



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE SALHI AHMED -NAÂMA-

INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE
pour obtention du diplôme de
MASTER EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : Analyse fonctionnelle et EDP

FILIÈRE : Mathématiques

Thème

**Connexions Linéaires dans les
Variétés de Dimension une**

Présenté par :

KOUMAD AFAF

devant le jury composé de :

Encadreur : LATTI Fethi

M.C.B

C.U.N Salhi Ahmed

Président : MEKKI Slimene

M.A.A

C.U.N Salhi Ahmed

Examineur : BELGUERNA Abderrahmane

M.C.A

C.U.N Salhi Ahmed

Année universitaire 2020/2021

DÉDICACE

Tout d'abord, je remercie *ALLAH* de m'avoir donnée la capacité et la patience d'aller jusqu'au bout du rêve.

Je dédie ce mémoire à mon père « *Koumad Taib* », qui a été toujours pour moi l'exemple dans cette vie.

La chandelle de ma vie ma très chère mère « *Ben hako Amina* », qu'elle trouve ici l'expression de mes sentiments les plus profonds, pour le confort moral qu'elle m'a assuré tout au long de mes études.

A mes soeurs, mon frère : « *Asmaa* », « *Kholod* », « *Nadir* »

A mon mari : « *Rachid* »

A l'encadreur : Monsieur « *Latti Fathi* » qui m'a guidée pour réaliser ce travail avec succès. A tous mes amis.

Enfin, je dédie ce mémoire à tous ceux qui mon soutenue de loin ou de prêt.

Merci.

Remerciements

Avant tout, nous remercions DIEU pour le tracé qu'il donne au chemin de notre vie, qui nous aide et nous guide, qui nous a permis de réaliser ce travail et nous a donné le pouvoir de le terminer.

Je veux remercier sincèrement Monsieur

« *Latti Fathi* » en tant qu'encadreur et guide pour tout le soutien, l'aide ainsi que pour ses précieux conseils et ses encouragements lors de la réalisation de notre mémoire. Nous tenons aussi à remercier nos parents pour le soutien moral et matériel. Si nous sommes ici aujourd'hui, c'est grâce à vous !

Nous remercions aussi les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail. Nous espérons que leurs remarques, critiques, orientation et conseils nous seront très utiles pour une continuité dans le processus de recherche.

Enfin, nous remercions nos amis et collègues de la promotion mathématiques académique 2021.

Merci

Table des matières

Introduction	5
1 Préliminaires	7
1.1 Variétés Différentiables	7
1.1.1 Variété Différentiables	7
1.1.2 Espace Tangent	8
1.1.3 Tenseur	11
1.1.4 Formes Différentielles	12
1.1.5 Groupe de Lie et Algèbre de Lie	13
1.2 Fibrés	17
1.2.1 Fibré Principal	17
1.2.2 Fibré Associé	21
1.2.3 Fibré Vectoriel	22
2 Connexion Linéaire	24
2.1 Connexion dans un Fibré Principal	24
2.1.1 1- Forme de Connexion dans un Fibré Principal	24
2.1.2 Transport Parallèle	31
2.1.3 2-Forme de Courbure d'une Connexion dans un Fibré Principal	34
2.2 Connexion dans un Fibré Vectoriel	41
2.2.1 Transport Parallèle	41
2.2.2 Dérivation Covariante d'une Connexion dans un Fibré Vectoriel	42
2.2.3 Le Tenseur de Courbure	46
2.3 Connexion Linéaire dans une Variété	46
2.3.1 Dérivation Covariante d'une Connexion Linéaire	46
2.3.2 Tenseur de Torsion et Tenseur de Courbure	47
3 Métriques Riemanniennes dans une Variété	57
3.1 Variété Riemannienne	57
3.2 Connexion Riemannienne	57
3.3 La courbure Riemannienne	61

4 Connexions et Métriques dans \mathbb{R}	62
4.1 La Structure Différentiable Canonique de \mathbb{R}	62
4.1.1 La Variété \mathbb{R}	62
4.1.2 Difféomorphisme de \mathbb{R}	62
4.2 Connexions Linéaires dans \mathbb{R}	63
4.2.1 Connexion Linéaire dans \mathbb{R}	63
4.2.2 Connexions Linéaires Difféomorphes	64
4.3 Métriques Riemanniennes sur \mathbb{R}	67
4.3.1 Métrique Riemannienne sur \mathbb{R}	67
4.3.2 Métriques Riemanniennes Isométriques	67
4.3.3 Connexion Linéaire Métrique	69
4.3.4 Comparaisons deux Métriques Ayant la même Connexion	70
Bibliographie	71

Introduction

La thématique générale de recherche abordée dans ce mémoire concerne tout d'abord la description de module des connexions linéaires dans la variété \mathbb{R} . Et en suite l'étude du problème d'isomorphisme en abordant les classes d'isomorphisme de connexions linéaires dans \mathbb{R} .

Deux Connexions linéaires ∇ et $\bar{\nabla}$ dans \mathbb{R} sont difféomorphes (isomorphes) ($\nabla \sim \bar{\nabla}$) s'il existe un difféomorphisme f de \mathbb{R} qui transforme ∇ à $\bar{\nabla}$. L'ensemble des classes d'isomorphisme de connexions linéaires dans \mathbb{R} est appelé module des connexions linéaires dans la variété \mathbb{R} .

On démontre que deux Connexions linéaires dans \mathbb{R} ne sont pas toujours difféomorphes et la même chose pour les métriques dans \mathbb{R} ne sont pas toujours isométriques et que localement toutes les connexions linéaires sont difféomorphes et toutes les métriques sont isométriques. L'organisation générale de ce manuscrit est décomposée en (quatre) chapitres :

- ★ Le premier chapitre constitue une série de rappels sur les notions générales de la géométrie (les variétés différentiables, l'espace tangent, les tenseurs et les groupes de Lie). Ce chapitre est consacré à l'étude des notions de fibrés (le fibré principal, le fibré associé et le fibré vectoriel, en donnant des exemples, Surtout l'exemple du fibré principal des repères linéaires).
- ★ Le deuxième chapitre traite de la connexion dans un fibré principal en présentant la 1-forme d'une connexion dans un fibré principal, le transport parallèle et la 2-forme de courbure d'une connexion. Dans ce chapitre nous allons étudier la connexion dans un fibré vectoriel, dérivation covariante d'une connexion dans un fibré vectoriel. Nous allons étudier la connexion linéaire dans une variété, dérivation covariante d'une connexion linéaire, à la fin de ce chapitre on définit le tenseur de courbure et le tenseur de torsion.
- ★ Le Troisième chapitre traite les métriques Riemanniennes sur une variété, connexion métrique, et connexion de Levi-Civita.
- ★ Le quatrième chapitre qui est la partie originale de ce travail, est consacré à l'étude des connexions linéaires et métriques Riemanniennes dans la variété \mathbb{R} . Dans ce chapitre nous allons étudier les connexions linéaires difféomorphes, et les métriques Riemanniennes isométriques. Nous

allons aussi comparer deux métriques Riemanniennes ayant la même connexion. Ce chapitre est le plus important car nous allons aussi appliquer les notions précédentes sur la variété \mathbb{R} .

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Variétés Différentiables

1.1.1 Variété Différentiables

Définition 1.1.1. Soit M un espace topologique séparé de (Hausdorff), si pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x , et un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, où $\varphi(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que M est une variété topologique de dimension n . Le couple (U, φ) est une carte locale de M .

Un ensemble de cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M tout entier est appelé atlas de dimension n de la variété M .

Définition 1.1.2. Soit M une variété topologique de dimension n . On dit que M est une variété différentiable de dimension n , et de classe C^p ($p \geq 1$), s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M tel que pour tous $i, j \in I, U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe C^p ($p \geq 1$).

Nous dirons alors que l'atlas $\{(U_i; \varphi_i)\}_{i \in I}$ est de classe C^p ($p \geq 1$).

Exemple 1.1.1. \mathbb{R} muni l'atlas $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ est une variété différentiable de dimension 1 est de classe C^∞ .

Définition 1.1.3. On dit qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ , si pour chaque carte $\{(U; \varphi)\}$ de M la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ . L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M noté $C^\infty(M)$.

1.1.2 Espace Tangent

Définition 1.1.4. Soient M une variété différentiable et $x \in M$. Une application $A : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une dérivation en x si elle satisfait les règles suivantes pour tous $f, g \in C^\infty(M)$:

1. $A(f + g) = A(f) + A(g)$
2. $A(f \cdot g) = A(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot A(g)$
3. f est constante au voisinage de $x \Rightarrow A(f) = 0$.

L'ensemble de toutes les dérivation en x , s'appelle l'espace tangent de M en x , il est noté $T_x M$. Par définition un vecteur tangent de M en x est un élément de $T_x M$.

Exemple 1.1.2. Soit $\alpha : I \rightarrow M$ un chemin sur M , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On définit un vecteur tangent en $x = \alpha(t)$, noté $\dot{\alpha}(t)$ par $\dot{\alpha}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)$ avec $f \in C^\infty(M)$.

Remarque 1.1.1.

1. $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n .
2. Soit $\{(U; \varphi)\}$, une carte locale en point $x \in M$.
 - i) $\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ les coordonnées locales au voisinage de x .
 - ii) Une base de $T_x M$ est donnée par les n dérivations $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$
3. $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ est appelé le fibré tangent à M .
4. $T_x^* M$ l'espace cotangent à M en x . On sait que localement $\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right)$ est une base de $T_x M$. on note par $(dx^i|_x)$ sa base dual, nous avons

$$\left\langle dx^i|_x; \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_x \right\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_i^j$$

5. $T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$ est appelé le fibré cotangent à M .

Définition 1.1.5. Soit M une variété différentiable.

- $\pi : TM \rightarrow M$ la projection de TM sur M définie par $\pi(x, X) = x$ est une application surjective et de classe C^∞ .
- Une section de TM est une application $X : M \rightarrow TM$ telle que :

$$\pi \circ X = id_M$$

- Une telle section de TM de classe C^∞ est appelée champ de vecteurs sur M . L'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M est noté par $\mathfrak{X}(M)$.

Définition 1.1.6. Soit M une variété différentiable. Le crochet de Lie noté $[\cdot, \cdot]$, est définie par $[X, Y] = XY - YX$ pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire et antisymétrique.
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, pour X, Y et $Z \in \mathfrak{X}(M)$
3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$, pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in C^\infty(M)$
4. $[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$ où $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

Définition 1.1.7. Soit $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme de classe C^k , ($k \geq 1$).

- On définit l'application f_* par

$$\begin{aligned} f_* : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(N) \\ X &\longmapsto f_*(X) = df \circ X \circ f^{-1} \end{aligned}$$

Pour tout $y \in N$, $(f_*(X))_y = d_{f^{-1}(y)} f (X_{f^{-1}(y)}) \cdot f_*(X)$ est appelé l'image direct de X .

- On définit l'application f^* par

$$\begin{aligned} f^* : \mathfrak{X}(N) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Y &\longmapsto f^*(Y) = (f^{-1})_*(Y) \end{aligned}$$

$f^*(Y)$ est appelé l'image inverse de Y .

Définition 1.1.8. Soit M une variété différentiable.

Une distribution S de dimension r ($r \leq \dim M$) est une application qui associé à chaque $x \in M$ un sous-espace vectoriel S_x de $T_x M$.

Une distribution S est différentiable si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et r champs de vecteurs X^1, \dots, X^r sur U telle que X^1_y, \dots, X^r_y est une base de S_y pour tout $y \in U$

Définition 1.1.9. Soit M une variété différentiable.

Un Groupe à un paramètre de transformations de M est une application $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ avec $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ telle que :

1. $\forall t \in \mathbb{R} \varphi_t : M \rightarrow M$ est une transformations de M .
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}, \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ et $\forall x \in M, \varphi_0(x) = x$.

Remarque 1.1.2. Tout groupe à un paramètre de transformations φ_t de M , induit un champ de vecteurs X tel que pour tout $x \in M$, X_x est un vecteur tangent de la courbe $x(t) = \varphi_t(x)$, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi_t(x)) \right|_{t=0} = X_x$$

Définition 1.1.10. Soit U un ouvert de M et I un intervalle ouvert contenant 0 . Groupe à un paramètre locale de transformations est une application $\varphi : I \times U \rightarrow M$ avec $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ telle que :

1. $\forall t \in I, \varphi_t : U \rightarrow \varphi_t(U)$ est une difféomorphisme.
2. $\forall t, s \in I, \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ et $\forall x \in U, \varphi_0(x) = x$.

Proposition 1.1.1. Soit X un champ de vecteurs sur une variété différentiable M . Pour chaque point x_0 de M il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un intervalle ouvert I contenant 0 de \mathbb{R} et un groupe à un paramètre locale de transformations $\varphi_t : U \rightarrow M, t \in I$ induit X .

Proposition 1.1.2. Soit φ une transformations de M , si X le champ de vecteurs associé au groupe à un paramètre locale de transformations φ_t , alors le champ de vecteurs φ_*X associé à $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.

Preuve. C'est claire que $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ est un groupe à un paramètre locale de transformations. Soit $x \in M$ et $y = \varphi^{-1}(x) \in M$ comme φ_t associé à X alors $X_y \in T_yM$ est vecteur tangent de la courbe $x(t) = \varphi_t(y)$ avec $x(0) = \varphi_0(y) = y$:

$$\begin{aligned} (\varphi_*X)_x &= (d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})_z \\ &= d_{\varphi^{-1}(x)}\varphi (X_{\varphi^{-1}(x)}) \\ &= d_y\varphi (X_y) \\ &= (\varphi_*)_y (X_y) \in T_zM \end{aligned}$$

mais :

$$\begin{aligned} (\varphi_*)_y (X_y) &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \varphi_t) (y) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}) (x) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

donc $(\varphi_*X)_x$ est un vecteur tangent de la courbe $y(t) = (\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}) (x)$. Alors φ_*X associé à $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.

Proposition 1.1.3. Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M et φ_t le groupe à un paramètre locale de transformations associé à X , alors :

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (\varphi_t)_* Y)$$

1.1.3 Tenseur

Définition 1.1.11.

- Pour tout $x \in M$ nous définissons l'espace vectoriel :

$$T_x^{(p,q)} M = \underbrace{T_z M \otimes T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_z^* M \otimes T_x^* M \otimes \cdots \otimes T_x^* M}_{q \text{ fois}}$$

- Un element $T \in T_x^{(p,q)} M$ est un tenseur de type (p, q) au-dessus de x . Dans une base associée à des coordonnées (x^i) au voisinage de x , il s'écrit :

$$T|_x = T_{j_1 j_2 \cdots j_q}^{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(x) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}(x) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}(x) \otimes dx^{j_1} \Big|_x \otimes dx^{j_2} \Big|_x \otimes \cdots \otimes dx^{j_q} \Big|_x$$

- On note $T^{(p,q)} M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)} M$ l'espace vectoriel des tenseurs de type (p, q) .

Définition 1.1.12. Un champ de tenseurs de type (p, q) est une section de classe C^∞ de $T^{(p,q)} M$. L'ensemble des champs de tenseur de type (p, q) est noté par $\mathfrak{T}^{(p,q)} M$.

Définition 1.1.13. Soient M, N deux variétés différentiables.

- Soit $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme de classe C^k , ($k \geq 1$). On définit l'application f^* par :

$$\begin{aligned} f^* : T^{(0,r)}(N) &\longrightarrow T^{(0,r)}(M) \\ T' &\longmapsto f^* T' \end{aligned}$$

telle que :

Pour tous $X_1; \dots; X_r \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(f^* T')(X_1; \dots; X_r) = T'(f_*(X_1); \dots; f_*(X_r))$$

Pour tout $x \in M$:

$$((f^* T')(X_1; \dots; X_r))_x = T'_{f(x)} \left((f_*(X_1))_{f(x)}; \dots; (f_*(X_r))_{f(x)} \right)$$

$(f^* T')$ est appelé l'image inverse (Pull-back) de T' .

- Soit $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme de classe C^k , ($k \geq 1$). On définit l'application f_* par :

$$\begin{aligned} f_* : T^{(0,r)}(M) &\longrightarrow T^{(0,r)}(N) \\ T &\longmapsto f_* T = (f^{-1})^* T \end{aligned}$$

$(f_* T)$ est appelé image direct de T .

Exemple 1.1.3. Tout champ de vecteurs est un champ de tenseurs de type $(1, 0)$.

1.1.4 Formes Différentielles

Définition 1.1.14. Soit M une variété différentiable de dimension n .

Une r -forme différentielle (ou plus brièvement r -forme) sur M est un champ de tenseurs de type $(0, r)$ complètement antisymétrique. Nous notons $\Omega^r(M)$ l'espace vectoriel de ces r formes.

Une r -forme différentielle est donc une application $C^\infty(M)$ -multilinéaire antisymétrique de $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)$ (r fois) dans $C^\infty(M)$.

Définition 1.1.15. Pour tout $x \in M$, posons $\bigwedge^r T_x^* M$ l'espace vectoriel des r -formes multilinéaire antisymétrique sur $T_x M$. Définissons alors la variété

$$\bigwedge^r T^* M = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^r T_x^* M$$

appelée fibré des Formes différentielles. Alors toute r -Forme différentielle est une section de classe C^∞ de ce Fibré.

Remarque 1.1.3.

- Si (dx^i) est une base locale des 1-formes différentielle au-dessus de l'ouvert U d'une carte locale de M de coordonnées locales (x^i) , nous posons :

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \text{sign}(\sigma) dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes dx^{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{\sigma(r)}}$$

où Σ_r le groupe des permutation de $\{1; \dots; n\}$, et $\text{sign}(\sigma)$ est la signature σ .

Si $i_1 < \cdots < i_r$ alors les $(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r})$ engendrent localement $\Omega^r(M)$ c'est-à-dire toute r -forme ω s'écrit au-dessus de U

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

- Pour $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^s(M)$ nous pouvons définir le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$ par la formule :

$$\omega \wedge \eta (X_1, \dots, X_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{r+s}} \text{sign}(\sigma) \omega (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \eta (X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})$$

Ce produit donne à l'espace vectoriel $\Omega(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r(M)$ une structure d'algèbre.

Définition 1.1.16. La différentielle extérieure est l'unique application $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ telle que :

- d est \mathbb{R} -linéaire avec $d(\Omega^r(M)) \subset \Omega^{r+1}(M)$.
- Pour $f \in C^\infty(M)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$, $df(X) = X(f)$.
- Pour $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^s(M)$, $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge (d\eta)$.
- $d^2 = 0$
- $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \omega_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \Rightarrow d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} d\omega_{i_1 i_2 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$

Proposition 1.1.4. Soit ω une r -forme sur M alors :

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \dots, X_r) &= \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i \left(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \end{aligned}$$

Définition 1.1.17. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension p . Une r -forme différentielle ω à valeurs dans V est une application \mathbb{R} -multilinéaire antisymétrique de $T_x M \times T_x M \times \dots \times T_x M$ (r fois) vers V . Nous noterons $\Omega^r(M, V)$ l'espace vectoriel de ces formes.

Si (e_j) une base de V alors $\omega = \sum_{j=1}^p \omega^j e_j$ et $d\omega = \sum_{j=1}^p d\omega^j e_j$ où ω^j sont des r -formes usuelles sur M .

1.1.5 Groupe de Lie et Algèbre de Lie

Définition 1.1.18. Un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure de variété différentiable telle que :

$$G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G, G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$$

sont des applications différentiables.

Remarque 1.1.4.

