



REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



Ministère de l'Enseignement supérieur et de la
Recherche Scientifique

Centre universitaire SALHI Ahmed – Naama

Institut des Sciences et technologies

Département de Mathématiques et informatiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Filière : Mathématiques

Thème

**Analyse Spectrale d'un Opérateur
D'Ordre Deux de Type Fractionnaire**

Présenté par : BELAM Abdellah

Devant le jury :

Encadreur : M^r TAHRI Kamel ESM TLEMEN.

Président : M^r KHALDI Brahim CU- SALHI Ahmed -NAAMA .

Examineur : M^r ZOUAOUI Ali UNV-MUSTHAPHA Stambouli MASCARA.

Année universitaire 2020/2021

Dédicaces

A mes chers parents pour leur soutien leur patience, leur encouragement durant mon parcours scolaire.

A toute ma famille ainsi à tous mes amis, et à l'ensemble des étudiants de la promotion de 2^{eme} année master MATH de l'année 2020/2021 .

Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

Je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

Remerciements

Après avoir rendu grâce a Dieu le tout puissant et le Miséricordieux nous tenons à remercier vraiment tous ceux qui de près ou de loin ont participé à la rédaction de ce document .Il s'agit plus particulièrement de :

Monsieur TAHRI Kamel spécialité Géométrie différentielle
pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et son sens d'écoute et d'échange .

Tout le corps professoral de CU Salhi Ahmed Naama qui nous a fait bénéficié d'une formation pluridisciplinaire de très haut niveau te très adaptée aux réalités du MATHEMATIQUE .

Tous les membres mon jury de thèse de Master.

Table des Matières

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie d'aujourd'hui reposent largement sur des équations aux dérivées Partiel, auquel il sera fait référence dans un formulaire EDP abrégé ci-après. C'est vraiment merci pour modéliser ces phénomènes par EDP, nous avons pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, notamment pour obtenir des prédictions , parfois très subtile.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des EDP, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre , c'est-à-dire si une ou plusieurs solutions existent et d'écrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

Quand sont apparues les EDP ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité , et n'oublions pas le grand savant qui fait un super succès dans les EDP C'est le savant Sobolov, où nous allons profiter de l'occasion et donner un aperçu de sa vie :

Les espaces de Sobolev portent le nom du savant Sergueï Lvovitch Sobolev qui est un mathématicien et un physicien atomique russe de l'époque Soviétique (né le 6 octobre

1908 et décède le 3 janvier 1989). Au cours des années 30, Sobolev a introduit des notions qui sont fondamentales dans le développement de plusieurs domaines des mathématiques. Tout en travaillant en Moscou, Sobolev a construit la méthode standard pour résoudre les problèmes elliptiques avec conditions aux limites en introduisant ses espaces fonctionnels. Il a donné les inégalités sur les normes relatives de ces espaces qui étaient importants dans la théorie d'intégration des espaces fonctionnels, il a de plus appliqué ses méthodes pour résoudre les problèmes difficiles de la physique mathématique. En 1939, Sobolev a été élu membre part entière de l'académie des sciences d'URSS.

On a aussi les équations différentielles fractionnelles sont des généralisations d'équations différentielles classiques d'ordre entier. Au cours des dernières décennies, les équations différentielles fractionnaires ont fait l'objet de nombreux études en raison de leur apparition fréquente dans diverses applications en physique, biologie, ingénierie, traitement du signal, identification des systèmes, théorie du contrôle, finance et fractionnement dynamique. De nombreux articles ont étudié certains aspects de équations différentielles fractionnaires, telles que l'existence et unicité des solutions aux problèmes de type Cauchy, les méthodes pour les solutions explicites et numériques, et stabilité des solutions.

Parmi les enquêtes pour les équations différentielles fractionnaires, la recherche de solutions exactes et solutions numériques d'équations différentielles fractionnaires est un sujet important. De nombreuses méthodes puissantes et efficaces ont été proposés pour obtenir des solutions numériques et solutions exactes d'équations différentielles fractionnaires jusqu'à présent. Pour exemple, ces méthodes incluent la décomposition adonienne méthode la méthode itérative variationnelle la méthode de perturbation par homotopie le différentiel méthode de transformation, méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, et le Riccati fractionnaire méthode de sous-équation. Sur la base de ces méthodes, diverses équations différentielles fractionnaires ont été étudiées.

