilon(0) = \gamma \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt - \lambda m \int_0^1 \frac{u_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^{m+1}} dt - \int_0^1 f(t) dt \quad (2.19)$$

et comme $u'_\epsilon(1) - u'_\epsilon(0) \leq 0$ on tire de (2.19)

$$\gamma \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt - \lambda m \int_0^1 \frac{u_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^{m+1}} dt - \int_0^1 f(t) dt \leq 0$$

on encore

$$\gamma \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt \leq \lambda m \int_0^1 \frac{u_\epsilon(t)}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^{m+1}} dt + \int_0^1 f(t) dt$$

Comme $m \leq \frac{p}{2-p}$, $1 + m \leq \alpha = \frac{2}{2-p}$, il vient d'après (2.17) qu'il existe deux constantes C_3 , et, C_4 , telles que

$$\int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt \leq C_3. \quad (2.20)$$

et

$$\lambda \int_0^1 \frac{|u'_\epsilon|}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^m} dt \leq C_4. \quad (2.21)$$

Par ailleurs, si on intègre (2.15) sur $]t_1, t_2[$ on trouve

$$[u'_\epsilon(t)]_{t_1}^{t_2} = \gamma \int_{t_1}^{t_2} \frac{|u'_\epsilon|^2}{(u_\epsilon + \epsilon^2)^p} dt - \lambda m \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'_\epsilon}{(t + \epsilon^{1/\alpha})^m} dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Ce qui donne d'après (2.20) et (2.21)

$$|u'_\epsilon(t_2) - u'_\epsilon(t_1)| \leq C_5, \forall t_1, t_2 \in [0, 1]. \quad (2.22)$$

Où

$$C_5 = \lambda m C_4 + \gamma C_3 + \int_0^1 f(t) dt$$

. Maintenant, en appliquant le théorème de la moyenne et comme $u_\epsilon(1) = u_\epsilon(0) = 0$, on déduit qu'il existe $t_\epsilon \in [0, 1]$ tel que $u'_\epsilon(t_\epsilon) = 0$, et si on remplace t_1 par t_ϵ et t_2 par t on obtient

$$|u'_\epsilon(t) - 0| \leq C_5, \forall t \in [0, 1].$$

d'où (2.16) (le lemme est démontré).

□

Application du Théorème d'Ascoli-Arzela

A l'aide des inégalités (2.14) et (2.16) et grâce à l'équation (2.15), on déduit que $\forall \delta \in]0, \frac{1}{2}[$ il existe une constante C_δ indépendante de ϵ , telle que $\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[$;

$$|u''_\epsilon(t)| \leq C_\delta; \forall t \in [\delta, 1 - \delta].$$

Soit maintenant $(\epsilon_k)_k$ une suite numérique qui tend vers "0" quand $k \rightarrow +\infty$.

Il vient d'après le théorème d'Ascoli-Arzela² qu'il existe une suite de fonction $(u_{\epsilon_k})_k$ qu'on la note $(u_k)_k$ et une fonction $u \in \mathcal{C}^1(]0, 1[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, tel que

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u, \text{ uniformément dans } \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u, \text{ uniformément dans } \mathcal{C}^1([\delta, 1 - \delta], \mathbb{R})$$

2. plus précisément le corollaire (1.3.1).

puisque

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u, \text{ uniformément dans } \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k(0) - u(0)\| = 0 \quad (2.23)$$

et puisque

$$u_k(0) = 0$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k(0) - 0\| = 0 \quad (2.24)$$

Ainsi (2.23) et (2.24) impliquent

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k(0) - 0\| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k(0) - u(0) + u(0)\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k(0) - u(0)\| + \|u(0)\| \leq 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$u_k(0) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ dans } \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$

de la même façon on a :

$$u_k(1) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ dans } \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$

En conclusion

$$u(1) = u(0) = 0.$$

D'autre part, si on passe à la limite dans l'inégalité

$$V_\epsilon \geq u_\epsilon \geq U > 0$$

lorsque $k \rightarrow +\infty$ on trouve

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} V_k(t) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(t) \geq U(t) > 0$$

Or

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(t) = u(t)$$

et par suite

$$u(t) > 0 \text{ sur }]0, 1[.$$

Donc la suite de solutions ϵ -approchées $(u_k)_k$ tend vers $u(t)$ avec

$$u(1) = u(0) = 0 \text{ et } u(t) > 0, \forall t \in]0, 1[$$

il nous reste à montrer que $u(t)$ vérifie l'équation

$$u'' + \lambda \frac{u'}{t^m} - \gamma \frac{|u'|^2}{u^p} + f(t) = 0, \quad 0 < t < 1. \quad (2.25)$$

Pour cela il faut intégrer l'équation ϵ -approchée (2.15) sur $[t_0, t]$, ($1 > t_0 > 0$).

$$u'_k(t) - u'_k(t_0) = \gamma \int_{t_0}^t \frac{|u'_k(s)|^2}{u_k^p} ds - \lambda \int_{t_0}^t \frac{u'_k(s)}{s^m} ds - \int_{t_0}^t f(s) ds$$

et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on déduit

$$u'(t) - u'(t_0) = \gamma \int_{t_0}^t \frac{|u'(s)|^2}{u^p} ds - \lambda \int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{s^m} ds - \int_{t_0}^t f(s) ds$$

et si on dérive cette égalité des deux cotés

$$u''(t) = \gamma \frac{|u'(t)|^2}{u(t)^p} - \lambda \frac{u'(t)}{t^m} - f(t)$$

(i.e) u est une solution de l'équation (2.25).

CONCLUSIONS

Dans ce mémoire, nous avons présenté un résultat d'existence de solution pour un problème aux limites.

Pour établir notre résultat d'existence on ait basé sur la méthode de sous et sur-solution, mais il s'avère que le théorème d'Ascoli-Arzela représente un outil incontournable dans notre étude.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.Bertsch and M.Ughi, Positivity properties of viscosity solution of a degenerate parabolic equation, *Nonlinear Anal*, 14(1990), 571-592.
- [2] D.Jiang and W.Gao, Singular boundary value problems for the one-dimension p -Laplacian, *J.Math.Ana.Appl*, 270(2002), 571-581.
- [3] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, Paris (1999).
- [4] W.Zhou, Positive solutions for a singular second order boundary value problem, *Applied Mathematics E-Notes*, 9(2009), 154-159.