- Soit $L_a : G \rightarrow G$ telle que $L_a(x) = ax$, (resp $R_a : G \rightarrow G$ telle que $R_a(x) = xa$) pour tout $a \in G$ les translations à gauche, (resp à droite). vérifient les propriétés suivantes : $L_a \circ L_b = L_{ab}$, $R_a \circ R_b = R_{ba}$, $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$, et

$$\begin{aligned} L_e &= R_e \\ &= id_G(L_a \circ R_{a^{-1}})(x) \\ &= (R_{a^{-1}} \circ L_a)(x) \\ &= axa^{-1} \end{aligned}$$

pour tous a, b et $x \in G$

- Un homomorphisme (resp. isomorphisme) de groupes de Lie est un homomorphisme (resp. isomorphisme) de groupes entre deux groupes de Lie qui est différentiable.

Définition 1.1.19. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une application bilinéaire antisymétrique $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, vérifiant l'identité suivante : $\forall X, Y$ et $Z \in \mathfrak{g}$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Définition 1.1.20. Un homomorphisme (resp. isomorphisme) d'algèbres de Lie est une application linéaire (resp. linéaire et bijective) entre deux algèbres de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ telle que :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X, Y])$$

Définition 1.1.21. Soit G un groupe de Lie et $X \in \mathfrak{X}(G)$:

- X est invariant à gauche si $\forall a \in G, (L_a)_* X = X$ i.e. $\forall a, b \in G$

$$d_b L_a (X_b) = X_{ab}$$

- X est invariant à droite si $\forall a \in G, (R_a)_* X = X$ i.e. $\forall a, b \in G$

$$d_b R_a (X_b) = X_{ba}$$

Remarque 1.1.5. Soit \mathfrak{g} l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche dans un groupe de Lie G , \mathfrak{g} muni le crochet de Lie des champs de vecteurs est une algèbre de Lie. \mathfrak{g} appelée algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

Définition 1.1.22. Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de groupe de Lie G . L'application exponentielle est l'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}, \exp X = \varphi_1(e)$, où φ_t le groupe à un paramètre associé à X .

On pose $a_t = \varphi_t(e)$, a_t appelé le sous-groupe à un paramètre associé à X , vérifié $a_t = \exp(tX), \varphi_t(x) = x \cdot \exp(tX)$.

Définition 1.1.23. Une représentation d'un groupe de Lie G sur un espace vectoriel V est un homomorphisme de groupes de Lie $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ où $Gl(V)$ le groupe des isomorphismes de V .

Remarque 1.1.6.

- La représentation adjointe de G sur \mathfrak{g} noté par $Ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$, telle que :

$$Ad_a A = \left. \frac{d}{dt} (a \cdot \exp(tA) \cdot a^{-1}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (a \cdot a_t \cdot a^{-1}) \right|_{t=0}$$

pour tout $a \in G$ et $A \in \mathfrak{g}$.

- $a \cdot a_t \cdot a^{-1}$ le sous groupe à un paramètre associé à $Ad_a A$ pour tout $a \in G$ et $A \in \mathfrak{g}$.
- $Ad_a A = (R_a - 1)_* A$ pour tout $a \in G$ et $A \in \mathfrak{g}$.

Définition 1.1.24. Soient G un groupe de Lie, et M une variété différentiable. Une action à droite de G sur M est une application différentiable

$$\begin{aligned} M \times G &\longrightarrow M \\ (x, a) &\longmapsto x \cdot a \end{aligned}$$

telle que :

- $x \cdot e = x$ et $x \cdot (a \cdot b) = (x \cdot a) \cdot b$ pour tout $a, b \in G$ et $x \in M$.
- L'application $R_a : M \rightarrow M$ telle que $R_a x = x \cdot a$ pour tout $a \in G, x \in M$ est une transformation de M .

On dit que G agit différentiablement à droite sur M .

Remarque 1.1.7.

- On définit le stabilisateur G_x de $x \in M$ par $G_x = \{a \in G, R_a x = x\}$; les stabilisateurs G_x sont aussi appelés groupe d'isotropie de x .
- On dit que G agit librement sur M si $\forall a \in G, \forall x \in M, [R_a x = x \Rightarrow x = e]$ ou bien $\forall x \in M, G_x = \{e\}$

Définition 1.1.25. Soit $A \in \mathfrak{g}$ et φ_t le groupe à un paramètre associé à A , si G agit sur M à droite. On définit un champ de vecteurs $A^* \in \mathfrak{X}(M)$ par :

$$A_x^* = \left. \frac{d}{dt} (R_{a_t} x) \right|_{t=0}$$

$x \in M, a_t = \varphi_t(e)$.

A^* est appelé le champ de vecteurs fondamental correspondant à A .

Proposition 1.1.5. Soit G un groupe de Lie qui agit à droite sur une variété M .

- L'application $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ telle que $\sigma(A) = A^*$ est homomorphisme d'algèbres de Lie.
- Si G agit librement sur M pour chaque $A \in \mathfrak{g}, A \neq 0$, alors $\sigma(A) \neq 0$ sur $\mathfrak{X}(M)$.

Preuve.

i) Soit $x \in M$ on pose $\sigma_x : G \rightarrow M$ telle que $\sigma_x(a) = x \cdot a$ pour tout $a \in G$ Alors $(\sigma_x)_* A_e = (\sigma A)_x$, donc σ est linéaire car $(\sigma_x)_*$ est linéaire. Montrons $[\sigma A, \sigma B] = [A, B]$ Soient $A, B \in \mathfrak{g}, x \in M$, On a :

$$[\sigma A, \sigma B]_x = [A^*, B^*]_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [B_x^* - ((R_{a_t})_* B_x^*)] \text{ et } B_x^* = (\sigma B)_x = (\sigma_x)_* B_e$$

$$(R_{a_t})_* : T_x M \rightarrow T_{x \cdot a_t} M \text{ avec } (R_{a_t})_* (A_x^*) = ((R_{a_t})_* A_x^*)_{x \cdot a_t}$$

$$\begin{aligned} ((R_{a_t})_* B_x^*)_x &= (R_{a_t})_* (B_{x \cdot a_t}^*) \\ &= (R_{a_t})_* \circ (\sigma_{x \cdot a_t}^{-1})_* (B_e) \\ &= (R_{a_t} \circ \sigma_{x \cdot a_t}^{-1})_* (B_e) \\ &= (\sigma_x \circ R_{a_t} \circ L_{a_t}^{-1})_* (B_e) \\ &= (\sigma_x)_* \circ (R_{a_t})_* \circ (L_{a_t}^{-1})_* (B_e) \\ &= (\sigma_x)_* \circ (R_{a_t})_* (B_e) \\ &= (\sigma_x)_* (Ad_{a_t}^{-1} (B_e)) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} [\sigma A, \sigma B]_x &= [A^*, B^*]_x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [B_x^* - ((R_{a_t})_* B_x^*)_x] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\sigma_x)_* B_e - (\sigma_x)_* (Ad_{a_t}^{-1} (B_e))] \\ &= (\sigma_x)_* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [B_e - Ad_{a_t}^{-1} (B_e)] \right) \\ &= (\sigma_x)_* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [B_e - (R_{a_t})_* B_e] \right) \\ &= (\sigma_x)_* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [B_e - (\varphi_t)_* B_e] \right) \\ &= (\sigma_x)_* ([A, B]_e) = (\sigma[A, B])_x \end{aligned}$$

avec $a_t = \varphi_t(e)$ et $\varphi_t(x) = a \cdot x$.

D'où $[\sigma A, \sigma B] = \sigma[A, B]$ i.e. $[A^*, B^*] = \sigma[A, B]^*$. Alors σ est un homomorphisme d'algèbre de Lie.

ii) Il suffit de montrer que σ est injective.

$$\begin{aligned} \text{supposons que } \sigma A = 0 &\implies A^* = 0 \\ &\implies \text{pour tout } t \text{ et } x \in M, \frac{d}{dt}(R_{a_t}x) = 0 \\ &\implies \text{pour tout } tx \in M, R_{a_t}x = \text{const} \\ &\implies \text{pour tout } tx \in M, R_{a_t}x = R_{a_0}x = x \end{aligned}$$

et puis que G agit librement sur M i.e. pour tout t et $x \in M$

$$R_{a_t}x = x \implies a_t = e$$

Alors $A_e = \frac{d}{dt}(\varphi_t(e)) = \frac{d}{dt}(a_t) = 0 \implies A = 0$ donc σ est injective.
Donc $A \neq 0 \implies \sigma A \neq 0$.

1.2 Fibrés

1.2.1 Fibré Principal

Définition 1.2.1. Un fibré principal est la donnée d'un triplet (P, M, G) où P et M sont des variétés différentiables, G un groupe de Lie telles que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. G agit librement à droite sur P .
2. $M = P/G$ et $\pi : P \rightarrow M$ la projection canonique est différentiable.
3. Pour tout x de M , il existe un voisinage ouvert U de x , et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ tels que $\phi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$ et $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ avec $\varphi(u \cdot a) = \varphi(u) \cdot a$ pour tous $u \in \pi^{-1}(U)$, $a \in G$.
Un fibré principal noté $P(M, G, \pi)$ ou $P(M, G)$.

Vocabulaire 1.2.1.

- P est appelé l'espace total de fibré.
- M est appelé la base de fibré.
- G est appelé groupe structural du fibré.
- $\pi^{-1}(x)$ est une sous variété de P , elle est appelée la fibre au-dessus de $x \in M$.
- pour tout $x \in M$ la fibre $\pi^{-1}(x)$ est difféomorphe à G , (les fibres sont les orbites de l'action).

Définition 1.2.2. Soient G un groupe de Lie et M une variété différentiable, G agit librement sur $P = M \times G$ pour chaque $b \in G$, $R_b : M \times G \rightarrow M \times G$ avec $R_b(x, a) = (x, a \cdot b)$ le fibré principal obtenu est appelé le fibré trivial.

Remarque 1.2.1.

- Soit $P(M, G)$ un fibré principal, d'après la proposition (1.1.5) l'application $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ telle que $\sigma(A) = A^*$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie.
- Pour tout $u \in P, A_u^* \in T_u P$ l'application : $\mathfrak{g} \ni A \mapsto A_u^* \in T_u P$ est un isomorphisme linéaire de \mathfrak{g} vers $T_u(\pi^{-1}(x))$ avec $\pi(u) = x \in M$.
Car :

$$\dim \mathfrak{g} = \dim G = \dim \pi^{-1}(x) = \dim T_u(\pi^{-1}(x))$$

et cette application est linéaire grâce de linéarité de σ .

Théorème 1.2.1. Soit A^* le champ de vecteurs fondamental correspondant à $A \in \mathfrak{g}$, pour tout $a \in G (R_a)_* A^*$ est un champ de vecteurs fondamental correspondant à $(Ad_{a^{-1}}) A \in \mathfrak{g}$.

Preuve. Soit A^* le champ de vecteurs fondamental correspondant à $A \in \mathfrak{g}$, soit φ_t est le groupe à un paramètre associé à A . Puisque $a_t = \varphi_t(e) = \exp(tA)$, R_{a_t} le groupe à un paramètre associé à A^* . Pour tout $a \in G, (R_a)_* A^*$ est un champ de vecteurs sur P . d'après la proposition (1.1.2) le groupe à un paramètre $R_a \circ R_{a_t} \circ R_{a^{-1}}$ est associé à $(R_a)_* A^*$.

Mais $R_a \circ R_{a_t} \circ R_{a^{-1}} = R_{a^{-1} \cdot a_t \cdot a}$ et $a^{-1} \cdot a_t \cdot a$ le sous groupe à un paramètre associé à $(Ad_{a^{-1}}) A$.

car :

$$(Ad_a) A = \left. \frac{d}{dt} (a \cdot \varphi_t(e) \cdot a^{-1}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (a \cdot \exp(tA) \cdot a^{-1}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (a \cdot a_t \cdot a^{-1}) \right|_{t=0}$$

Définition 1.2.3. Soit $P(M, G)$ un fibré principal, et $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de M . D'après la condition 3. de la définition (1.2.1), il existe un difféomorphisme $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ tels que $\phi_\alpha(u) = (\pi(u), \varphi_\alpha(u))$ et $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$ avec $\varphi_\alpha(u \cdot a) = \varphi_\alpha(u) \cdot a$ pour tous $u \in \pi^{-1}(U_\alpha), a \in G$. Pour $\alpha, \beta \in I, u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, on a $\varphi_\beta(u \cdot a) \cdot (\varphi_\alpha(u \cdot a))^{-1} = \varphi_\beta(u) \cdot (\varphi_\alpha(u))^{-1}$ dépend de u car si $u' \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), u' = u \cdot b, b \in G$, on a

$$\varphi_\beta(u' \cdot a) \cdot (\varphi_\alpha(u' \cdot a))^{-1} = \varphi_\beta(u \cdot b \cdot a) \cdot (\varphi_\alpha(u \cdot b \cdot a))^{-1} = \varphi_\beta(u) \cdot (\varphi_\alpha(u))^{-1}$$

Nous avons défini des applications $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ par :

$$\psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) = \varphi_\beta(u) \cdot (\varphi_\alpha(u))^{-1}.$$

Les applications $\psi_{\beta\alpha}$ sont appelées les fonctions de transitions du fibré $P(M, G)$ correspondant à $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Propriété 1.2.1.

- $\psi_{\beta\alpha}(x) = (\psi_{\alpha\beta})^{-1}(x)$ pour tout $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.
- $\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x) \cdot \psi_{\beta\alpha}(x)$ pour tout $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$
- $\psi_{\alpha\alpha}(x) = e$ pour tout $x \in U_\alpha$.

Proposition 1.2.1. Soient M une variété différentiable, $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de M , G un groupe de Lie et des applications $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ telle que $\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x) \cdot \psi_{\beta\alpha}(x)$ pour tout $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Alors il existe une structure de fibré principal $P(M, G)$ avec les applications $\psi_{\beta\alpha}$ sont des fonctions de transitions.

Définition 1.2.4. Un homomorphisme de fibrés principaux f de $P'(M', G')$ vers $P(M, G)$ consiste en une application différentiable $f' : P' \rightarrow P$ et un homomorphisme $f'' : G' \rightarrow G$ tels que $f''(u' \cdot a') = f'(u') f''(a')$ pour tous $u' \in P', a' \in G'$ pour simplifier les notation nous notons f' et f'' par f , on obtient $f(u' \cdot a') = f(u') f(a')$ pour tous $u' \in P', a' \in G'$. Si $G' = G$ on obtient $f(u' \cdot a') = f(u') f(a')$ pour tous $u' \in P', a' \in G$.

Définition 1.2.5. Soit $P(M, G)$ un fibré principal. Une section de P est une application $\sigma : M \rightarrow P$ telle que $\pi \circ \sigma = id_M$ i.e. $(\sigma(x) \in \pi^{-1}(x))$ pour tout $x \in M$. On note $\Gamma(P)$ l'ensemble des sections de P . Localement au-dessus de chaque ouvert U on a $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times P$ un difféomorphisme nous avons des sections locales $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset P$ définie par $\sigma(x) = \phi^{-1}(x, e)$ pour tout $x \in M$.

Remarque 1.2.2. Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de M , on a $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ un difféomorphisme pour tout α . $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ les fonctions de transitions pour tous α et β . $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$ est une section sur U_α définie par $\sigma_\alpha(x) = \phi_\alpha^{-1}(x, e)$ pour tous α . Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ pour tous α et β . On a :

$$\left(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \right) (x, a) = \left(x, \varphi_\alpha(u) \cdot (\varphi_\beta(u))^{-1} \cdot a \right) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x) \cdot a)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \right) (x, e) &= (x, \psi_{\alpha\beta}(x)) \Rightarrow \phi_\alpha(\sigma_\beta(x)) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x)) \\ &\Rightarrow \sigma_\beta(x) = \phi_\alpha^{-1}(x, \psi_{\alpha\beta}(x)) \\ &\Rightarrow \sigma_\beta(x) = \phi_\alpha^{-1}(x, e) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x) \\ &\Rightarrow \sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x) \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1. Soit G un groupe de Lie, et H un sous groupe de Lie de G . Nous posons G/H la variété quotient pour la relation d'équivalence sur G définie par : $a \sim a' \Leftrightarrow \exists b \in H, a = a' \cdot b$. Alors G peut être considéré comme fibré principal de groupe structural H , de base G/H et de projection $\pi : G \rightarrow G/H$ projection du quotient. l'action à droite de H est simplement $a \mapsto a \cdot b$ pour tout $b \in H$.

Exemple 1.2.2. Soit M variété différentiable de dimension n . Un repère linéaire u en point $x \in M$ est une base (X_1, X_2, \dots, X_n) de $T_x M$. Nous pouvons considérer l'ensemble $L_x(M)$ de tous les repères en x .

Soit $L(M) = \bigcup_{x \in M} L_x(M)$ l'ensemble de tous les repères de M :

1. $GL(n, \mathbb{R})$ agit librement sur $L(M)$ par l'action.

$$\begin{aligned} L(M) \times GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow L(M) \\ (u, a) &\longmapsto u \cdot a \end{aligned}$$

Où $a = (a_j^i)$ et $u = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tels que $u \cdot a = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ et $Y_i = \sum_{j=1}^n a_j^i X_j$.

2. $L(M)/GL(n, \mathbb{R}) \approx M$ car $L(M)/GL(n, \mathbb{R}) = \{[u] = L_x(M), u \in L(M)\}$ et l'application $\pi : L(M) \rightarrow M$ telle que, pour tout $x \in M$, il existe $u \in L(M)$, $\pi(u) = [u] = x$.
3. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x , et un difféomorphisme ϕ , soit (x^i) les coordonnées locales dans U . Pour tout $u \in L(M)$ un repère linéaire en point x , on a

$$u = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } X_i = \sum_{k=1}^n X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \text{ où } \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \text{ une base de } T_x M$$

et $X_i^k \in GL(n, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \phi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times GL(n, \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \phi(u) = \left(x, (X_i^k) \right) \end{aligned}$$

Alors $L(M)(M, GL(n, \mathbb{R}))$ est un fibré principal.

Définition 1.2.6. On définit :

- un isomorphisme $\phi_u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ telle que $\phi_u(e_i) = X_i$ où (e_i) la base canonique de \mathbb{R}^n et $u = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un repère linéaire en $x \in M$, $\pi(u) = x$.
- une transformation $\phi_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\phi_a(e_j) = \sum_{i=1}^n a_j^i e_i \text{ et } \phi_{u \cdot a} = \phi_u \circ \phi_a$$

où $a = (a_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ et $u = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in L(M)$

Exemple 1.2.3. Soient $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $M = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}^*$:

1. G agit librement à droite sur P par l'action.

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (u, a) &\longmapsto R_a(u) = u \cdot a = (x \cdot a, y \cdot a), \text{ où } u = (x, y) \end{aligned}$$

2. Considérons $M = P/G$ car $\mathbb{R} \approx (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)/\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \pi : P &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto \pi(u) = x, \quad \text{où } u = (x, y) \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ u &\longmapsto \phi(u) = (\pi(u), \varphi(u)) = (x, y) \end{aligned}$$

Où, $u = (x, y)$, $\pi(u) = x$, $\varphi(u) = y$ et $\varphi(u \cdot a) = \varphi(u) \cdot a$.
Alors $P(L, G)$ est un fibré principal.