En l'analyse fonctionnelle. Elle devient rapidement le cadre général de résolution d'une large famille de problèmes mathématiques, en particulier l'analyse, les équations

différentielles ou les équations aux dérivées partielles. Les valeurs propres sont un des outils essentiels à la résolution de ces problèmes. Elles s'avèrent indispensables en physique pour des théories comme la mécanique quantique ou la relativité générale. Pendant une longue période les anglo-saxons utilisent indifféremment les termes de proper value et eigenvalue, provenant respectivement de la traduction des textes de Jordan et de Hilbert. Le vocabulaire est maintenant fixé au bénéfice de la deuxième expression.

Si λ est une valeur propre de l'opérateur T , alors l'opérateur $(T - \lambda I)$ n'est pas un-à-un, et donc son inverse $(T - \lambda I)^{-1}$ n'existe pas. L'inverse est vrai pour les espaces vectoriels de dimension finie, mais pas pour les espaces vectoriels de dimension infinie. En général, l'opérateur $(T - \lambda I)$ peut ne pas avoir d'inverse même si λ n'est pas une valeur propre.

Pour cette raison, en analyse fonctionnelle, les valeurs propres peuvent être généralisées au spectre d'un opérateur linéaire T comme l'ensemble de tous les scalaires λ pour lesquels l'opérateur $(T - \lambda I)$ n'a pas d'inverse borné. Le spectre d'un opérateur contient toujours toutes ses valeurs propres mais ne s'y limite pas.

Chapitre 1

Les espaces de Sobolev de Type Fractionnaire

1.1 Introduction:

Dans ce chapitre on va introduire les espaces de Sobolev de type fractionnaire noté $W^{s,p}(\Omega)$ et quelques propriétés topologiques et fonctionnelles de ces espaces, puis on va introduire quelques injections de type Sobolev pour ces espaces là.

Nous définissons les espaces de Sobolev de type fractionnaire dans le cas où $s \notin \mathbb{N}$.

1.2 Les Espaces de Sobolev de Type Fractionnaire pour $0 < s < 1$:

Définition 1.1 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $s \in (0, 1)$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev de type fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx + \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

où la semi norme de Gagliardo de u est :

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3 Les Espaces de Sobolev de Type Fractionnaire

pour $1 < s < +\infty$:

Définition 1.2 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $s \in]1, +\infty[$ et $p \in [1, +\infty[$, on peut écrire $s = m + \sigma$ où $m \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in (0, 1)$, alors on définit l'espace de Sobolev de type fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^{\alpha}u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ pour tout } \alpha, s \setminus |\alpha| = m\},$$

muni de la norme suivante:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}u\|_{W^{\sigma,p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.4 Des Exemples d'Application sur les Espaces de Sobolev de Type Fractionnaire:

Exemple 1.1 *Montrons que :*

$$\begin{aligned}u & : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \\x & : \longrightarrow \ln |x|\end{aligned}$$

appartient à $W^{s,p}((0, 1))$ où $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$ avec $sp < 1$.

Preuve: Comme $u \in L^p((0, 1))$ c-à-d: on sait que u est continuée donc elle est mesurable dans $(0, 1)$ de plus, on calcule $\int_0^1 (\ln |x|)^p dx$: On sait que

$$|\ln |x|| < |x|$$

alors

$$\begin{aligned}|\ln |x||^p & < |x|^p, \\ \int_0^1 |\ln |x||^p dx & < \int_0^1 |x|^p dx, \\ \int_0^1 |x|^p dx & = \left[\frac{1}{p+1} |x|^{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} < \infty,\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\ln |x||^p dx & < \infty. \\ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} & \in L^p((0, 1) \times (0, 1))\end{aligned}$$

donc, on pose:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|x - y|^{sp+1}} dx dy$$

on a :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{y^{sp+1} \left| \frac{x}{y} - 1 \right|^{sp+1}} dx dy$$

en faisant le changement de variable $t = \frac{x}{y}$ alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} y^{-sp} \frac{|\ln|ty| - \ln|y||^p}{|t - 1|^{sp+1}} dt dy \\ I &= \int_0^1 y^{-sp} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln \left| \frac{ty}{y} \right||^p}{|t - 1|^{sp+1}} dt \\ I &= \int_0^1 y^{-sp} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln|t||^p}{|1 - t|^{sp+1}} dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy \int_0^1 \frac{|\ln|t||^p}{|1 - t|^{sp+1}} dt + \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln|t||^p}{|1 - t|^{sp+1}} dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Pour I_1 on a les equivalences suivants:

au voisinage de 0:

$$f_1(t) = \frac{|\ln|t||^p}{|1 - t|^{sp+1}} \sim f_2(t) = |\ln|x||^p$$

car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 1$$

et au voisinage de 1:

$$f_1(t) = \frac{|\ln|t||^p}{|1 - t|^{sp+1}} \sim f_3(t) = |1 - t|^{p-sp-1}$$

car

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_1(t)}{f_3(t)} = 1.$$

De plus: on a $sp < 1$ alors d'après l'intégrale de Riemann type 2 on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy < +\infty.$$

Pour I_2 , d'après la formule de Fubini nous avons :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{y^{sp}} dy \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln |t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{|\ln |t||^p}{|1-t|^{sp+1}} dt \int_0^{\frac{1}{t}} y^{-sp} dy \\ &= \frac{1}{-sp+1} \int_1^{+\infty} \frac{|\ln |t||^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} dt \end{aligned}$$

or on a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{|1-t|^{sp+1}} \sim \frac{1}{|t|^{sp+1}}.$$

Alors

$$\frac{|\ln |t||^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \sim \ln |x|^p t^{-2}$$

et au voisinage de 1:

$$\frac{|\ln |t||^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \sim |1-t|^{p-sp-1}.$$

Donc

$$I_2 < +\infty.$$

■

Exemple 1.2 Montrons que :

$$\begin{aligned} u &: (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &: \longrightarrow u(x) := |x|^\alpha \end{aligned}$$

appartient à $W^{s,p}((0,1))$ où $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$ avec $sp < 1$

Preuve: alors on pose

$$I = \int_0^1 (|x|)^p dx$$

avec $\alpha = 1$ et comme $u \in L^p((0,1))$ c-à-d :on sait que u est continuée donc elle est mesurable dans $(0,1)$ de plus , on calcule

$$I = \int_0^1 (|x|)^p dx = \left[\frac{|x|^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1} < \infty.$$

On montre que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p((0,1) \times (0,1))$$

On pose :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x - y|^p}{|x - y|^{sp+1}} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 |x - y|^{p-sp-1} dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^y (y - x)^{p-sp-1} dx + \int_y^1 (x - y)^{p-sp-1} dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\left[-\frac{1}{p-sp} (y - x)^{p-sp} \right]_0^y + \left[\frac{1}{p-sp} (x - y)^{p-sp} \right]_y^1 \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{p-sp} y^{p-sp} + \frac{1}{p-sp} (1 - y)^{p-sp} \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{p-sp}\right) \left(\frac{1}{p-sp+1}\right) [y^{p-sp+1}]_0^1 - \left(\frac{1}{p-sp}\right) \left(\frac{1}{p-sp+1}\right) [(1-y)^{p-sp+1}]_0^1 \\
&= \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} + \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} \\
&= \frac{2}{(p-sp)(p-sp+1)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

■

1.5 L'approximation de l'Espace $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$:

Définition 1 Pour chaque $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, elle peut être approximer au $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}$, donc pour tout $s > 0$ on a :

$$\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}} = W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

C'est pour sa l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.6 L'Approximation de l'Espace $W^{s,p}(\Omega)$:

Définition 2 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{s,p}(\Omega)$, par conséquent, on note par $W_0^{s,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ avec respectueusement de la norme dans $W^{s,p}(\Omega)$, donc on a :

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}.$$

1.7 Dualité de l'Espace $W^{s,p}(\Omega)$:

Définition 1.3 Si $s < 0$ et $p \in]1, +\infty[$ alors :

$$W^{s,p}(\Omega) := (W_0^{-s,q}(\Omega))^*$$

où $W^{s,p}(\Omega)$ est l'espace dual $W_0^{-s,q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

proposition 1.1 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, nous avons alors :

1. $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p < +\infty$.
2. $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.
3. $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.

La preuve de 1. se trouve dans : Espace Fonctionnelle Utilisation Dans La résolution des équations aux dérivées partielles .Par FRANCOIS et GILBERT DEMMENGEL , page 194.