1.2.2 Fibré Associé

Définition 1.2.7. Soit $P(M, G)$ un fibre principal et F une variété différentiable, G agit à gauche sur F . Nous allons construire un fibre note $E(M, F, G, P)$ de fibre standard F , ce fibre s'appellera le fibré associé à P . Nous définissons une action à droite de G sur $P \times F$ par :

$$\begin{aligned} G \times P \times F &\longrightarrow P \times F \\ (a, (u, \xi)) &\longmapsto (u \cdot a, a^{-1} \cdot \xi) \end{aligned}$$

On note $E = P \times_G F$ le quotient de $P \times F$ par G . Nous avons tout d'abord le diagramme commutatif suivant : Où :

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{P_1} & P \\ P_E \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi_E} & M \end{array}$$

- P_1 est la projection sur la première composante de $P \times F$.
- P_E est la projection de quotient, on note $u \cdot \xi = P_E(u, \xi)$ pour tous $(u, \xi) \in P \times F$ avec $u \cdot \xi = \{(u \cdot a, a^{-1} \cdot \xi) \in P \times F, a \in G\}$
- π_E est la projection du fibre E définie par $\pi_E(u \cdot \xi) = \pi(u)$. On a pour tout $x \in M$, il existe U un voisinage ouvert de x d'après la troisième condition de définition (1.2.1) de $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$, nous avons une application $\varphi_E : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow F$ avec $\varphi_E(u \cdot \xi) = \varphi(u) \cdot \xi$ pour tous $\xi \in F$. telle que l'application $\phi : \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tels que

$$\phi(u \cdot \xi) = (\pi(u \cdot \xi), \varphi(u \cdot \xi))$$

est un difféomorphisme par la condition que $\pi_E^{-1}(U)$ est un ouvert de E . La différentiabilité de π_E est induite par celle de π et de P_E .

Proposition 1.2.2. Soient $P(M, G)$ un fibre principal et $E(M, F, G, P)$ un fibré associé à P . La projection

$$\begin{aligned} p_E : P \times F &\longrightarrow E \\ (u, \xi) &\longmapsto p_E(u, \xi) = u \cdot \xi \end{aligned}$$

induite une diffeomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi_u : F &\longrightarrow \pi_E^{-1}(x) \\ \xi &\longmapsto \phi_u(\xi) = p_E(u, \xi) \end{aligned}$$

et $\phi_{u \cdot a}(\xi) = \phi_u(a \cdot \xi)$ i.e. $(u \cdot a) \cdot \xi = u \cdot (a \cdot \xi)$ pour tous $u \in P, a \in G, \xi \in F$.

Preuve.

- $\phi_u : F \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$ telle que $\phi_u(\xi) = p_E(u, \xi)$ avec $\xi \in F, u \in P, x = \pi(u)$ $\phi_u(\xi) = \phi_u(\xi') \Leftrightarrow p_E(u, \xi) = p_E(u, \xi') \Leftrightarrow \exists a \in G, u = u \cdot a$ et $\xi' = a^{-1}\xi \Leftrightarrow a = e$ et $\xi = \xi'$ donc ϕ_u est injective.
- Soit $k \in \pi_E^{-1} = E_x, \exists (u, \xi) \in P \times F$, tel que $k = p_E(u, \xi)$ car π_E est surjective. donc $k = \phi_u(\xi)$ alors ϕ_u est surjective
- La différentiabilité de ϕ_u est induite par celle de π_E .
- Pour tous $u \in P, a \in G, \xi \in F$:

$$\begin{aligned} \phi_{u \cdot a}(\xi) &= (u \cdot a) \cdot \xi \\ &= \{((u \cdot a) \cdot b, b^{-1}\xi) \in P \times F, b \in G\} \text{ posons } a \cdot b = t \\ &= \{(u \cdot t, t^{-1} \cdot (a \cdot \xi)) \in P \times F, t \in G\} \\ &= u \cdot (a \cdot \xi) \\ &= \phi_u(a \cdot \xi) \end{aligned}$$

Définition 1.2.8. Soient $P(M, G)$ un fibré principal et $E(M, F, G, P)$ un fibre associé à P . Une section sur E est une application $\sigma : M \rightarrow E$ telle que $\pi \circ \sigma = id_M$ i.e $(\sigma(x) \in \pi^{-1}(x))$ Pour tout $x \in M$ On note $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections de E .

1.2.3 Fibré Vectoriel

Définition 1.2.9. Soient $P(M, G)$ un fibre principal et V un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et ρ une représentation de G sur $V, E(M, V, G, P)$ un fibré associé à P de fibre standard V, E est appelé le fibré vectoriel de fibre standard V . Chaque fibre $E_x = \pi_E^{-1}(x), x \in M$ muni d'une structure d'un espace vectoriel. il y a un isomorphisme linéaire, pour tous $u \in P, \pi(u) = x \in M$

$$\begin{aligned} \phi_u : V &\longrightarrow E_x = \pi_E^{-1}(x) \\ \xi &\longmapsto \phi_u(\xi) = u \cdot \xi \end{aligned}$$

Remarque 1.2.3.

- Si $V = \mathbb{K}^n$ et ρ une représentation de G sur \mathbb{K}^n i.e $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$, le fibré vectoriel $E(M, \mathbb{K}^n, G, P)$ est appelé réel ou complexe suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections de E , est un espace vectoriel de dimension infini.

Remarque 1.2.4. Soit $L(M)$ le fibré principal des repères linéaires sur M ($\dim M = n$). $GL(n, \mathbb{R})$ agit à gauche sur \mathbb{R}^n par la représentation naturelle ρ de $GL(n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n telle que :

$$\rho(a) \cdot \xi = a \cdot \xi = \left(\sum_{j=1}^n a_j^1 \xi^j, \dots, \sum_{j=1}^n a_j^n \xi^j \right) \in \mathbb{R}^n$$

où $a = \begin{pmatrix} a_j^i \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$.

Le fibré tangent TM au-dessus de M est un fibré vectoriel de fibre standard \mathbb{R}^m , et pour tout $x \in M$, $T_x M$ est un fibré au-dessus de x .

Chapitre 2

Connexion Linéaire

2.1 Connexion dans un Fibré Principal

2.1.1 1– Forme de Connexion dans un Fibré Principal

Définition 2.1.1. Soit $P(M, G)$ un fibré principal au-dessus M , de groupe structural G , pour tout $u \in P, T_u P$ l'espace tangent de P en u , et G_u le sous espace de $T_u P$ qui contient les vecteurs tangents de la fibre au-dessus de $x \in M$ avec $x = \pi(u)$. i.e. $G_u = T_u(\pi^{-1}(x))$. Une connexion ∇ dans P consiste en le choix d'un sous espace Q_u de $T_u P$ pour tout $u \in P$ tels que :

1. $T_u P = G_u \oplus Q_u$ pour tout $u \in P$.
2. $Q_{ua} = (R_u)_* Q_u$ pour tout $u \in P$ et $a \in G$.
3. Q_u dépend de la différentiabilité en $u \in P$.

Remarque 2.1.1.

- On dit que G_u est un espace vertical de $T_u P$, et Q_u est un espace horizontal de $T_u P$.
- Un vecteur X de $T_u P$ est appelée vecteur vertical (resp. vecteur horizontal) si $X \in G_u$ (resp. $X \in Q_u$).
- Si $X \in T_u P$ alors $X = Y + Z$ avec $Y \in G_u$ et $Z \in Q_u$. On dit que Y (resp. Z) la composante verticale (resp. la composante horizontale) et on note vX (resp. hX).

Remarque 2.1.2. Pour tout $u \in P, G_u = \{X \in T_u P, (d_u \pi)(X) = 0\}$ car l'application $\pi : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\}$ est constante où $x = \pi(u) \in M$. Soit $A \in \mathfrak{g}$, on a $A_u^* \in T_u P$ et $A_u^* = \left. \frac{d}{dt} u \cdot \exp(tA) \right|_{t=0} = (d_e R_u)(A)$ où $R_u : G \rightarrow \pi^{-1}(x)$

tel que $R_u(a) = u \cdot a$ et $x = \pi(u) \in M$:

$$\begin{aligned} (d_u \pi)(A_u^*) &= (d_u \pi)(d_e R_u(A)) \\ &= (d_{R_u(e)} \pi) \circ (d_e R_u)(A) \\ &= d_e(\pi \circ R_u)(A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car l'application $\pi \circ R_u : G \rightarrow \{x\}$ est constante. $G_u = \{X \in T_u P, X = A_u^*, A \in \mathfrak{g}\}$

Définition 2.1.2. Soit ∇ une connexion dans P , on définit une 1-forme ω sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de structural G . Pour tout $A \in \mathfrak{g}$ induit sur P un champ de vecteurs fondamental A^* . Pour tout $X \in T_u P$, on définit ω par :

$$\begin{cases} \omega(X) = A & \text{si } vX = A_u^* \\ \omega(X) = 0 & \text{si } X \in Q_u \end{cases}$$

La 1-forme ω est dite 1-forme de la connexion ∇ .

Proposition 2.1.1. La 1-forme ω de la connexion ∇ , satisfait les conditions suivantes :

1. $\omega(A^*) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$.
2. $(R_a)^* \omega = (Ad_{a^{-1}}) \omega$ i.e. $\omega((R_a)_* X) = (Ad_{a^{-1}}) \omega(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(P)$ et $a \in G$.

Inversement : si ω une 1-forme sur P à valeurs dans \mathfrak{g} , qui a satisfait les conditions (1) et (2) alors il existe une unique connexion ∇ dans P , sa forme de connexion est ω .

Preuve. Soit ω une 1-forme d'une connexion ∇ .

1. Pour tout $A \in \mathfrak{g}, A^* \in \mathfrak{X}(P)$ et $A_u^* \in G_u \subset T_u P, u \in P$ on a :

$$\omega(A^*) = A$$

2. On a deux cas pour $X \in \mathfrak{X}(P)$

i) $X_u \in Q_u, u \in P$.

$$(R_a)_* X_u = X_{ua} \in Q_{ua} \Rightarrow \omega_{ua}((R_a)_* X_u) = 0$$

et $(Ad_{a^{-1}}) \omega_u(X_u) = 0$ donc :

$$\omega_{ua}((R_a)_* X_u) = (Ad_{a^{-1}}) \omega_u(X_u)$$

ii) $X_u \in G_u, u \in P$.

Soit $X = A^*$ le champ de vecteurs fondamental correspondant à

$A \in \mathfrak{g}$, d'après le théorème (1.2.1) $(R_a)_* X$ le champ de vecteurs fondamental correspondant à $(Ad_{a^{-1}}) A$:

$$\begin{aligned} ((R_a)^* \omega)_u(X_u) &= \omega_{ua}((R_a)_* X_u) \\ &= (Ad_{a^{-1}}) A \\ &= (Ad_{a^{-1}}) \omega_u(X_u) \end{aligned}$$

Inversement : Soit ω une 1-forme qui vérifie les conditions (1) et (2).

On définit $Q_u = \{X \in T_u P, \omega(X) = 0\}$:

1. Soit $X \in \mathfrak{X}(P)$, on pose $Y = (\omega(X))_u^* \in G_u$ et $Z = X_u - Y$:

$$\begin{aligned} \omega_u(Z) &= \omega_u(X_u) - \omega_u(Y) \\ &= \omega_u(X_u) - \omega_u((\omega(X))_u^*) \\ &= \omega_u(X_u) - \omega_u(X_u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $Z \in Q_u$, alors on a $T_u P = G_u \oplus Q_u$ pour tout $u \in P$.

2. Soit $X \in \mathfrak{X}(P)$ Pour tout $a \in G$ et $u \in P$ on a :

- $\omega_{u \cdot a}((R_a)_*(X_u)) = (Ad_{a^{-1}}) \omega_u(X_u)$
si $X_u \in Q_u$ alors $(R_a)_*(X_u) \in Q_{u \cdot a}$ donc $(R_u)_* Q_u \subset Q_{u \cdot a}$
- $\omega_{u \cdot a}(X_{u \cdot a}) = \omega_{u \cdot a}((R_a)_*(X_u)) = (Ad_{a^{-1}}) \omega_u(X_u)$
si $X_{u \cdot a} \in Q_{u \cdot a}$ alors $(X_u) \in Q_u$ donc $X_{u \cdot a} \in (R_u)_* Q_u$
d'où $Q_{u \cdot a} \subset (R_u)_* Q_u$

3. On vérifie que la distribution $u \mapsto Q_u$ est différentiable. Soit $X \in \mathfrak{X}(P)$, on a $X \in C^\infty$ et $Y = (\omega(X))^* \in C^\infty$ donc $Z = X - Y \in C^\infty$ alors pour tout $u \in P$, il existe (U, φ) une carte de P , pour tout $y \in U$ il existe r ($r = \dim Q_y$) champs de vecteurs Z^1, \dots, Z^r avec $Z^i = X^i - (\omega(X^i))^*$ sur U tels que (Z_y^i) est une base de Q_y . Donc Q_u est définie une connexion ∇ dans P sa forme de connexion est ω .

Remarque 2.1.3.

1. $Q_u = \{X \in T_u P, \omega(X) = 0\}$ pour tout $u \in P$.
2. La projection $\pi : P \rightarrow M$ induit une application linéaire $d_u \pi : T_u P \rightarrow T_x M$ pour tout $u \in P, \pi(u) = x \in M$ Comme $M = P/G \Rightarrow \dim M = \dim P - \dim G$ et $\pi^{-1}(x) \approx G$ et $G_u = T_u(\pi^{-1}(x))$ D'autre part

$$T_u P = G_u \oplus Q_u \Rightarrow \dim T_u P = \dim G_u + \dim Q_u$$

donc $\dim M = \dim Q_u$

alors $d_u \pi : Q_u \rightarrow T_x M$ pour tout $u \in P, \pi(u) = x \in M$ est un isomorphisme linéaire.

Exemple 2.1.1. Soit $P(M, G)$ un fibré principal (voir l'exemple 1.2.3) où $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $M = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}^*$ et $\pi : P \rightarrow M$ telle que $\pi(u) = x$ où $u = (x, y)$. Pour tout $u = (x, y) \in P$, on a $G_u = \{X \in T_uP, (d_u\pi)(X) = 0\}$ Soit $X \in T_uP$, $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ donc $(d_u\pi) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial}{\partial x}$ alors :

$$G_u = \left\{ \beta \frac{\partial}{\partial y} \in T_uP, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

On choisit $Q_u = \{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \in T_uP, \alpha \in \mathbb{R} \}$, telle que $T_uP = G_u \oplus Q_u$. Alors la 1-forme de la connexion est $\omega = f dx + g dy$ où $f, g \in C^\infty(P)$ telle que pour tout $A \in \mathfrak{g}$, ω est vérifie :

$$\begin{cases} \omega(X) = A & \text{si } vX = A_u^* \\ \omega(X) = 0 & \text{si } X \in Q_u \end{cases}$$

Pour tout $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \in Q_u$ on a :

$$\begin{aligned} \omega_u(X) = 0 &\Leftrightarrow \omega_u \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(u) = 0 \end{aligned}$$

donc $\omega = g dy$.

Pour tout $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ et $vX = A_u^*$ on a :

$$\begin{aligned} \omega_u(X) &= \omega_u(vX) \\ &= \omega_u(A_u^*) \\ &= \omega_u \left(\beta \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= g(u)\beta \\ &= A \end{aligned}$$

d'où $\omega = g dy$.

Définition 2.1.3. Le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs X sur M est l'unique champ de vecteurs X^h sur P qui est horizontal et vérifie $(d_u\pi)(X_u^h) = X_{\pi(x)}$ pour tout $u \in p$. On dit que X^h est π -conjugué à X .

Proposition 2.1.2. Soit ∇ une connexion dans P et X un champ de vecteurs sur M , il y a un unique relèvement horizontal X^h de X . Le relèvement horizontal X^h est invariant par R_a pour tout $a \in G$. Inversement : tout champ de vecteurs horizontal X^h dans P invariant par R_a , est un relèvement horizontal d'un champ de vecteurs X sur M .

Preuve. Soit X un champ de vecteurs sur M , l'existence et l'unicité de X^h est claire du fait que $d_u\pi$ donne un isomorphisme linéaire de Q_u vers $T_{\pi(u)}M$ i.e. $d_u\pi(X_u^h) = X_{\pi(u)}$ pour tout $u \in P$.

Démontrons que X^h est différentiable. Pour tout $x \in M$, il existe U un voisinage ouvert de x tel que $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$. il existe un champ de vecteurs Y sur $\pi^{-1}(U)$ tel que $d_u\pi(Y_u^h) = X_{\pi(u)}$ et $X_u^h \in Q_u$ pour tout $u \in P$ donc X^h est une composante horizontale de Y d'où X^h est différentiable. X^h est invariant par R_a pour tout $a \in G$ car Q_u est invariant par R_a i.e. $Q_{ua} = (R_u)_* Q_u$ pour tout $a \in G$

Inversement : Soit $X^h \in \mathfrak{X}(P)$ avec X^h un champ de vecteurs horizontal et invariant par R_a . Pour tout $x \in M, \exists u \in P, x = \pi(u)$ on pose $X_x = d_u\pi(X_u^h) \in T_xM, X_x$ est indépendant de choix de u . Car si $u' \in P$ avec $u' = u.a$ et $x = \pi(u')$, on a :

$$\begin{aligned} d_{u'}\pi(X_{u'}^h) &= d_{R_a(u)}\pi((R_a)_* X_u^h) \\ &= d_{R_a(u)}\pi \circ d_u R_a(X_u^h) \\ &= d_u(\pi \circ R_a)(X_u^h) \\ &= d_u\pi(X_u^h) \\ &= X_x \end{aligned}$$

Donc X^h est un relèvement horizontal de X .

Proposition 2.1.3. Soient X^h et Y^h deux relèvements horizontaux de X et Y respectivement alors :

1. $X^h + Y^h$ est un relèvement horizontal de $X + Y$.
2. Pour toute fonction f de $M, f^h X^h$ est un relèvement horizontal de fX où $f^h = f \circ \pi$.
3. La composante horizontale de $[X^h, Y^h]$ est le relèvement horizontal de $[X, Y]$.

Preuve.

$$\begin{aligned} 1. d_u\pi(X^h + Y^h)_u &= d_u\pi(X_u^h + Y_u^h) \\ &= d_u\pi(X_u^h) + d_u\pi(Y_u^h) \\ &= X_{\pi(u)} + Y_{\pi(u)} \\ &= (X + Y)_{\pi(u)} \\ 2. d_u\pi(f^h X^h)_u &= d_u\pi(f^h(u)X_u^h) \\ &= f^h(u)d_u\pi(X_u^h) \\ &= f(\pi(u))(X)_{\pi(u)} \\ &= (fX)_{\pi(u)} \end{aligned}$$

3. Soient φ_t (resp ψ_t) le groupe à un paramètre associé à X^h (resp X).
comme $(d_u\pi)(X_u^h) = X_{\pi(u)}$ i.e. (X^h est π -conjugué à X), alors
 $\pi \circ \varphi_t = \psi_t \circ \pi$ pour tout t .

$$\begin{aligned} d_u\pi \left(h \left[X^h, Y^h \right]_u \right) &= d_u\pi \left(\left[X^h, Y^h \right]_u \right) \\ &= d_u\pi \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_u^h - ((\varphi_t)_* Y^h)_u \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(d_u\pi \left(Y_u^h \right) - d_u\pi \left(((\varphi_t)_* Y^h)_u \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\pi(u)} - (d_u\pi) \left((d_{\varphi_t^{-1}(u)}\varphi_t) \left(Y_{\varphi_t^{-1}(u)}^h \right) \right) \right) \end{aligned}$$

On pose $\varphi_t(u') = u$:

$$\begin{aligned} (d_u\pi) \left((d_{u'}\varphi_t) \left(Y_{\varphi_t^{-1}(u)}^h \right) \right) &= \left(d_{\varphi_t(u')\pi} \left((d_{u'}\varphi_t) \left(Y_{u'}^h \right) \right) \right) \\ &= \left((d_{\varphi_t(u')\pi}) \circ (d_{u'}\varphi_t) \right) \left(Y_{u'}^h \right) \\ &= d_{u'} (\pi \circ \varphi_t) \left(Y_{u'}^h \right) \\ &= d_{u'} (\psi_t \circ \pi) \left(Y_{u'}^h \right) \\ &= (d_{\pi(u')}\psi_t) \circ \left((d_{u'}\pi) \left(Y_{u'}^h \right) \right) \\ &= (d_{\pi(u')}\psi_t) \left(Y_{\pi(u')} \right) \\ &= \left(d_{\psi_t^{-1}(\pi(u))}\psi_t \right) \left(Y_{\psi_t^{-1}(\pi(u))} \right) \\ &= ((\psi_t)_* Y)_{\pi(u)} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} d_u\pi \left(h \left[X^h, Y^h \right]_u \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\pi(u)} - ((\psi_t)_* Y)_{\pi(u)} \right) \\ &= [X, Y]_{\pi(u)} \end{aligned}$$

Remarque 2.1.4.

- Soit ω 1-forme sur G à valeurs dans \mathfrak{g} . ω est dite invariant à gauche si $(L_a)^* \omega = \omega$ pour tout $a \in G$. La 1-forme canonique θ sur G est un 1-forme invariant à gauche à valeurs dans \mathfrak{g} telle que $\theta(A) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$.
- Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ une recouvrement ouverte de M on a :
 $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ difféomorphisme pour tout α .
 $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ les fonctions de transitions pour tous α et β .
 $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$ est une section sur U_α définie par $\sigma_\alpha(x) = \phi_\alpha^{-1}(x, e)$ pour tout α . Si ω la 1-forme de connexion ∇ sur P . on définit la 1

-forme ω_α sur U_α à valeurs dans \mathfrak{g} par $\omega_\alpha = (\sigma_\alpha)^* \omega$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ on définit la 1-forme $\theta_{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ à valeurs dans \mathfrak{g} par $\theta_{\alpha\beta} = (\psi_{\beta\alpha})^* \theta$.

Proposition 2.1.4. *Les formes $\theta_{\alpha\beta}$ et ω_α qui sont définies dans la remarque (2.1.4) vérifient la formule suivante :*

$$\omega_\beta = \text{Ad} \left(\psi_{\beta\alpha}^{-1} \right) \omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta} \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta$$

Preuve. D'après la remarque (1.2.2) on a si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ pour tous α et β , $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x)$

$$d_x \psi_{\beta\alpha} : T_x(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow T_a G, \text{ avec } a = \psi_{\beta\alpha}(x)$$

$$d_x \sigma_\alpha : T_x(U_\alpha) \rightarrow T_{u'} P, \text{ avec } u' = \sigma_\alpha(x)$$

$$d_x \sigma_\beta : T_x(U_\beta) \rightarrow T_u P, \text{ avec } u = \sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x) = u' \cdot a$$

D'après la formule de leibnitz : pour tout $X \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$

$$d_x \sigma_\beta(X) = d_x \sigma_\alpha(X) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x) + \sigma_\alpha(x) \cdot d_x \psi_{\alpha\beta}(X)$$

Alors $\omega(d_x \sigma_\beta(X)) = \omega(d_x \sigma_\alpha(X) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x)) + \omega(\sigma_\alpha(x) \cdot d_x \psi_{\alpha\beta}(X))$; $R_a : P \rightarrow P$ donc $(R_a)_* : T_{u'} P \rightarrow T_u P$ tel que $(R_a)_*(d_x \sigma_\alpha(X)) = d_x \sigma_\alpha(X) \cdot a$ alors :

$$\begin{aligned} \omega(d_x \sigma_\alpha(X) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x)) &= \omega(d_x \sigma_\alpha(X) \cdot a) \\ &= \omega((R_a)_*(d_x \sigma_\alpha(X))) \\ &= \text{Ad}_{a^{-1}} \omega(d_x \sigma_\alpha(X)) \\ &= \text{Ad}_{a^{-1}} \omega((\sigma_\alpha)_*(X)) \\ &= \text{Ad}_{a^{-1}} ((\sigma_\alpha)^* \omega(X)) \\ &= \text{Ad}_{(\psi_{\alpha\beta}(x))^{-1}} (\omega_\alpha(X)) \end{aligned}$$

Soit $\varphi : G \rightarrow P$ avec $\varphi(b) = \sigma_\alpha(x) \cdot b, b \in G$ alors $d_a \varphi : T_a G \rightarrow T_u P$:

$$d_a \varphi(d_x \psi_{\alpha\beta}(X)) = \sigma_\alpha(x) \cdot d_x \psi_{\alpha\beta}(X) \in T_u P$$

Si $A \in \mathfrak{g}$ tel que $d_x \psi_{\alpha\beta}(X) = A_a$ alors, $\theta(d_x \psi_{\alpha\beta}(X)) = A$ et $\sigma_\alpha(x) \cdot d_x \psi_{\alpha\beta}(X) = A_u^*$ donc :

$$\begin{aligned} \omega(\sigma_\alpha(x) \cdot d_x \psi_{\alpha\beta}(X)) &= \omega(A_u^*) \\ &= A \\ &= \theta(d_x \psi_{\alpha\beta}(X)) \\ &= (\psi_{\alpha\beta}^* \theta)(X) \\ &= \theta_{\alpha\beta}(X) \end{aligned}$$

Mais $\omega(d_x \sigma_\beta(X)) = ((\sigma_\beta)^* \omega)(X) = \omega_\beta(X)$.

Donc $\omega_\beta(X) = \text{Ad}_{(\psi_{\alpha\beta}(x))^{-1}} \omega_\alpha(X) + \theta_{\alpha\beta}(X)$.

2.1.2 Transport Parallèle

Définition 2.1.4.

- Soit ∇ une connexion dans un fibré principal $P(M, G)$ nous définissons le concept de transport parallèle sur un fibré, le long d'une courbe quelconque τ dans M .
- une courbe horizontale dans P signifie une courbe différentiable par morceaux de classe C^1 dont les vecteurs tangentes sont tous horizontaux.
- Soit $\tau = x_t, a \leq t \leq b$ une courbe différentiable par morceaux de classe C_1 dans M , le relèvement horizontal de τ est une courbe horizontale $\tau^h = u_t, a \leq t \leq b$ dans P telle que $\pi(u_t) = x_t, a \leq t \leq b$

Remarque 2.1.5. La notion de le relèvement horizontal d'une courbe correspondre à la notion de le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs. Vraiment si $X^h \in \mathfrak{X}(P)$ un relèvement horizontal de $X \in \mathfrak{X}(M)$ alors la courbe intégrale de X^h qui passant par $u_0 \in P$ est un relèvement horizontal d'une courbe intégrale dans X qui passant par $x_0 = \pi(u_0) \in M$.

Proposition 2.1.5. Soit $\tau = x_t, 0 \leq t \leq 1$ une courbe de classe C^1 dans M , pour tout $u_0 \in P, x_0 = \pi(u_0) \in M$ il existe un unique relèvement horizontal $\tau^h = u_t, 0 \leq t \leq 1$ de τ qui commence a partir de u_0 .

Preuve. Soit $\tau = x_t, 0 \leq t \leq 1$ et $u_0 \in P, x_0 = \pi(u_0) \in M$ on a : $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ est un difféomorphisme, donc il y a deux courbes de classe $C^1 v_t$ dans P et a_t sur G telles que : $\phi(v_t) = (\pi(v_t), \varphi(v_t))$, $\pi(v_t) = x_t$, $\varphi(v_t) = a_t$, $v_0 = u_0$, $a_0 = \varphi(v_0) = e$ Soit la courbe :

$$u_t = v_t \cdot a_t \Rightarrow \dot{u}_t = \dot{v}_t \cdot a_t + v_t \cdot \dot{a}_t$$

avec \dot{u}_t le vecteur tangent de τ^h au point u_t .

Soit ω la 1-forme de connexion, alors :

$$\begin{aligned} \omega(\dot{u}_t) &= \omega(\dot{v}_t \cdot a_t) + \omega(v_t \cdot \dot{a}_t) \\ &= \omega((R_{a_t})_* \dot{v}_t) \\ &= Ad_{a_t^{-1}} \omega(\dot{v}_t) \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathfrak{g}, \dot{a}_t = a_t A \Rightarrow A = a_t^{-1} \dot{a}_t$ donc :

$$\begin{aligned} \omega(v_t \cdot \dot{a}_t) &= \omega(A^*) \\ &= A \\ &= a_t^{-1} \dot{a}_t \end{aligned}$$

Alors $\omega(\dot{u}_t) = Ad_{a_t^{-1}}\omega(\dot{v}_t) + a_t^{-1}\dot{a}_t$

u_t est une courbe horizontale si seulement si $\omega(\dot{u}_t) = 0$

$$\begin{aligned} Ad_{a_t^{-1}}\omega(\dot{v}_t) + a_t^{-1}\dot{a}_t = 0 &\Leftrightarrow Ad_{a_t^{-1}}\omega(\dot{v}_t) = -a_t^{-1}\dot{a}_t \\ &\Leftrightarrow a_t^{-1}\omega(\dot{v}_t) a_t = -a_t^{-1}\dot{a}_t \\ &\Leftrightarrow \omega(\dot{v}_t) = -\dot{a}_t a_t^{-1} \end{aligned}$$

Finalement $u_t = v_t \cdot a_t$ avec $\omega(\dot{v}_t) = -\dot{a}_t a_t^{-1}$

Définition 2.1.5. Soit $\tau = x_t, 0 \leq t \leq 1$ une courbe de classe C^1 dans M et $u_0 \in P$ avec $\pi(u_0) = x_0$. L'unique relèvement horizontal τ^h de τ qui passant par u_0 et de point d'arrivé u_1 avec $\pi(u_1) = x_1$ pour u_0 est varié dans $\pi^{-1}(x_0)$. Induit une application $T_\tau : \pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi^{-1}(x_1)$ telle que $T_\tau(u_0) = u_1$ pour tout $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Cette application est dite le transport parrallèle le long de la courbe $\tau = x_t$.

Proposition 2.1.6. Le transport parrallèle T_τ le long de la courbe quelconque τ est vérifie :

- T_τ est un difféomorphisme.
- $T_\tau \circ R_a = R_a \circ T_\tau, a \in G$

Preuve.

- Soit $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ et $T_\tau(u_0) = u_1 \in \pi^{-1}(x_1)$.
 $\varphi_0 : G \rightarrow \pi^{-1}(x_0)$ telle que $\varphi_0(a) = u_0 \cdot a$ et $\varphi_1 : G \rightarrow \pi^{-1}(x_1)$ telle que $\varphi_1(a) = u_1 \cdot a$ on a $T_\tau = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$. et comme φ_0 et φ_1 sont deux difféomorphismes donc T_τ est un difféomorphisme.
- Pour tout $a \in G$:

$$\begin{aligned} T_\tau(u_0 \cdot a) &= u_1 \cdot a \\ &= T_\tau(u_0) \cdot a (T_\tau \circ R_a)(u_0) \\ &= T_\tau(R_a(u_0)) \\ &= T_\tau(u_0 \cdot a) \\ &= T_\tau(u_0) \cdot a \\ &= R_a(T_\tau(u_0)) \\ &= (R_a \circ T_\tau)(u_0) \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2. Soit $P(M, G)$ le fibré principale (voir l'exemple 1.2.3) où $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, M = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}^*$ la projection :

$$\begin{aligned} \pi : P &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto \pi(u) = x \quad , \text{où } u = (x, y) \end{aligned}$$

Soit $\tau = x_i, 0 \leq t \leq 1$, une courbe de classe C^1 dans M $\pi^{-1}(x_0) = \{(x_0, y), y \in \mathbb{R}^*\}$ et $\pi^{-1}(x_1) = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^*\}$. Le transport parallèle :

$$\begin{aligned} T_\tau : \pi^{-1}(x_0) &\longrightarrow \pi^{-1}(x_1) \\ (x_0, y) &\longmapsto \pi((x_0, y)) = (x_1, y) \end{aligned}$$

est un translation dans P .

Proposition 2.1.7.

- a) Si τ une courbe différentiable par morceaux de classe C^1 dans M , alors le transport parallèle le long de τ^{-1} est l'inverse de transport parallèle le long de τ .
- b) Si τ une courbe qui associe x à y dans M et μ une courbe qui associe y à z dans M le transport parallèle le long de la courbe composée $\mu \cdot \tau$ est la composée des transports parallèles τ et μ .

Preuve.

- a) Soit la courbe $\tau = x_t, a \leq t \leq b$ et la courbe inverse $\tau^{-1} = y_t = x_{a+b-t}, a \leq t \leq b$
 T_τ le transport parallèle le long de $\tau, T_\tau : \pi^{-1}(x_a) \rightarrow \pi^{-1}(x_b)$ telle que $T_\tau(u_a) = u_b$
 $x_a = \pi(u_a), x_b = \pi(u_b)$ donc $T_\tau^{-1} : \pi^{-1}(x_b) \rightarrow \pi^{-1}(x_a)$ telle que $T_\tau^{-1}(u_b) = u_a$
 $T_{\tau^{-1}}$ le transport parallèle le long de τ^{-1} avec $y_a = x_b = \pi(u_b), y_b = x_a = \pi(u_a)$
 $T_{\tau^{-1}} : \pi^{-1}(y_a) \rightarrow \pi^{-1}(y_b)$ donc $T_{\tau^{-1}}(u_b) = u_a$ donc $T_\tau^{-1} = T_{\tau^{-1}}$
- b) Soient τ et μ deux courbe telle que : $\tau = x_t, a \leq t \leq b$ avec $x = x_a = \pi(u_a), y = x_b = \pi(u_b)$.
 $\mu = y_t, b \leq t \leq c$ avec $y = y_b = \pi(u_b), z = y_c = \pi(u_c), u_a, u_b, u_c \in P$
 $\mu \cdot \tau = z_t, a \leq t \leq c$ avec $z_t = x_t, a \leq t \leq b$ et $z_t = y_t, b \leq t \leq c, z_a = x_a, z_c = y_c$, Donc $T_{\tau \cdot \mu} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(z)$ telle que $T_{\tau \cdot \mu}(u_a) = u_c$ et $T_\mu \circ T_\tau : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(z)$ telle que :

$$\begin{aligned} (T_\mu \circ T_\tau)(u_a) &= T_\mu(T_\tau(u_a)) \\ &= T_\mu(u_b) \\ &= u_c \end{aligned}$$

Alors $T_{\tau \cdot \mu} = T_\mu \circ T_\tau$

2.1.3 2-Forme de Courbure d'une Connexion dans un Fibré Principal

Définition 2.1.6. Soient $p(M, G)$ un fibré principal et ρ une représentation de G sur un espace vectoriel V de dimension fini.

- une r -forme différentielle sur P est une r -forme horizontale (verticale) si elle s'annule dès que l'un des vecteurs sur lesquels on l'applique est vertical (horizontale).
- une r -forme différentielle φ sur P à valeurs dans V est dite pseudo tensorielle de type (ρ, V) si $(R_a)^* \varphi = \rho(a^{-1}) \cdot \varphi, a \in G$

- une r -forme différentielle φ sur P à valeurs dans V est dite tensorielle de type (ρ, V) si elle pseudo tensorielle et horizontale.

Proposition 2.1.8. Soient $p(M, G)$ un fibré principal et ρ une représentation de G sur un espace vectoriel V de dimension fini et $E(M, V, G, P)$ le fibré associé à P de fibre standard V tel que G agit sur V par ρ . Nous avons associé à toute r -forme tensorielle sur P de type (ρ, V) , une r -forme sur M à valeurs dans E .

Preuve.

- Soit φ une r -forme tensorielle de type (ρ, V) , pour tout $x \in M$ on définit l'application multilinéaire antisymétrique $\psi : T_x M \times \dots \times T_x M \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$ telle que :

$$\psi(X_1|_x, \dots, X_r|_x) = \phi_u \left(\varphi \left(X_1^h|_u, \dots, X_r^h|_u \right) \right)$$

$X_i^h \in \mathfrak{X}(P)$, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $d_u \pi(X_i^h|_u) = X_i|_x$ pour chaque $x = \pi(u) \in M$, $\phi_u : V \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$ isomorphisme.

Montons que ψ est bien définie c'est à dire pour $u' = u \cdot a$, $x = \pi(u')$, alors :

$$\begin{aligned} \phi_{u'} \left(\varphi_{u'} \left(X_1^h|_{u'}, \dots, X_r^h|_{u'} \right) \right) &= u' \cdot \varphi_{u'} \left(X_1^h|_{u'}, \dots, X_r^h|_{u'} \right) \\ &= (u \cdot a) \cdot \varphi_{u \cdot a} \left(X_1^h|_{u \cdot a}, \dots, X_r^h|_{u \cdot a} \right) \\ &= (u \cdot a) \cdot \varphi_{u \cdot a} \left((R_a)_* X_1^h|_u, \dots, (R_a)_* X_r^h|_u \right) \\ &= (u \cdot a) \cdot ((R_a)^* \varphi)_u \left(X_1^h|_u, \dots, X_r^h|_u \right) \\ &= (u \cdot a) \cdot (\rho(a^{-1}) \varphi_u) \left(X_1^h|_u, \dots, X_r^h|_u \right) \\ &= (u \cdot a) \cdot a^{-1} \varphi_u \left(X_1^h|_u, \dots, X_r^h|_u \right) \\ &= u \cdot \varphi_u \left(X_1^h|_u, \dots, X_r^h|_u \right) \\ &= \phi_u \left(\varphi_u \left(X_1^h|_u, \dots, X_r^h|_u \right) \right) \end{aligned}$$

Ceci prouve que ψ est bien définie.

- Inversement Soit $\psi : T_x M \times \dots \times T_x M \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$ une application multilinéaire antisymétrique. on définit la r -forme tensorielle φ de type (ρ, V) sur P par :

$$\varphi \left(X_1^h|_x, \dots, X_r^h|_x \right) = \phi_u^{-1} \left(\psi \left(d_u \pi \left(X_1^h|_u \right), \dots, d_u \pi \left(X_r^h|_u \right) \right) \right)$$

$X_i^h \in \mathfrak{X}(P), u \in P, \pi(u) = x$ En effet :

$$\begin{aligned}
((R_a)^* \varphi)_u \left(X_1^h \Big|_u, \dots, X_r^h \Big|_u \right) &= \varphi_{u \cdot a} \left((R_a)_* X_1^h \Big|_{u \cdot a}, \dots, (R_a)_* X_r^h \Big|_{u \cdot a} \right) \\
&= \phi_{u \cdot a}^{-1} \left(\psi \left(d_{u \cdot a} \pi \left((R_a)_* X_1^h \Big|_{u \cdot a} \right), \dots, d_{u \cdot a} \pi \left((R_a)_* X_r^h \Big|_{u \cdot a} \right) \right) \right) \\
&= \phi_a^{-1} \circ \phi_u^{-1} \left(\psi \left(d_{R_a(u)} \pi \left(d_u R_a \left(X_1^h \Big|_u \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. , \dots, d_{R_a(u)} \pi \left(d_u R_a \left(X_r^h \Big|_u \right) \right) \right) \\
&= a^{-1} \cdot \phi_u^{-1} \left(\psi \left((d_{R_a(u)} \pi \circ d_u R_a) \left(X_1^h \Big|_u \right) \right) \right. \\
&\quad \left. , \dots, (d_{R_a(u)} \pi \circ d_u R_a) \left(X_r^h \Big|_u \right) \right) \\
&= a^{-1} \cdot \phi_u^{-1} \left(\psi \left(d_u (\pi \circ R_a) \left(X_1^h \Big|_u \right) \right) \right) \\
&\quad \left(, \dots, d_u (\pi \circ R_a) \left(X_r^h \Big|_u \right) \right) \\
&= a^{-1} \cdot \phi_u^{-1} \left(\psi \left(d_u \pi \left(X_1^h \Big|_u \right), \dots, d_u \pi \left(X_r^h \Big|_u \right) \right) \right) \\
&= a^{-1} \cdot \varphi_u \left(X_1^h \Big|_u, \dots, X_r^h \Big|_u \right) \\
&= \rho(a^{-1}) \varphi_u \left(X_1^h \Big|_u, \dots, X_r^h \Big|_u \right)
\end{aligned}$$

Ceci prouve que φ est r -forme tensorielle de type (ρ, V) sur P .

Remarque 2.1.6. Une 0 -forme tensorielle de type (ρ, V) sur P est une fonction $f : P \rightarrow V$ telle que $(R_a)^* f(u) = \rho(a^{-1}) \cdot f(u), a \in G$.

On note par :

$$\mathfrak{F}_G(P, V) = \{ f/f : P \rightarrow V, f(u \cdot a) = \rho(a^{-1}) \cdot f(u), u \in P, a \in G \}, \mathfrak{F}(P, V) = \{ f/f : P \rightarrow V \}$$

Nous avons alors : les espaces $\mathfrak{F}_G(P, V)$ et $\Gamma(E)$ sont isomorphes.

- Soit $f \in \mathfrak{F}_G(P, V)$, nous posons $\varphi(x) = \phi_u(f(u)) = u \cdot f(u)$, l'application φ est bien définie, si $u' \in P, \pi(u') = \pi(u) = x$ alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \phi_{u'}(f(u')) \\
&= (u' \cdot a) \cdot f(u' \cdot a) \\
&= (u' \cdot a) \rho(a^{-1}) \cdot f(u) \\
&= (u' \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot f(u)) \\
&= u' \cdot f(u)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\pi_E \circ \varphi)(x) &= \pi_E(\varphi(x)) \\
&= \pi_E(u' \cdot f(u)) \\
&= \pi(u') \\
&= x
\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \Gamma(E)$.

- Soit $\varphi \in \Gamma(E)$, nous posons $f(u) = \phi_u^{-1}(\varphi(x))$, Pour $u \in P$ et $\pi(u) = x$ on a :

$$\varphi(x) = \phi_u(f(u)) = u \cdot f(u) = (u \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot f(u))$$

Pour $u \in P, a \in G$ et $\pi(u \cdot a) = x$ on a :

$$\varphi(x) = \phi_{u \cdot a}(f(u \cdot a)) = (u \cdot a) \cdot f(u \cdot a)$$

Alors $(u \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot f(u)) = (u \cdot a) \cdot f(u \cdot a)$

d'où $f(u \cdot a) = a^{-1} \cdot f(u) = \rho(a^{-1}) \cdot f(u)$, Donc $f \in \mathfrak{F}_G(P, V)$

Proposition 2.1.9. Soient $h : T_u P \rightarrow Q_u$ la projection horizontale et φ une r -forme pseudo tensorielle sur P de type (ρ, V) .

- a) la forme φh définie par :

$$\varphi h (X_1, \dots, X_r) = \varphi (hX_1, \dots, hX_r)$$

avec $X_i \in T_u P$ est une r -forme tensorielle sur P de type (ρ, V) .

- b) $d\varphi$ est une $(r+1)$ -forme pseudo tensorielle sur P de type (ρ, V) .

- c) La $(r+1)$ -forme $D\varphi$ est définie par $D\varphi = (d\varphi)h$ est une $(r+1)$ -forme tensorielle sur P de type (ρ, V) .

Preuve.

- a) On a $(R_a)_* \circ h = h \circ (R_a)_*$ pour tout $a \in G$.

$$\begin{aligned} ((R_a)^* (\varphi h)) (X_1, \dots, X_r) &= (\varphi h) ((R_a)_* X_1, \dots, (R_a)_* X_r) \\ &= \varphi ((h \circ (R_a)_*) X_1, \dots, (h \circ (R_a)_*) X_r) \\ &= \varphi (((R_a)_* \circ h) X_1, \dots, ((R_a)_* \circ h) X_r) \\ &= ((R_a)^* \varphi) (hX_1, \dots, hX_r) \\ &= \rho(a^{-1}) \cdot \varphi (hX_1, \dots, hX_r) \\ &= \rho(a^{-1}) \cdot (\varphi h) (X_1, \dots, X_r) \end{aligned}$$

D'où φh est une r -forme pseudo tensorielle sur P de type (ρ, V) .

$\varphi h (X_1, \dots, X_r) = \varphi (hX_1, \dots, hX_r) = 0$ pour un $X_i \in G_u$.

Donc φh est une r -forme tensorielle sur P de type (ρ, V) .

- b) On a $(R_a)^* \circ d = d \circ (R_a)^*$ pour tout $a \in G$.

$$\begin{aligned} ((R_a)^* (d\varphi)) (X_1, \dots, X_{r+1}) &= ((R_a)^* \circ d) \varphi (X_1, \dots, X_{r+1}) \\ &= (d \circ (R_a)^*) \varphi (X_1, \dots, X_{r+1}) \\ &= d((R_a)^* \varphi) (X_1, \dots, X_{r+1}) \\ &= d(\rho(a^{-1}) \cdot \varphi) (X_1, \dots, X_{r+1}) \\ &= \rho(a^{-1}) \cdot (d\varphi) (X_1, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

D'où $d\varphi$ est une $(r+1)$ -forme pseudo tensorielle sur P de type (ρ, V) .

c) On a $D\varphi = (d\varphi)h$

$$\begin{aligned}
((R_a)^*(D\varphi))(X_1, \dots, X_{r+1}) &= (D\varphi)((R_a)_* X_1, \dots, (R_a)_* X_{r+1}) \\
&= (d\varphi)h((R_a)_* X_1, \dots, (R_a)_* X_{r+1}) \\
&= d\varphi((h \circ (R_a)_*) X_1, \dots, (h \circ (R_a)_*) X_{r+1}) \\
&= d\varphi(((R_a)_* \circ h) X_1, \dots, ((R_a)_* \circ h) X_{r+1}) \\
&= ((R_a)^*(d\varphi))(hX_1, \dots, hX_{r+1}) \\
&= d((R_a)^* \varphi)(hX_1, \dots, hX_{r+1}) \\
&= d(\rho(a^{-1}) \cdot \varphi)(hX_1, \dots, hX_{r+1}) \\
&= \rho(a^{-1}) \cdot (d\varphi)(hX_1, \dots, hX_{r+1}) \\
&= \rho(a^{-1}) \cdot (d\varphi)h(X_1, \dots, X_{r+1}) \\
&= \rho(a^{-1}) \cdot (D\varphi)(X_1, \dots, X_{r+1}).
\end{aligned}$$

D'où $D\varphi$ est une $(r+1)$ -forme pseudo tensorielle sur P de type (ρ, V) .

$$\begin{aligned}
D\varphi(X_1, \dots, X_{r+1}) &= (d\varphi)h(X_1, \dots, X_{r+1}) \\
&= (d\varphi)(hX_1, \dots, hX_{r+1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pour un $X_i \in G_u$.

Donc $D\varphi$ est une $(r+1)$ -forme tensorielle sur P de type (ρ, V) .

Définition 2.1.7. La forme $D\varphi = (d\varphi)h$ est appelée la dérivée covariante extérieure du φ et D est appelée la différentielle covariante extérieure.

Remarque 2.1.7.

- si ρ la représentation adjointe de G dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Une forme pseudo tensorielle (tensorielle) de type (ρ, V) est dite de type AdG .
- Soit ω la 1-forme de connexion, on a $(R_a)^* \omega = Ad_{a^{-1}} \omega$ pour tout $a \in G$. Donc ω est une 1-forme pseudo tensorielle de type AdG . d'après la proposition (2.1.9) la forme $D\omega$ est une 2-forme tensorielle de type AdG .

Définition 2.1.8. La 2-forme de courbure Ω est la dérivée covariante extérieure de la 1-forme de connexion ω .i.e $\Omega = D\omega$.

Exemple 2.1.3. Soit $P(M, G)$ un fibré principal (voir l'exemple 1.2.3 et 2.1.1) où $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $M = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}^*$, et $\pi : P \rightarrow M$ telle que $\pi(u) = x$ où $u = (x, y)$. Pour tout $u = (x, y) \in P$, on a $Q_u = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \in T_u P, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. La 1-forme de la connexion est, $\omega = gdy$ où $g \in C^\infty(P)$, la 2-forme de courbure est $\Omega = D\omega$.i.e $\Omega(X, Y) = d\omega(hX, hY)$ où $X, Y \in T_u P$.

$$\omega = gdy \Rightarrow d\omega = \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy \text{ et } hX = \alpha \frac{\partial}{\partial x}, hY = \lambda \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y) &= d\omega\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}, \lambda \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \alpha \cdot \lambda d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où $\Omega = 0$.

Lemme 2.1.1. *Si A^* un champ de vecteurs fondamental correspondant à $A \in \mathfrak{g}$ et X un champ de vecteurs horizontal, alors $[X, A^*]$ est un champ de vecteurs horizontal.*

Preuve. Soit a_t le sous groupe à un paramètre associé à $A \in \mathfrak{g}$ et, R_{a_t} le groupe à un paramètre associé à $A^* \in \mathfrak{X}(P)$. on a :

$$[X, A^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((R_{a_t})_* X - X)$$

Comme X est un champ de vecteurs horizontal alors $\omega(X) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\omega((R_{a_t})_* X) &= ((R_{a_t})^* \omega)(X) \\
&= Ad_{a_t^{-1}} \omega(X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\omega[X, A^*] = 0$

Proposition 2.1.10. (équation de structure)

Soient ω la 1 - forme de connexion et Ω la 2 -forme de courbure alors :

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y) \quad (2.1)$$

pour tous $X, Y \in T_u P, u \in P$

Preuve.

1. Si $X \in Q_u$ et $Y \in Q_u, u \in P$ on a :

$$\omega(X) = \omega(Y) = 0 \text{ et } [\omega(X), \omega(Y)] = 0$$

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y) &= (D\omega)(X, Y) \\
&= (d\omega)h(X, Y) \\
&= (d\omega)(hX, hY) \\
&= (d\omega)(X, Y)
\end{aligned}$$

d'où l'équation de structure (2.1)

2. Si $X \in G_u$ et $Y \in G_u, u \in P$ Soient $X = A_u^*, Y = B_u^*$ avec $A, B \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} d\omega(A^*, B^*) &= \frac{1}{2}(A^*\omega(B^*) - B^*\omega(A^*) - \omega[A^*, B^*]) \\ &= \frac{1}{2}(A^*(B) - B^*(A) - \omega[A, B]^*) \\ &= -\frac{1}{2}[A, B] \\ &= -\frac{1}{2}[\omega(A^*), \omega(B^*)] \end{aligned}$$

car $A^*(B) = A^*(\text{Fonction de } P \text{ vers } \mathfrak{g}) = 0 = B^*(A)$ et

$$\begin{aligned} [A^*, B^*] &= [A, B]^*\Omega(A^*, B^*) \\ &= (D\omega)(A^*, B^*) \\ &= (d\omega)h(A^*, B^*) \\ &= (d\omega)(hA^*, hB^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'équation de structure (2.1)

3. Si $X \in Q_u$ et $Y \in G_u, u \in P$ Soit $Y = B_u^*$ avec $B \in \mathfrak{g}$, nous prolongeons X au champ horizontal sur P .

$$\begin{aligned} d\omega(X, B^*) &= \frac{1}{2}(X\omega(B^*) - B^*\omega(X) - \omega[X, B^*]) \\ &= \frac{1}{2}(X(B) - \omega[X, B^*]) \\ &= -\frac{1}{2}\omega[X, B^*] \end{aligned}$$

d'après le Lemme (2.1.1), $[X, B^*]$ est horizontal, donc $d\omega(X, B^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \Omega(X, B^*) &= (D\omega)(X, B^*) \\ &= (d\omega)h(X, B^*) \\ &= (d\omega)(hX, hB^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et $[\omega(X), \omega(B^*)] = 0$, d'où l'équation de structure (2.1).

Corollaire 2.1.1. Soient X et Y deux champs de vecteurs horizontaux sur P alors

$$\omega[X, Y] = -2\Omega(X, Y)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y) &= (D\omega)(X, Y) \\
&= (d\omega)h(X, Y) \\
&= (d\omega)(hX, hY) \\
&= (d\omega)(X, Y) \\
&= \frac{1}{2}(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X, Y]) \\
&= -\frac{1}{2}\omega[X, Y]
\end{aligned}$$

donc $\omega[X, Y] = -2\Omega(X, Y)$.

Théorème 2.1.1. (*Identité Bianchi*)

Soit Ω la 2-forme de courbure. Alors $D\Omega = 0$

Preuve. Pour $X, Y, Z \in T_u P, u \in P$, on a :

$$\begin{aligned}
D\Omega(X, Y, Z) &= (d\Omega)h(X, Y, Z) \\
&= (d\Omega)(hX, hY, hZ)
\end{aligned}$$

Donc il suffit de prouver $d\Omega(X_1, X_2, X_3) = 0$ pour $X_1, X_2, X_3 \in Q_u, u \in P$
De l'équation de structure, On a :

$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega \Rightarrow d^2\omega = -2d\omega \wedge \omega + d\Omega \Rightarrow d\Omega = 2d\omega \wedge \omega$$

Mais $\omega(X_i) = 0$ pour tout $X_i \in Q_u$, donc $d\Omega(X_1, X_2, X_3) = 0$

2.2 Connexion dans un Fibré Vectoriel

2.2.1 Transport Parallèle

Définition 2.2.1. Soient $P(M, G)$ un fibré principal et ∇ une connexion dans P et $E(M, \mathbb{K}^n, G, P)$ le fibré vectoriel associé au fibré P . Si $\tau = x_t, a \leq t \leq b$ une courbe sur M , et $\tau^h = u_t$ le relèvement horizontal de τ sur P . Pour chaque $\xi \in \mathbb{K}^n$ par définition la courbe $\tau' = u_t \cdot \xi$ est un relèvement horizontal de τ sur E .

Remarque 2.2.1.

$$\tau = \pi \circ \tau^h = \pi_E \circ \tau' \quad \text{i.e.} \quad x_t = \pi(u_t) = \pi_E(u_t \cdot \xi)$$

Définition 2.2.2. Le transport parallèle le long d'une courbe τ de x_{t+h} vers x_t , que notons T_t^{t+h} , est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\pi_E^{-1}(x_{t+h})$ et $\pi_E^{-1}(x_t)$ tel que :

$$\begin{aligned}
T_t^{t+h} : \pi_E^{-1}(x_{t+h}) &\longrightarrow \pi_E^{-1}(x_t) \\
u_{t+h} \cdot \xi &\longmapsto u_t \cdot \xi \quad ; \xi \in \mathbb{K}^n.
\end{aligned}$$

2.2.2 Dérivation Covariante d'une Connexion dans un Fibré Vectoriel

Définition 2.2.3. Soient $E(M, \mathbb{K}^n, G, P)$ un fibré vectoriel associé au fibré principal $P(M, G)$, et $\tau = x_t$, $a \leq t \leq b$ une courbe sur M , telle que \dot{x}_t le vecteur tangent de τ au point x_t pour chaque t .

Soit φ une section de E . La dérivation covariante de φ dans la direction \dot{x}_t noté $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi$ est défini par la formule :

$$\nabla_{\dot{x}_t}\varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t) \right)$$

Propriété 2.2.1. Soient φ et ψ deux section de E et λ une fonction à valeurs dans \mathbb{K} alors :

1. $\nabla_{\dot{x}_t}(\varphi + \psi) = \nabla_{\dot{x}_t}\varphi + \nabla_{\dot{x}_t}\psi$.
2. $\nabla_{\dot{x}_t}(\lambda \cdot \varphi) = \lambda(x_t) \cdot \nabla_{\dot{x}_t}\varphi + \dot{x}_t(\lambda) \cdot \varphi(x_t)$.

Preuve.

$$\begin{aligned} 1. \nabla_{\dot{x}_t}(\varphi + \psi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}((\varphi + \psi)(x_{t+h})) - (\varphi + \psi)(x_t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) + T_t^{t+h}(\psi(x_{t+h})) - \varphi(x_t) - \psi(x_t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t) \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\psi(x_{t+h})) - \psi(x_t) \right) \\ &= \nabla_{\dot{x}_t}\varphi + \nabla_{\dot{x}_t}\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \nabla_{\dot{x}_t}(\lambda\varphi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}((\lambda\varphi)(x_{t+h})) - (\lambda\varphi)(x_t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\lambda(x_{t+h})\varphi(x_{t+h})) - \lambda(x_t)\varphi(x_t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\lambda(x_{t+h})T_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \lambda(x_{t+h})\varphi(x_t) \right. \\ &\quad \left. + \lambda(x_{t+h})\varphi(x_t) - \lambda(x_t)\varphi(x_t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lambda(x_{t+h}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t) \right) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\lambda(x_{t+h}) - \lambda(x_t)) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_t) \\ &= \lambda(x_t) \cdot \nabla_{\dot{x}_t}\varphi + \dot{x}_t(\lambda) \cdot \varphi(x_t) \end{aligned}$$

Définition 2.2.4. Soient $X \in T_x M$ et $\varphi \in \Gamma(E)$ défini dans un voisinage de x et $\tau = x_t$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ une courbe dans M telle que $X = \dot{x}_0$. La dérivation covariante de φ dans la direction X noté $\nabla_X\varphi$ est défini par $\nabla_X\varphi = \nabla_{\dot{x}_0}\varphi$.

Remarque 2.2.2.

- 1) Soit $\varphi \in \Gamma(E)$ alors φ est parallèle si $\varphi(x_t)$ est horizontale i.e. $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi = 0$ pour tout t . En effet : $\tau = x_t$ et $\tau^h = u_t$ telle que $x_t = \pi(u_t)$. φ est parallèle $\Leftrightarrow \varphi(x_t) = u_t \cdot \xi$ et $\xi \in \mathbb{K}^n$, donc

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{x}_t}\varphi &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(T_t^{t+h}(u_{t+h} \cdot \xi) - u_t \cdot \xi \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u_t \cdot \xi - u_t \cdot \xi) \\ &= 0\end{aligned}$$

- 2) Soit $\varphi \in \Gamma(E)$ et φ défini sur un ouvert $U \subset M$. φ est parallèle ssi $\nabla_X\varphi = 0$ pour tout $X \in T_xU, x \in U$

- 3) Soit $\varphi \in \Gamma(E)$ et φ définie sur un ouvert $U \subset M$, d'après la remarque (2.1.6), pour φ on associe $f \in \mathfrak{F}_G(\pi^{-1}(U), \mathbb{K}^n)$ telle que $f(u) = \phi_u^{-1}(\varphi(x)), x = \pi(u), u \in \pi^{-1}(U)$ et $\phi_u : \mathbb{K}^n \rightarrow \pi_E^{-1}(x), \phi_u(\xi) = u \cdot \xi, \xi \in \mathbb{K}^n$ Pour $X \in T_xM, X^h \in T_uP$ et $f \in \mathfrak{F}_G(\pi^{-1}(U), \mathbb{K}^n)$ alors $X^h f \in \mathbb{K}^n$ et $\phi_u(X^h f) \in \pi_E^{-1}(x)$ où $x = \pi(u) \in U$

Lemme 2.2.1. $\nabla_X\varphi = \phi_u(X^h f)$

Preuve. Soit $\tau = x_t, -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ une courbe dans M telle que $\dot{x}_0 = X \in T_xM, x_0 = x$ et $\tau^h = u_t$ un relèvement horizontal de τ telle que $\dot{u}_0 = X^h \in T_uP, u_0 = u$

$$\begin{aligned}X^h f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(u_h) - f(u_0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\phi_{u_h}^{-1}(\varphi(x_h)) - \phi_{u_0}^{-1}(\varphi(x_0))) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\phi_{u_h}^{-1}(\varphi(x_h)) - \phi_u^{-1}(\varphi(x))) \\ \phi_u(X^h f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((\phi_u \circ \phi_{u_h}^{-1})(\varphi(x_h)) - \varphi(x)).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer $(\phi_u \circ \phi_{u_h}^{-1})(\varphi(x_h)) = T_0^h(\varphi(x_h))$.

Posons $\xi = \phi_{u_h}^{-1}(\varphi(x_h))$ alors $u_h \cdot \xi$ est une courbe horizontale dans E , on a :

$$\begin{aligned}u_h \cdot \xi &= \phi_{u_h}(\xi) \\ &= \phi_{u_h} \circ \phi_{u_h}^{-1}(\varphi(x_h)) \\ &= \varphi(x_h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_0 \cdot \xi &= u \cdot \xi \\ &= \phi_u(\xi) \\ &= \phi_u \circ \phi_{u_h}^{-1}(\varphi(x_h)) \\ &= \phi_u \circ \phi_{u_h}^{-1}(u_h \cdot \xi)\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} T_0^h : \pi_E^{-1}(x_h) &\longrightarrow \pi_E^{-1}(x_0) \\ u_h \cdot \xi &\longmapsto T_0^h(u_h \cdot \xi) = u_0 \cdot \xi \end{aligned}$$

Donc $T_0^h(u_h \cdot \xi) = u_0 \cdot \xi = \phi_u \circ \phi_{u_h}^{-1}(u_h \cdot \xi)$ i.e. $T_0^h(\varphi(x_h)) = (\phi_u \circ \phi_{u_h}^{-1})(\varphi(x_h))$.

Proposition 2.2.1. Soient $X, Y \in T_x M$ et $\varphi, \psi \in \Gamma(E)$ et U un voisinage ouvert de $x \in M$ alors :

1. $\nabla_{X+Y}\varphi = \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi$.
2. $\nabla_X(\varphi + \psi) = \nabla_X\varphi + \nabla_X\psi$.
3. $\nabla_{\lambda X}\varphi = \lambda\nabla_X\varphi, \lambda \in \mathbb{K}$
4. $\nabla_X(\lambda\varphi) = \lambda(x)\nabla_X\varphi + X(\lambda)\varphi(x), \lambda \in \mathfrak{F}(U, \mathbb{K})$

Preuve. Nous avons déjà démontré (2) et (4) dans les propriétés (2.2.1) :

$$\begin{aligned} 1. \nabla_{X+Y}\varphi &= \phi_u((X+Y)^h f) \\ &= \phi_u(X^h f + Y^h f) \\ &= \phi_u(X^h f) + \phi_u(Y^h f) \\ &= \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \nabla_{\lambda X}\varphi &= \phi_u((\lambda X)^h f) \\ &= \phi_u(\lambda(X^h f)) \\ &= \lambda\phi_u(X^h f) \\ &= \lambda\nabla_X\varphi \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3.

1.

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(E) = \Omega^0(M, E) &\longrightarrow \Omega^1(M, E) \\ \varphi &\longmapsto \nabla\varphi \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \nabla\varphi : T_x M &\longrightarrow \pi_E^{-1}(x) \subset E \\ X &\longmapsto (\nabla\varphi)X = \nabla_X\varphi \end{aligned}$$

2. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ nous pouvons identifier ∇ à une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (\varphi, X) &\longmapsto \nabla(\varphi, X) = \nabla_X\varphi \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \nabla_X\varphi : M &\longrightarrow \pi_E^{-1}(x) \subset E \\ x &\longmapsto (\nabla_X\varphi)(x) = \nabla_{X_x}\varphi \end{aligned}$$

$\nabla_X \varphi$ est la dérivée covariante de φ dans la direction X . ∇ est appelée une connexion sur E .

Définition 2.2.5. Puis que nous avons $\nabla : \Gamma(E) = \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$, il souhaitable de l'étendre en $\nabla : \Omega^r(M, E) \rightarrow \Omega^{r+1}(M, E)$, Soit $\varphi \in \Omega^r(M, E)$ une r -forme sur M à valeurs dans E d'après le Proposition (2.1.8), associons lui la forme tensorielle sur P de type (ρ, \mathbb{K}^n) .

Par la relation $\varphi(X_1, \dots, X_r) = \phi_u(\psi(X_1^h, \dots, X_r^h))$ $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $d_u \pi(X_i^h) = X_i$, pour chaque $x = \pi(u) \in M$, $\phi_u : V \rightarrow \pi_E^{-1}(x)$ isomorphisme.

Par définition nous avons $(\nabla \varphi)(X_0, \dots, X_r)(x) = \phi_u((D\psi)(X_0^h, \dots, X_r^h)(u))$

$$\begin{aligned} (D\psi)(X_0^h, \dots, X_r^h)(u) &= (d_u \psi)h(X_0^h, \dots, X_r^h)(u) \\ &= (d_u \psi)(hX_0^h, \dots, hX_r^h)(u) \\ &= (d_u \psi)(X_0^h, \dots, X_r^h)(u) \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i^h \left(\psi(X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, X_r^h) \right)(u) \\ &\quad + \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \psi \left([X_i^h, X_j^h], X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, \hat{X}_j^h, \dots, X_r^h \right)(u) \end{aligned}$$

Comme ψ est tensorielle, nous avons

$$\begin{aligned} \psi \left([X_i^h, X_j^h], X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, \hat{X}_j^h, \dots, X_r^h \right) &= \psi \left(h[X_i^h, X_j^h], X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, \hat{X}_j^h, \dots, X_r^h \right) \\ &\quad + \psi \left(v[X_i^h, X_j^h], X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, \hat{X}_j^h, \dots, X_r^h \right) \\ &= \psi \left(h[X_i^h, X_j^h], X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, \hat{X}_j^h, \dots, X_r^h \right) \\ &= \psi \left([X_i^h, X_j^h]^h, X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, \hat{X}_j^h, \dots, X_r^h \right) \end{aligned}$$

D'autre part d'après le lemme (2.2.1) nous avons remarqué que

$$\phi_u \left(X_i^h \left(\psi(X_0^h, \dots, \hat{X}_i^h, \dots, X_r^h)(u) \right) \right) = \nabla_{X_i} \left(\varphi(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r)(x) \right)$$

En regroupant tout cela, nous avons donc une expression de ∇

$$\begin{aligned} (\nabla \varphi)(X_0, \dots, X_r) &= \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r (-1)^i \nabla_{X_i} \varphi \left(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r \right)(u) \\ &\quad + \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \varphi \left([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r \right) \end{aligned}$$

2.2.3 Le Tenseur de Courbure

Définition 2.2.6. La différentielle extérieure sur une variété est de carré nul, cherchons ce qui se passe pour ∇ . Nous avons $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$. On définit le carré de ∇ par $\nabla^2 : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(M, E)$, telle que pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(X, Y) &= \nabla(\nabla \varphi)(X, Y) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_X(\nabla \varphi)(Y) - \nabla_Y(\nabla \varphi)(X) - (\nabla \varphi)[X, Y]) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_X(\nabla_Y \varphi) - \nabla_Y(\nabla_X \varphi) - \nabla_{[X, Y]} \varphi) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) \varphi \end{aligned}$$

Nous voyons que ∇^2 n'est pas toujours nulle, sa nullité équivaut à la nullité de la quantité

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

L'application linéaire $R : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^2(M, E)$ est appelée la courbure de la connexion ∇ .

2.3 Connexion Linéaire dans une Variété

Dans tout cette partie $P(M, G)$ désigne le fibré des repères linéaires $L(M)(M, GL(n, \mathbb{R}))$

2.3.1 Dérivation Covariante d'une Connexion Linéaire

Définition 2.3.1. Une connexion dans le fibré $P(M, G)$ des repères linéaires est appelée la connexion linéaire de M .

Remarque 2.3.1. Soit $E = T^{(p,q)}(M)$ l'espace vectoriel des tenseurs de type (p, q) sur M . E est un fibré vectoriel associé à P , et pour tout $x \in M$ $T_x^{(p,q)}(M)$ est un fibré au-dessus de x . Dans ce cas on peut définir la notion de transport parallèle et la Dérivation covariante sur $T^{(p,q)}(M)$.

Définition 2.3.2. Un champ de tenseurs K de type (p, q) est une section de $T^{(p,q)}(M)$, nous avons déjà définie la dérivation covariante d'une section en générale. Nous pouvons définir la dérivation covariante de K dans les trois cas suivantes :

1. $\nabla_{\dot{x}_t} K$ où K est définie le long d'un courbe $\tau = x_t$ sur M .
2. $\nabla_X K$ où $X \in T_x M$, K est définie dans un voisinage de x .
3. $\nabla_X K$ où $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $K \in \mathfrak{T}(M) = \bigoplus_{p,q} \mathfrak{T}^{(p,q)}(M)$.

Proposition 2.3.1. Soient $\mathfrak{T}(M)$ l'algèbre des champs de tenseurs sur M , et X et Y deux champs de vecteurs sur M alors :

1. $\nabla_X : \mathfrak{T}(M) \rightarrow \mathfrak{T}(M)$ préserve la dérivation.
2. ∇_X commute avec les contraction.
3. $\nabla_X f = Xf$ pour tout $f \in C^\infty(M) = \mathfrak{T}^{(0,0)}(M)$.
4. $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$.
5. $\nabla_{fX} K = f\nabla_X K$ pour tous $f \in C^\infty(M), K \in \mathfrak{T}(M)$.

2.3.2 Tenseur de Torsion et Tenseur de Courbure

Définition 2.3.3. Soient $P(M, G)$ un fibré principal des repères linéaires. La forme canonique θ de P à valeurs dans \mathbb{R}^n est définie par $\theta(X) = \phi_u^{-1}(d_u\pi(X))$ $X \in T_uP, u \in P$, où ϕ_u est un isomorphisme linéaire qui est défini dans la définition 1.2.6.

Proposition 2.3.2. La forme canonique θ de P est un 1-forme tensorielle de type (ρ, \mathbb{R}^n) où ρ la représentation naturelle de $GL(n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n , et de plus θ elle correspond à l'édentité de $T_xM, x \in M$, dans le sens de la proposition 2.1.8

Preuve.

1. On a : $(R_a)_* : T_uP \ni X \mapsto (R_a)_*(X) \in T_{u \cdot a}P$

$$\begin{aligned}
 ((R_a)^* \theta)(X) &= \theta((R_a)_*(X)) \\
 &= \phi_{u \cdot a}^{-1}(d_{u \cdot a}\pi((R_a)_*(X))) \\
 &= (\phi_a^{-1} \circ \phi_u^{-1})(d_{R_a(u)}\pi \circ d_u R_a(X)) \\
 &= a^{-1}(\phi_u^{-1}(d_u(\pi \circ R_a)(X))) \\
 &= a^{-1}(\phi_u^{-1}(d_u\pi(X))) \\
 &= a^{-1}\theta(X)
 \end{aligned}$$

2. Soit $X \in G_u, u \in P$ alors :

$$\begin{aligned}
 d_u\pi(X) = 0 &\Rightarrow \theta(X) = \phi_u^{-1}(d_u\pi(X)) \\
 &= \phi_u^{-1}(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Définition 2.3.4. Nous avons pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs horizontal B_ξ dans P tel que pour tout $u \in P, (B_\xi)_u$ est un unique vecteur horizontal en u qui vérifie $d_u\pi((B_\xi)_u) = \phi_u(\xi)$. B_ξ est appelé le champ de vecteurs standard horizontal correspondant à ξ .

Remarque 2.3.2. *L'application :*

$$\begin{aligned} B_u : \mathbb{R}^n &\rightarrow Q_u \\ \xi &\mapsto B_u(\xi) = (B_\xi)_u \end{aligned}$$

est linéaire grâce de linéarité de $d_u\pi$ et de ϕ_u .

Proposition 2.3.3. *Le champ de vecteurs standard horizontal vérifie :*

1. $\theta((B_\xi)_u) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.
2. $(R_a)_*(B_\xi) = B_{\phi_{a^{-1}}(\xi)}$ pour tout $a \in G, \xi \in \mathbb{R}^n$
3. Si $\xi \neq 0 \Rightarrow B_\xi \neq 0$ i.e. $(B_u : \mathbb{R}^n \rightarrow Q_u)$ est injective)
4. Si $A \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et A^* le champ de vecteurs fondamental sur P alors $[A^*, B_\xi] = B_{A\xi}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, où $A\xi$ est l'image de ξ par A .

Preuve.

1. $\theta((B_\xi)_u) = \phi_u^{-1} d_u\pi((B_\xi)_u) = \phi_u^{-1} \circ \phi_u(\xi) = \xi$.
2. $(B_\xi)_u \in Q_u \Rightarrow (R_a)_*(B_\xi)_u \in Q_{u \cdot a}$:

$$\begin{aligned} d_{u \cdot a}\pi((R_a)_*(B_\xi)_u) &= d_u\pi((B_\xi)_u) \\ &= \phi_u(\xi) \\ &= \phi_u(a \cdot a^{-1}\xi) \\ &= \phi_u \circ \phi_a(a^{-1}\xi) \\ &= \phi_{u \cdot a}(a^{-1}\xi) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (R_a)_*(B_\xi)_u = (B_{a^{-1}\xi})_{u \cdot a} = (B_{\phi_{a^{-1}}(\xi)})_{u \cdot a}$$

3. Pour tout $u \in P$:

$$\begin{aligned} (B_\xi)_u = 0 &\Rightarrow d_u\pi((B_\xi)_u) = 0 \\ &\Rightarrow \phi_u(\xi) = 0 \\ &\Rightarrow \xi = 0 \end{aligned}$$

4. Soit $a_t = \text{expt } A, A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), R_{a_t}$ le groupe à un paramètre associé à $A^* \in \mathfrak{X}(P)$.

$$\begin{aligned} [A^*, B_\xi] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_\xi - (R_{a_t})_*(B_\xi)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_\xi - B_{\phi_{a_t^{-1}}(\xi)}) \\ &= B_{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\xi - \phi_{a_t^{-1}}(\xi))} \\ &= B_{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_{a_t}(\xi) - \xi)} \\ &= B_{A\xi} \end{aligned}$$

Car $(B_u : \mathbb{R}^n \rightarrow Q_u)$ est un isomorphisme linéaire .

Définition 2.3.5. On définit la forme de torsion Θ par : $\Theta = D\theta$.

Remarque 2.3.3. Comme θ est un 1 - forme tensorielle sur P de type (ρ, \mathbb{R}^n) , d'après la proposition 2.1.9 , Θ est un 2 -forme tensorielle sur P de type (ρ, \mathbb{R}^n) où ρ la représentation naturelle de $GL(n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n

Exemple 2.3.1. Soit $P(M, G)$ un fibré principal (voir l'exemple 1.2.3 et 2.1.1)où $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $M = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}^*$, et $\pi : P \rightarrow M$ telle que $\pi(u) = x$, $u = (x, y)$. La 1-forme canonique est θ telle que pour tout $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \in T_u P$,

$$\begin{aligned}\theta(X) &= \phi_u^{-1}(d_u \pi(X)) \\ &= \phi_u^{-1}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &= \alpha \phi_u^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &= \alpha\end{aligned}$$

donc $\theta = dx$.

La 2-forme de torsion est $\Theta = D\theta$ mais $d\theta = d^2x = 0$, donc $\Theta = 0$.

Théorème 2.3.1. (équation de structure)

Soient ω, Θ et Ω , la forme de connexion, la forme de torsion et la forme de courbure, respectivement. d'une connexion linéaire ∇ alors :

1^{er} équation de structure : $d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta$ i.e. pour tous $X, Y \in T_u P, u \in P$

$$d\theta(X, Y) = -\frac{1}{2}(\omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)) + \Theta(X, Y) \quad (2.2)$$

2^{iemme} équation de structure : $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega$ i.e. pour tous $X, Y \in T_u P, u \in P$

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y) \quad (2.3)$$

Preuve. Nous avons déjà démontré la 2^{iemme} équation de structure dans la proposition 2.1.10 . démontrons la 1^{er} équation de structure :

1. Si $X \in Q_u$ et $Y \in Q_u, u \in P$ On a :

$$\omega(X) = \omega(Y) = 0 \text{ et } \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X) = 0 :$$

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= (D\theta)(X, Y) \\ &= (d\theta)h(X, Y) \\ &= d\theta(hX, hY) \\ &= d\theta(X, Y)\end{aligned}$$

d'où l'équation de structure (2.2)

2. Si $X \in G_u$ et $Y \in G_u, u \in P$:

Soient $X = A_u^*, Y = B_u^*$ avec $A, B \in \mathfrak{g}$

$$d\theta(A^*, B^*) = \frac{1}{2}(A^*(\theta(B^*)) - B^*(\theta(A^*)) - \theta[A^*, B^*]) = 0 ,$$

$\omega(A^*)\theta(B^*) - \omega(B^*)\theta(A^*) = 0$, car θ est une forme horizontale
i.e. ($\theta(A^*) = \theta(B^*) = \theta[A^*, B^*] = 0$) ,

$$\begin{aligned} \Theta(A^*, B^*) &= (D\theta)(A^*, B^*) \\ &= (d\theta)h(A^*, B^*) \\ &= d\theta(hA^*, hB^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $hA^* = hB^* = 0$, d'où l'équation de structure (2.2)

3. Si $X \in Q_u$ et $Y \in G_u, u \in P$:

Soit $X = A_u^*$ avec $A \in \mathfrak{g}$ et $Y = (B_\xi)_u, \xi \in \mathbb{R}^n$ $\Theta(A^*, B_\xi) = d\theta(hA^*, hB_\xi) = 0$ car $hA^* = 0$, $-\frac{1}{2}(\omega(A^*)\theta(B_\xi) - \omega(B_\xi)\theta(A^*)) = -\frac{1}{2}(\omega(A^*)\theta(B_\xi)) = -\frac{1}{2}A\xi$, car $\theta(A^*) = 0$, $\omega(A^*) = A$, $\theta(B_\xi) = \xi$

$$\begin{aligned} d\theta(A^*, B_\xi) &= \frac{1}{2}(A^*(\theta(B_\xi)) - B_\xi(\theta(A^*)) - \theta[A^*, B_\xi]) \\ &= -\frac{1}{2}\theta(B_{A\xi}) \\ &= -\frac{1}{2}A\xi \text{ car } A^*(\theta(B_\xi)) \\ &= A^*(\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et $[A^*, B_\xi] = B_{A\xi}$, d'où l'équation de structure (2.2)

Théorème 2.3.2. (Identité de Bianchi)

Soient ω, Θ et Ω la forme de connexion, la forme de torsion et la forme de courbure, respectivement d'une connexion linéaire ∇ alors :

1^{er} Identité de Bianchi : $D\Theta = \Omega \wedge \theta$ i.e. pour tous $X, Y \in T_uP, u \in P$

$$D\Theta(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(\Omega(X, Y)\theta(Z) + \Omega(Y, Z)\theta(X) + \Omega(Z, X)\theta(Y)) \quad (2.4)$$

2^{iemme} Identité de Bianchi :

$$D\Omega = 0 \quad (2.5)$$

Preuve. Nous avons déjà démontré la 2^{iemme} Identité de Bianchi dans le

Théorème 2.1.1. démontrons la 1^{er} Identité de Bianchi's On a :

$$\begin{aligned} d\theta &= -\omega \wedge \theta + \Theta \Rightarrow d^2\theta = -d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta + d\Theta \\ &\Rightarrow 0 = -d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta + d\Theta \\ &\Rightarrow d\Theta = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\Theta(X_1, X_2, X_3) &= d\Theta(hX_1, hX_2, hX_3) \\ &= (d\omega \wedge \theta)(hX_1, hX_2, hX_3) - (\omega \wedge d\theta)(hX_1, hX_2, hX_3) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\sigma \in \Delta_3} \varepsilon(\sigma) d\omega(hX_{\sigma(1)}, hX_{\sigma(2)}) \theta(hX_{\sigma(3)}) \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{\sigma \in \Delta_3} \varepsilon(\sigma) \omega(hX_{\sigma(1)}) d\theta(hX_{\sigma(2)}, hX_{\sigma(3)}) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\sigma \in \Delta_3} \varepsilon(\sigma) \Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \theta(X_{\sigma(3)}) \\ &= (\Omega \wedge \theta)(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

$$\text{car } \theta(hX_{\sigma(3)}) = \theta(X_{\sigma(3)}), \omega(hX_{\sigma(1)}) = 0$$

Définition 2.3.6. Soit ∇ une connexion linéaire sur M . Nous définissons le tenseur de torsion T et le tenseur de courbure R de la connexion ∇ par :

$$T(X, Y) = \phi_u \left(2\Theta \left(X^h, Y^h \right) \right)$$

et

$$R(X, Y)Z = \phi_u \left(2\Omega \left(X^h, Y^h \right) \left(\phi_u^{-1}(Z) \right) \right)$$

où $X, Y \in T_x M, x \in M$ et $X^h, Y^h \in T_u P, u \in P, \pi(u) = x$ et $d_u \pi(X^h) = X, d_u \pi(Y^h) = Y$.

Remarque 2.3.4.

1. T est un tenseur de type $(1, 2)$.
2. R est un tenseur de type $(1, 3)$.
3. T est une application bilinéaire antisymétrique de $T_x M$ et $T(X, Y) = -T(Y, X)$.
4. $R(X, Y)$ est une application linéaire de $T_x M$ et $R(X, Y) = -R(Y, X)$.

Théorème 2.3.3. Soient le tenseur de torsion T et le tenseur de courbure R alors pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

et

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Lemme 2.3.1. *Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $X^h, Y^h \in \mathfrak{X}(P)$*

$$(\nabla_X Y)_x = \phi_u \left(X_u^h \theta \left(Y^h \right) \right)$$

Preuve. (de Lemme (2.3.1))

On a $(\nabla_X Y)_x = \nabla_{X_x} Y$, d'après le lemme 2.2.1, $(\nabla_X Y)_x = \phi_u (X^h f)$ avec $f \in (\mathfrak{F}P, \mathbb{R}^n)$ et

$$\begin{aligned} f(u) &= \phi_u^{-1} (Y_x) \\ &= \phi_u^{-1} \left(d_u \pi \left(Y_u^h \right) \right) \\ &= \theta \left(Y_u^h \right) \end{aligned}$$

donc $f = \theta (Y^h)$ d'où $(\nabla_X Y)_x = \phi_u (X_u^h \theta (Y^h))$

Preuve. (de Théorème (2.3.3))

Soient X^h, Y^h et Z^h les relèvements horizontaux de X, Y et Z respectivement.

$$\begin{aligned} 1. T(X_x, Y_x) &= \phi_u (2\Theta (X_u^h, Y_u^h)) \\ &= \phi_u (2D\theta (X_u^h, Y_u^h)) \\ &= \phi_u (2d\theta (X_u^h, Y_u^h)) \\ &= \phi_u (X_u^h \theta (Y^h) - Y_u^h (\theta X^h) - \theta [X^h, Y^h]_u) \\ &= \phi_u (X_u^h (\theta (Y^h))) - \phi_u (Y_u^h (\theta X^h)) - \phi_u (\theta [X^h, Y^h]_u) \\ &= \nabla_{X_x} Y - \nabla_{Y_x} X - [X, Y]_x \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])_x \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \phi_u \left(\theta [X^h, Y^h]_u \right) &= \phi_u \circ \phi_u^{-1} \left(d_u \pi [X^h, Y^h]_u \right) \\ &= d_u \pi [X^h, Y^h]_u \\ &= d_u \pi h [X^h, Y^h]_u \\ &= [X, Y]_x \end{aligned}$$

2. On pose $f = \theta (Z^h) \in \mathfrak{F}(P, \mathbb{R}^n)$

$$\left([\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X, Y]} Z \right)_x = (\nabla_X \nabla_Y Z)_x - (\nabla_Y \nabla_X Z)_x - (\nabla_{[X, Y]} Z)_x$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \nabla_Y Z)_x &= \nabla_{X_x} (\nabla_Y Z) \\
&= \phi_u \left(X_u^h \left(\theta (\nabla_Y Z)^h \right) \right) \\
&= \phi_u \left(X_u^h \left(\phi_u^{-1} \left(d_u \pi (\nabla_Y Z)^h \right) \right) \right) \\
&= \phi_u \left(X_u^h \left(\phi_u^{-1} (\nabla_Y Z) \right) \right) \\
&= \phi_u \left(X_u^h \left(\phi_u^{-1} (\phi_u (Y^h f)) \right) \right) \\
&= \phi_u \left(X_u^h (Y^h f) \right) \\
(\nabla_Y \nabla_X Z)_x &= \phi_u \left(Y_u^h (X^h f) \right) \\
(\nabla_{[X,Y]} Z)_x &= \phi_u \left([X, Y]_u^h f \right) \\
&= \phi_u \left((h [X^h, Y^h])_u f \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
([\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z)_x &= \phi_u \left(X_u^h (Y^h f) - Y_u^h (X^h f) - (h [X^h, Y^h])_u f \right) \\
&= \phi_u \left([X^h, Y^h]_u f - (h [X^h, Y^h])_u f \right) \\
&= \phi_u \left((v [X^h, Y^h])_u f \right)
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ tel que $A_u^* = (v [X^h, Y^h])_u$

$$\begin{aligned}
2\Omega(X_u^h, Y_u^h) &= 2D\omega(X_u^h, Y_u^h) \\
&= 2d\omega(X_u^h, Y_u^h) \\
&= X_u^h(\omega(Y^h)) - Y_u^h(\omega(X^h)) - \omega[X^h, Y^h]_u \\
&= -\omega[X^h, Y^h]_u \\
&= -\omega((v [X^h, Y^h])_u) \\
&= -A
\end{aligned}$$

Soit $a_t = \text{expt } A$ le sous groupe à un paramètre associé à A .

$$\begin{aligned}
A_u^* f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(u \cdot a_t) - f(u)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_{a_t^{-1}}(f(u)) - f(u)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_{a_{-t}}(f(u)) - f(u)) \\
&= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_{a_t}(f(u)) - f(u)) \\
&= -A(f(u))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
([\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z)_x &= \phi_u \left((v [X^h, Y^h])_u f \right) \\
&= \phi_u (A_u^* f) \\
&= \phi_u (-A(f(u))) \\
&= \phi_u \left(2\Omega(X_u^h, Y_u^h) (f(u)) \right) \\
&= \phi_u \left(2\Omega(X_u^h, Y_u^h) (\phi_u^{-1}(Z_x)) \right) \\
&= R(X_x, Y_x) Z_x
\end{aligned}$$

Définition 2.3.7. Soit ∇ une connexion linéaire sur M , $(x^i)_{i=1,n}$ un système de coordonnées locales dans un ouvert $U \subset M$, alors

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad , \quad \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$$

Les fonctions Γ_{ij}^k sont appelées les symboles de Christoffel ou les composantes de la connexion linéaire ∇ .

Remarque 2.3.5. Si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Proposition 2.3.4. Soit ∇ une connexion linéaire sur M et $\Gamma_{ij}^k, \bar{\Gamma}_{ij}^k$ les composantes de ∇ correspondants à les systèmes de coordonnées locales $(x^i)_{i=1,n}$ et $(\bar{x}^i)_{i=1,n}$ respectivement alors :

$$\bar{\Gamma}_{pq}^r = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \cdot \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} + \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \cdot \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}$$

Preuve. Soient $(x^i)_{i=1,n}$ et $(\bar{x}^i)_{i=1,n}$ deux systèmes de coordonnées locales. tels que $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^p} = a_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial}{\partial x^p} = \bar{a}_p^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$, où $(a_p^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \right)$ la matrice de Jacobi et $(\bar{a}_p^i) = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \right) = (a_p^i)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ et } \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^q} = \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^q} &= \nabla_{a_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}} a_q^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= a_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} (a_q^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + a_p^i a_q^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \left(a_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} (a_q^k) + a_p^i a_q^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \left(a_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} (a_q^k) + a_p^i a_q^j \Gamma_{ij}^k \right) \bar{a}_k^r \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \\
&= \left(a_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} (a_q^k) \bar{a}_k^r + a_p^i a_q^j \bar{a}_k^r \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q} \right) \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \\
&= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^r}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \bar{\Gamma}_{pq}^r = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k$$

Remarque 2.3.6. Les composantes T_{ih}^k de la torsion T et les composantes R_{ijk}^l de la courbure sont définies par :

$$T \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = T_{ih}^k \text{ et } R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

Proposition 2.3.5. Nous avons

$$T_{ih}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \text{ et } R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \right)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \\
R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma_{ik}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{jk}^m) \frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma_{jk}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^m} - \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{ik}^m) \frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma_{ik}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^m} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{jk}^m) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{ik}^m) \right) \frac{\partial}{\partial x^m} + \left(\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \right) \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{jk}^l) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \left(\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^l}
\end{aligned}$$

Donc $R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m)$.

Définition 2.3.8. Une connexion linéaire ∇ sur M est dite localement symétrique si elle existe une carte (U, φ) sur M telle que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, k .

Proposition 2.3.6. Une connexion linéaire ∇ est symétrique sur $U \subset M$ si et seulement si $T(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Preuve. pour $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(U)$:

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} (X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &\quad - Y^j X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} (X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= X^i Y^j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i Y^j \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Donc $T(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

Définition 2.3.9. Une connexion linéaire est dite symétrique si elle est sans torsion i.e. $T = 0$.

Définition 2.3.10. Une connexion linéaire ∇ sur M est dite localement plate, si elle existe une carte (U, φ) sur M telle que $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tous i, j, k .

Remarque 2.3.7.

1. Toute connexion linéaire localement plate est localement symétrique.
2. Une connexion est plate si $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tous i, j, k sur M .

Chapitre 3

Métriques Riemanniennes dans une Variété

3.1 Variété Riemannienne

Définition 3.1.1. Soit M une variété différentiable. Une métrique Riemannienne g sur M est un Tenseur de type $(0,2)$; tel que pour tout $x \in M$ l'application $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, symétrique, définie positive et non dégénérée. M munie la métrique g est appelée variété Riemannienne, notée $(M; g)$.

Remarque 3.1.1. Dans un système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^n) . Les composantes de g sont $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, où (g_{ij}) est la matrice de g .

Exemple 3.1.1.

1. (\mathbb{R}^n, g_0) est une variété Riemannienne, où g_0 le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n tel que

$$g_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij}$$

2. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$ muni la métrique hyperbolique g définie par

$$g(X, Y) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \cdot g_0(X, Y)$$

$X, Y \in T_x \mathbb{R}^n, x \in D^n$ est une variété Riemannienne.

3.2 Connexion Riemannienne

Définition 3.2.1. On dit qu'une connexion linéaire sur une variété Riemannienne $(M; g)$ est métrique ou Riemannienne si g est parallèle i.e. $\nabla g = 0$.

Théorème 3.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

définie par la formule :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned} \quad (3.1)$$

est une connexion linéaire sur la variété Riemannienne (M, g) , appelée connexion de LeviCivita.

Preuve. *Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a :*

1.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) + g(Z, [fX, Y]) \\ &\quad + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]) \\ &= fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\ &\quad - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X) + fg(Z, [X, Y]) \\ &\quad + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\ &= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) + fg(Z, [X, Y]) \\ &\quad + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) \\ &= 2g(f\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

et comme g est non dégénérée on a, $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

2.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X+W} Y, Z) &= (X+W)(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X+W)) - Z(g(X+W, Y)) \\ &\quad + g(Z, [X+W, Y]) + g(Y, [Z, X+W]) - g(X+W, [Y, Z]) \\ &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) + W(g(Y, Z)) + Y(g(Z, W)) \\ &\quad - Z(g(W, Y)) + g(Z, [W, Y]) + g(Y, [Z, W]) - g(W, [Y, Z]) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_W Y, Z) \\ &= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z) \end{aligned}$$

d'où, $\nabla_{X+W} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$.

3.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(g(X, fY)) + g(Z, [X, fY]) \\
&\quad + g(fY, [Z, X]) - g(X, [fY, Z]) \\
&= X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\
&\quad - fZ(g(X, Y)) + X(f)g(Z, Y) + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) \\
&\quad + Z(f)g(X, Y) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\
&\quad + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

d'où $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

4. De même manière on obtient, $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.

Donc ∇ est une connexion linéaire sur la variété Riemannienne (M, g) .

Théorème 3.2.2. Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g .

Preuve.

- On permute X et Y dans (3.1) et soustrait membre à membre ce qui donne

$$2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\nabla_Y X, Z) = 2g([X, Y], Z)$$

c'est à dire $T(X, Y) = 0$.

- On permute Y et Z dans (3.1) et additionnant membre à membre

$$2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_X Z, Y) = 2Xg(Y, Z)$$

c'est à dire $2(\nabla_X g)(Y, Z) = 0$ i.e. $\nabla g = 0$.

celà prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M . Comme g est non dégénérée, cette relation (3.1) détermine complètement la connexion ∇ , ce qui donne l'unicité.

Proposition 3.2.1. Soient (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n et ∇ la connexion de Levi-Civita. Si (U, φ) est une carte sur M avec les champs de bases $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ associés, alors les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par :

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \quad (3.2)$$

où, g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (U, φ) .

Preuve. On a $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}$, D'après la relation (3.1) on trouve :

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \\
2g\left(\Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \\
\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m g_{ml} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \\
\sum_{l=1}^n \left(\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m g_{ml} \right) g^{lk} &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \\
\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m \left(\sum_{l=1}^n g_{ml} g^{lk} \right) &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \\
\sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m \delta_m^k &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \\
\Gamma_{ij}^k &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.1. Soit la boule ouverte $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ de \mathbb{R}^n munie la métrique hyperbolique g donnée par Les composantes

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{D}^n$$

D'après la formule (3.2) les symboles de Christoffel sont :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^j(x) &= \Gamma_{ji}^j(x) \\
&= -\Gamma_{jj}^i(x) \\
&= \Gamma_{ii}^i(x) \\
&= \frac{2x^i}{1 - \|x\|^2}
\end{aligned}$$

pour $i \neq j$

$\Gamma_{ij}^k(x) = 0$ pour i, j et $k = 1, \dots, n$; deux à deux distincts.

3.3 La courbure Riemannienne

Définition 3.3.1. Soit $(M;g)$ une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne est un tenseur de type $(1,3)$, notée R tel que

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z$$

Proposition 3.3.1. R vérifie les propriétés suivantes : pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

- $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$
- $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
- $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Y, X)W, Z)$
- $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

Chapitre 4

Connexions et Métriques dans \mathbb{R}

4.1 La Structure Différentiable Canonique de \mathbb{R}

4.1.1 La Variété \mathbb{R}

Rappelons d'abord la structure différentiable de \mathbb{R} :

- \mathbb{R} muni l'atlas $\{(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})\}$ est une variété différentiable de dimension 1 et de classe C^{∞} .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_x\mathbb{R} = \{f(x)\frac{d}{dx}|_x, f \in C^{\infty}(\mathbb{R})\}$.
- $T_x\mathbb{R}$ est linéairement isomorphe à \mathbb{R}
- $T\mathbb{R}$ est difféomorphe à \mathbb{R}^2
- L'algèbre des champs de vecteurs sur \mathbb{R} est

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}) = \left\{ f \frac{d}{dx}, f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \right\}$$

- Tout champ de vecteurs sur \mathbb{R} est représenté par une fonction de classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$. i.e.l'application :

$$\begin{aligned} C^{\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto X = f \cdot \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

4.1.2 Difféomorphisme de \mathbb{R}

Définition 4.1.1. *Un difféomorphisme de classe C^k , ($k \geq 1$) de \mathbb{R} est une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f est bijective, f est de classe C^k et f^{-1} de classe C^k .*

Exemple 4.1.1.

La fonction f définie par $f(x) = 1 + 2x$ est une C^∞ difféomorphisme sur \mathbb{R} .
La fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 5$ est une C^∞ difféomorphisme sur \mathbb{R} .

4.2 Connexions Linéaires dans \mathbb{R} **4.2.1 Connexion Linéaire dans \mathbb{R}**

Définition 4.2.1. Une connexion linéaire dans \mathbb{R} est une application

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

telle que :

- $\nabla_{fX+X'}Y = f\nabla_X Y + \nabla_{X'}Y$ où $X, X', Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\nabla_X(\lambda Y + Y') = \lambda\nabla_X Y + \nabla_X Y'$ où $X, Y, Y' \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ où $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Remarque 4.2.1.

- $\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} = \Gamma \frac{d}{dx}$ où $\Gamma = \Gamma_{11}^1$ le symbole de Christoffel, et $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- Si $X = f \cdot \frac{d}{dx}, Y = g \cdot \frac{d}{dx}$ alors $\nabla_X Y = (f \cdot g' + f \cdot g \cdot \Gamma) \frac{d}{dx}$
- On note $Cl(\mathbb{R})$ l'ensemble des connexions linéaires dans \mathbb{R} , alors :
l'application :

$$\begin{aligned}C^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow Cl(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \nabla^f = \nabla\end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire, avec $\nabla_{\frac{d}{dx}}^f \frac{d}{dx} = \Gamma_f \frac{d}{dx}$. D'où la proposition suivante

Proposition 4.2.1. Toute connexion linéaire de classe C^∞ dans \mathbb{R} est représentée par une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 4.2.2. Toutes les connexions linéaires dans \mathbb{R} sont localement plates.

Preuve. Soit ∇ une connexion linéaire de torsion T et de courbure R alors :
Les tenseurs de torsion et de courbure sont antisymétriques dont nulles en dimension 1. Donc ∇ est une connexion linéaire localement plate.

4.2.2 Connexions Linéaires Difféomorphes

Définition 4.2.2. Deux connexions linéaires ∇ et $\bar{\nabla}$ dans \mathbb{R} sont difféomorphes ($\nabla \sim \bar{\nabla}$) s'il existe un difféomorphisme f de \mathbb{R} qui transforme ∇ à $\bar{\nabla}$ i.e. $f_*\nabla = \bar{\nabla}$. c'est-à-dire pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$

$$f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$$

Remarque 4.2.2. ($\nabla \sim \bar{\nabla}$) \Leftrightarrow il existe un C^∞ -difféomorphisme f de \mathbb{R} tel que, pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$

$$f_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{f_*X} f_*Y$$

\sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\text{Cl}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.2.3. Si f est un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} alors :

$$f_* \left(\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} \right) = \bar{\nabla}_{f_* \frac{d}{dx}} f_* \frac{d}{dx} \Leftrightarrow \Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x)\bar{\Gamma}(f(x))$$

où $\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} = \Gamma \frac{d}{dx}$, $\bar{\nabla}_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} = \bar{\Gamma} \frac{d}{dx}$ et $\Gamma, \bar{\Gamma} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Preuve. Soient f C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$
 $\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} = \Gamma \frac{d}{dx}$, $\bar{\nabla}_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} = \bar{\Gamma} \frac{d}{dx}$ et $\Gamma, \bar{\Gamma} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f_* \left(\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} \right) \Big|_y &= f_* \left(\Gamma \frac{d}{dx} \right) \Big|_y \\ &= d_{f^{-1}(y)} f \left(\Gamma(f^{-1}(y)) \frac{d}{dx} \Big|_{f^{-1}(y)} \right) \\ &= d_x f \left(\Gamma(x) \frac{d}{dx} \Big|_x \right) \\ &= \Gamma(x) d_x f \left(\frac{d}{dx} \Big|_x \right) \\ &= \Gamma(x) f'(x) \frac{d}{dy} \Big|_y \dots \dots (1) \\ \left(\bar{\nabla}_{f_* \frac{d}{dx}} f_* \frac{d}{dx} \right) \Big|_y &= \bar{\nabla}_{(f_* \frac{d}{dx})} \Big|_y f_* \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 \left(f_* \frac{d}{dx} \right) \Big|_y &= \left(df \circ \frac{d}{dx} \circ f^{-1} \right) \Big|_y \\
 &= d_{f^{-1}(y)} f \left(\frac{d}{dx} \Big|_{f^{-1}(y)} \right) \\
 &= d_x f \left(\frac{d}{dx} \Big|_x \right) \\
 &= f'(x) \frac{d}{dy} \Big|_y \\
 &= f'(f^{-1}(y)) \frac{d}{dy} \Big|_y \\
 &= (f' \circ f^{-1})(y) \frac{d}{dy} \Big|_y
 \end{aligned}$$

alors : $f_* \frac{d}{dx} = (f' \circ f^{-1}) \frac{d}{dy}$

donc :

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_{(f_* \frac{d}{dx}) \Big|_y} f_* \frac{d}{dx} &= \bar{\nabla}_{f'(x) \frac{d}{dy} \Big|_y} (f' \circ f^{-1}) \frac{d}{dy} \\
 &= f'(x) \left[\frac{d}{dy} (f' \circ f^{-1})(y) \frac{d}{dy} \Big|_y + (f' \circ f^{-1})(y) \bar{\nabla}_{\frac{d}{dy} \Big|_y} \frac{d}{dy} \right] \\
 &= f'(x) \left[\frac{d}{dx} f'(f^{-1}(y)) \frac{dx}{dy} \frac{d}{dy} \Big|_y + f'(f^{-1}(y)) \bar{\Gamma}(y) \frac{d}{dy} \Big|_y \right] \\
 &= f'(x) \left[\frac{d}{dx} f'(x) \frac{1}{f'(x)} + f'(x) \bar{\Gamma}(y) \right] \frac{d}{dy} \Big|_y \\
 &= f'(x) \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x) \bar{\Gamma}(f(x)) \right] \frac{d}{dy} \Big|_y \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

En résulte de (1) et (2)

$$\Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x) \bar{\Gamma}(f(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.2.1. Les connexions linéaires qui sont défini par les deux fonctions $\Gamma(x) = 8 + 4x$ et $\bar{\Gamma}(x) = 3 + x$ sont difféomorphes. En effet soit le difféomorphisme f tel que $f(x) = 2x + 1$.

f est un solution de l'équation différentielle $\Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x) \bar{\Gamma}(f(x))$.

Proposition 4.2.4. Deux connexions linéaires dans \mathbb{R} ne sont pas toujours difféomorphes.

Preuve. Pour toutes $\Gamma, \bar{\Gamma} \in C^\infty(\mathbb{R})$, la solution générale f de l'équation différentielle $\Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x)\bar{\Gamma}(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un difféomorphisme de \mathbb{R} . On a le contre exemple suivant : Pour $\Gamma = 1$ et $\bar{\Gamma} = 0$ alors :
 l'équation différentielle $1 = \frac{f''(x)}{f'(x)}$ dont la solution générale est $f(x) = ke^x + c$
 où $k \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$
 f est une fonction injective, non surjective sur \mathbb{R} car

$$f(\mathbb{R}) = \begin{cases}]c, +\infty[\subsetneq \mathbb{R} & \text{si } k > 0 \\]-\infty, c[\subsetneq \mathbb{R} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Donc $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ i.e. (f non surjective).

Alors f n'est pas un difféomorphisme sur \mathbb{R} .

Proposition 4.2.5. Toutes les connexions linéaires dans \mathbb{R} sont deux à deux localement difféomorphes.

Preuve. Soit ∇ et $\bar{\nabla}$ deux connexions linéaires qui sont défini par les deux fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ Γ et $\bar{\Gamma}$ respectivement. On cherche f solution de l'équation différentielle $\Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x)\bar{\Gamma}(f(x))$ (*)
 posons $X(x) = \ln |f'(x)|$, l'équation différentielle (*) s'écrit sous la forme $\frac{d}{dx}X(x) = F(X(x), x)$. pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on associe le problème de cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}X(x) = F(X(x), x) \\ X(0) = \xi \end{cases} \quad (\star, \star)$$

d'après le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles, le problème de cauchy possède une unique solution maximale. il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ le problème (\star, \star) possède une solution maximale X sur l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Définition 4.2.3. On définit l'ensemble des classes d'équivalences (classes d'isomorphisme) de la relation d'équivalence \sim sur l'ensemble $Cl(\mathbb{R})$.

$$Cl(\mathbb{R}) / \sim = \{[\bar{\Gamma}], \bar{\Gamma} \in C^\infty(\mathbb{R})\}$$

Où $[\bar{\Gamma}]$ la classe d'équivalence de $\bar{\Gamma}$.

$$[\bar{\Gamma}] = \left\{ \Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}), \Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x)\bar{\Gamma}(f(x)) \right\}$$

Où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^∞ -difféomorphisme. L'ensemble $Cl(\mathbb{R}) / \sim$ est appelé le module de connexions linéaires sur \mathbb{R} noté $MCL(\mathbb{R})$.

4.3 Métriques Riemanniennes sur \mathbb{R}

4.3.1 Métrique Riemannienne sur \mathbb{R}

Définition 4.3.1. Une métrique Riemannienne g sur \mathbb{R} est un tenseur de type $(0, 2)$ sur \mathbb{R} telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_x : T_x\mathbb{R} \times T_x\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, symétrique et définie positive. (\mathbb{R}, g) est appelée variété Riemannienne.

Remarque 4.3.1. pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \longmapsto g_x(X, Y) = a(x) \cdot X \cdot Y$$

Où $a(x)$ est une matrice d'un seul élément.

- g_x est définie positive $\Leftrightarrow g_x(X, X) > 0 \Leftrightarrow a(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- g_x est de classe $C^\infty \Leftrightarrow a$ est une fonction de classe C^∞ .
- On note $Mr(\mathbb{R})$ l'ensemble des métriques Riemanniennes dans \mathbb{R} , alors l'application :

$$\{a \in C^\infty(\mathbb{R}), a > 0\} \longrightarrow Mr(\mathbb{R}) \\ a \longmapsto g^a = g$$

est un isomorphisme linéaire avec $g_x^a(X, Y) = a(x) \cdot X \cdot Y$

Proposition 4.3.1. Toute métrique Riemannienne dans \mathbb{R} est représentée par une fonction de classe C^∞ , et strictement positive.

Exemple 4.3.1.

- Les fonctions $g_1(x) = \exp(x)$, $g_2(x) = 1.5 + \sin(x)$, $g_3(x) = 2 + \text{th}(x)$ sont des métriques Riemanniennes dans \mathbb{R} .
- Les fonctions $g_1(x) = \ln(x)$, $g_2(x) = \cos(x)$, $g_3(x) = \text{sh}(x)$ ne sont pas des métriques Riemanniennes dans \mathbb{R} .

4.3.2 Métriques Riemanniennes Isométriques

Définition 4.3.2. Deux métriques Riemanniennes g et \bar{g} dans \mathbb{R} sont isométriques ($g \sim \bar{g}$) s'il existe un difféomorphisme f de \mathbb{R} tel que $f^*\bar{g} = g$ c'est à dire, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$

$$f^*\bar{g}(X, Y) = g(X, Y)$$

Remarque 4.3.2. ($g \sim \bar{g}$) \Leftrightarrow il existe un C^∞ -difféomorphisme f de \mathbb{R} tels que : pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$

$$f^*\bar{g}(X, Y) = g(X, Y)$$

\sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble $Mr(\mathbb{R})$.

Proposition 4.3.2. *Si f est un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$f^* \bar{g} \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right) = g \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right) \Leftrightarrow (f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)$$

Preuve. *Soient f C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$ avec $g_x \left(\frac{d}{dx} \Big|_x, \frac{d}{dx} \Big|_x \right) = a(x)$ et $\bar{g}_x \left(\frac{d}{dx} \Big|_x, \frac{d}{dx} \Big|_x \right) = \bar{a}(x)$.*

$$\begin{aligned} (f^* \bar{g})_x \left(\frac{d}{dx} \Big|_x, \frac{d}{dx} \Big|_x \right) &= \bar{g}_{f(x)} \left(f_* \left(\frac{d}{dx} \right) \Big|_{f(x)}, f_* \left(\frac{d}{dx} \right) \Big|_{f(x)} \right) \\ &= \bar{g}_{f(x)} \left(d_x f \left(\frac{d}{dx} \Big|_x \right), d_x f \left(\frac{d}{dx} \Big|_x \right) \right) \\ &= \bar{g}_{f(x)} \left(f'(x) \frac{d}{dy} \Big|_{f(x)}, f'(x) \frac{d}{dy} \Big|_{f(x)} \right) \\ &= (f'(x))^2 \bar{g}_{f(x)} \left(\frac{d}{dy} \Big|_{f(x)}, \frac{d}{dy} \Big|_{f(x)} \right) \\ &= (f'(x))^2 \bar{a}(f(x)) \end{aligned}$$

Donc $f^ \bar{g} \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right) = g \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right) \Leftrightarrow (f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exemple 4.3.2. *Les métriques Riemanniennes qui sont défini par les deux fonctions a et \bar{a} telles que $a(x) = 4e^{2x+1}$ et $\bar{a}(x) = e^x$ sont deux métriques Riemanniennes isométriques. En effet :*

soit le difféomorphisme f tel que $f(x) = 2x + 1$, f est un solution de l'équation différentielle $(f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)$.

Proposition 4.3.3. *Deux métriques Riemanniennes dans \mathbb{R} ne sont pas toujours isométriques.*

Preuve. *Pour toutes $a, \bar{a} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $a, \bar{a} > 0$, la solution générale f de l'équation différentielle $(f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)$, $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un difféomorphisme de \mathbb{R} .*

On a le contre exemple suivant :

Pour $a(x) = e^{2x}$ et $\bar{a}(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ alors l'équation différentielle $(f'(x))^2 = e^{2x}$ dont la solution générale est $f(x) = \pm e^x + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Mais f est une fonction injective, non surjective sur \mathbb{R} .

Alors f n'est pas un difféomorphisme sur \mathbb{R} .

Proposition 4.3.4. *Toutes les métriques Riemanniennes dans \mathbb{R} sont deux à deux localement isométriques.*

Preuve. *Soit g et \bar{g} deux métriques Riemanniennes qui sont défini par les deux fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ a et \bar{a} respectivement. On cherche f solution*

de l'équation différentielle $(f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)(*)$. L'équation différentielle (*) s'écrit sous la forme $\frac{d}{dx}X(x) = F(X(x), x)$. pour tout ξ on associe le probleme de cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}X(x) &= F(X(x), x) \\ X(0) &= \xi \quad (*, *) \end{cases}$$

d'après le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles, le probleme de cauchy possede une une seule solution maximale. il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ le probleme $(*, *)$ possede une solution maximale X sur l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Définition 4.3.3. On définit l'ensemble des classes d'équivalences (classes d'isométrie) de la relation d'équivalence \sim sur l'ensemble $Mr(\mathbb{R})$.

$$Mr(\mathbb{R}) / \sim = \{[\bar{a}], \bar{a} \in C^\infty(\mathbb{R}), \bar{a} > 0\}$$

où $[\bar{a}]$ la classe d'équivalence de \bar{a} .

$$[\bar{a}] = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}), a > 0, a(x) = (f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) \right\}$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^∞ - difféomorphisme. L'ensemble $Mr(\mathbb{R}) / \sim$ est appelé le module de métriques Riemanniennes dans \mathbb{R} noté $MMR(\mathbb{R})$.

4.3.3 Connexion Linéaire Métrique

Proposition 4.3.5. Toute connexion linéaire dans \mathbb{R} est métrique.

Preuve. Soit ∇ une connexion linéaire dans (\mathbb{R}, g) définie par la fonction Γ . Montrons que ∇ est métrique c'est à dire il existe une métrique g dans \mathbb{R} telle que $\nabla g = 0$. Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}), g\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right)(x) = a(x)$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{d}{dx}} g\right)\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right)(x) &= \frac{d}{dx}g\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right)(x) - g\left(\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right)(x) - g\left(\frac{d}{dx}, \nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx}\right)(x) \\ &= a'(x) - 2g\left(\Gamma \frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right)(x) \\ &= a'(x) - 2\Gamma(x)a(x) \end{aligned}$$

Donc il suffit de poser $\frac{a'(x)}{a(x)} = 2\Gamma(x)$ i.e $a(x) = \exp\left(2 \cdot \int_0^x \Gamma(t)dt\right)$ pour g est parallèle.

Proposition 4.3.6. Soient $\nabla, \bar{\nabla}$ deux connexions métriques dans \mathbb{R} , et g, \bar{g} deux métriques compatibles avec $\nabla, \bar{\nabla}$ respectivement alors :

$$g \text{ et } \bar{g} \text{ sont isométriques} \Rightarrow \nabla \text{ et } \bar{\nabla} \text{ sont difféomorphes}$$

Preuve. Soit ∇ et $\bar{\nabla}$ deux connexions linéaires qui sont défini par les deux fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ Γ et $\bar{\Gamma}$ respectivement. Soit g et \bar{g} deux métriques Riemanniennes qui sont défini par les deux fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ a et \bar{a} respectivement telles que g et \bar{g} sont isométriques et compatibles avec ∇ et $\bar{\nabla}$ respectivement. il existe un C^∞ -difféomorphisme f de \mathbb{R} tel que $(f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)$. Puis que :

$$\begin{aligned}\nabla g = 0 &\Rightarrow \Gamma(x) = \frac{a'(x)}{2a(x)} \Rightarrow a(x) = \exp\left(2 \cdot \int_0^x \Gamma(t)dt\right) \\ \bar{\nabla} \bar{g} = 0 &\Rightarrow \bar{\Gamma}(x) = \frac{\bar{a}'(x)}{2 \cdot \bar{a}(x)} \Rightarrow \bar{a}(x) = \exp\left(2 \cdot \int_0^x \bar{\Gamma}(t)dt\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'(x))^2 \cdot e^{(2 \cdot \int_0^x \bar{\Gamma}(f(t))dt)} &= e^{(2 \cdot \int_0^x \Gamma(t)dt)} \Rightarrow e^{2 \cdot \ln|f'(x)|} \cdot e\left(2 \cdot \int_0^x \bar{\Gamma}(f(t))dt\right) = e^{(2 \cdot \int_0^x \Gamma(t)dt)} \\ &\Rightarrow \ln|f'(x)| + \int_0^x \bar{\Gamma}(f(t))dt = \int_0^x \Gamma(t)dt \\ &\Rightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x)\bar{\Gamma}(f(x)) = \Gamma(x)\end{aligned}$$

Alors ∇ et $\bar{\nabla}$ sont difféomorphes.

Remarque 4.3.3. Soient $\nabla, \bar{\nabla}$ deux connexions métriques dans \mathbb{R} , et g, \bar{g} deux métriques compatibles avec $\nabla, \bar{\nabla}$ respectivement. Soit f un difféomorphisme qui transforme ∇ en $\bar{\nabla}$, alors f ne transforme pas forcément g en \bar{g} . On a le contre exemple suivante.

Exemple 4.3.3. Les deux connexions définie par les fonctions Γ et $\bar{\Gamma}$ telles que $\Gamma(x) = 8 + 4x$ et $\bar{\Gamma}(x) = 3 + x$ sont difféomorphes. En effet : Soit le difféomorphisme f tel que $f(x) = 2x + 1$, f est un solution de l'équation différentielle $\Gamma(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f'(x)\bar{\Gamma}(f(x))$. Mais les métriques définie par les fonctions a et \bar{a} telles que

$$a(x) = \exp\left(2 \cdot \int \Gamma(x)dx\right) = \exp(16x + 4x^2), \quad \bar{a}(x) = \exp\left(2 \cdot \int \bar{\Gamma}(x)dx\right) = \exp(6x + x^2)$$

ne sont pas isométriques, parce que f n'est pas un solution de l'équation différentielle $(f'(x))^2 \cdot \bar{a}(f(x)) = a(x)$.

4.3.4 Comparaisons deux Métriques Ayant la même Connexion

Proposition 4.3.7. Deux métriques Riemanniennes g_1 et g_2 de \mathbb{R} ayant la même Connexion métrique ∇ , si seulement si $g_1 = kg_2$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$.

Preuve.

1. Soient g_1 et g_2 deux métriques sur \mathbb{R} ayant la même Connexion ∇ .

$$g_1 \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right) = a_1, \quad a_1 > 0 \text{ et } a_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$g_2 \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx} \right) = a_2, \quad a_2 > 0 \text{ et } a_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\nabla_{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx} = \Gamma \frac{d}{dx} \text{ et } \Gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$$

D'après la relation (3.2) on trouve $\Gamma = \frac{a_1'}{2a_1} = \frac{a_2'}{2a_2} \Rightarrow a_1 = ka_2$ où $k \in \mathbb{R}^*, k > 0$. i.e $g_1 = kg_2$.

2. Soient g_1 et g_2 deux métriques sur \mathbb{R} telles que $g_1 = kg_2$ et compatibles avec ∇_1, ∇_2 respectivement. on a :

$$a_1 = ka_2 \text{ et } \Gamma_1 = \frac{a_1'}{2a_1} = \frac{ka_2'}{2ka_2} = \frac{a_2'}{2a_2} = \Gamma_2$$

donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$ alors $\nabla_1 = \nabla_2$.

Bibliographie

- [1] S.Kobayashi and K.Nomizu , *Fondations of differential geometry* , vol.I , II.Intersciense , New York-London 1963.
- [2] Thierry Masson , *Géométrie différentielle , groupes et algèbres de Lie , fibrés et connexion* , version du 8 juillet 2004.
- [3] Robert Coqueaux , *Espaces fibrés et connexions* , Centre de Physique Théorique Luminy Marseille. 2007.
- [4] Sigurdur Helgason , *Differential geometry , Lie groups , and symmetric spaces* , Department of Mathematics Massachusetts Institute of Technology Cambridge , Massachusetts.
- [5] Bishop R.L. , Crittenden R. J , *Geometry of manifolds* , Academic Press , 1964.
- [6] P. Buser , *Géométrie Riemannienne* , version du 22 octobre 2003.
- [7] Peter Petersen , *Riemannian geometry (Second Edition)* , Department of Mathematics , University of California , Los Angeles , CA 90095-1555 USA .
- [8] G.Dloussky , *Variétés Riemanniennes,variétés hermitiennes* , version du 7 avril 2005.
- [9] Frédéric.Paulin , *Géométrie différentielle élémentaire* , version préliminaire année 2006- 2007.
- [10] Azzouz.Awane , *Cours de géométrie différentielle* , Université Hassan II Mohamedia- Casablanca , 8 janvier 2002 .
- [11] Article.Boris.kolev , *Notions fondamentales de géométrie différentielle* , 23 février 2004
- [12] Sigmundur Gudmunsson , Elias Kappos on the Geometry of Tangent Bundles , Expo.Math .20(2002),1-41.
- [13] J.J. Duistermaat , *Principal Fiber Bundles Spring School* , June 17 , 22 , 2004 , Utrecht
- [14] Olivier.RipollJuin , *Sur les connexions* , 2002 Deuxième version , Novembre 2002.
- [15] Abderrahim Zagane , *Module des connexions linéaires dans les variétés de dimension un* , Université de Mascara , 28 Avril 2010