1.8 Les Injections de type Sobolev :

Cette section est consacrée aux plongements d'espace Sobolev de type fractionnelle dans les espaces de Lebesgue. Nous rappelons ici brièvement quelques résultats de base :

Théorème 1.1 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $p \in [1, +\infty[$ alors :

1. Si $0 < s < s' < 1$, alors l'injection continue est :

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

pour cela il existe un $c_1(n, s, p) \geq 1$ telque :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c_1(n, s, p) \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

2. Si $0 < s < 1$ et Ω est de classe $C^{0,1}$ avec un bord borné $\partial\Omega$, alors l'injection continue est :

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

pour cela il existe un $c_2(n, s, p) \geq 1$ tel que :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c_2(n, s, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

3. Si $1 < s < s'$ et Ω est de classe $C^{0,1}$ alors l'injection continue est :

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega) .$$

Maintenant nous sommes prêts de discuter les propriétés de l'injection de $W^{s,p}(\Omega)$ alors on distingue 3 cas :

1.8.1 Les Propriétés de l'Injection de $W^{s,p}(\Omega)$:

i) Le cas de $sp < n$:

Théorème 1.2 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$, ensuite il existe un $c := c(n, p, s)$ positif tel que pour tout $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\|u\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^p \leq c \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

où le constant $p_s^* := \frac{pn}{n-sp}$, il est ce qu'on appelle l'exposant critique fractionnaire. Par conséquent, l'injection continue est :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

pour tout $q \in [p, p_s^*]$ de plus : l'injection compacte de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $q \in [p, p_s^*[$, car $L^q(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.3 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ telque $sp < n$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alors il existe un $C := C(n, p, s)$ positif telque pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

pour tout $q \in [p, p_s^*]$.

Theorem 3 * Si Ω est borné alors on a une injection compacte :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tous $q \in [1, p_s^*]$.

ii) Le cas de $sp = n$:

Théorème 1.4 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ telque $sp = n$, ensuite il existe un $c := c(n, p, s)$ positif telque pour tout $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$, de plus on a l'injection continue :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$.

Théorème 1.5 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ telque $sp = n$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alors il existe un $C := C(n, p, s)$ positif telque pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$, de plus on a l'injection continue :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$.

Theorem 4 * Si Ω est bornée alors on a une injection continue :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

pour tout $q \in [p, +\infty[$.

iii) Le cas de $sp > n$:

Ici $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'espace de Hölder de les fonctions continues muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Théorème 1.6 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ telque $sp > n$.Soit Ω un domaine de $C^{0,\alpha}$ de \mathbb{R}^n , alors il existe un $C := C(n, p, s, \Omega)$ positif telque pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

avec $\alpha := \frac{sp-n}{p}$, alors on a l'injection continue :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega) .$$

La propriété précédente de la régularité reste valide pour les fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ quand $sp > n$ et Ω est un extension de le domaine pour $W^{s,p}$ alors :

Théorème 1.7 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ telque $sp > n$.Soit Ω un domaine borné

de $C^{0,\alpha}$ de \mathbb{R}^n alors l'injection compacte est :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$$

pour tout $\beta < \alpha$ avec $\alpha = \frac{sp-n}{p}$.

Chapitre 2

L'opérateur Laplacien fractionnaire :

Dans ce chapitre on va définir L'opérateur Laplacien fractionnaire et leur propriété de façon plus détaillé et plus précisément leur formulation variationnelle pour nous aider de résoudre notre problème .

2.1 Définition de Laplacien fractionnaire :

Définition 5 Soit $s \in (0, 1)$, on définit l'opérateur de Laplacien fractionnaire par :

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s & : S \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ (-\Delta)^s u(x) & : = C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où $B(x, \epsilon)$ est la boule de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon ϵ , et $C(n, s)$ est la constante de la normalisation suivante :

$$C(n, s) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \right)^{-1}$$

avec $\zeta = (\zeta_1, \zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Généralement dans la définition de $(-\Delta)^s$, l'abréviation . V.P : c'est dans le sens de la valeur principale est adoptée , donc :

$$V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy,$$

alors , on peut écrire :

$$(-\Delta)^s u(x) := C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad , x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 6 Soit $s \in]0, 1[$, alors pour tout $u \in S$:

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \quad , x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve: On a

$$(-\Delta)^s u(x) := -C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) - u(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

on pose : $z = y - x$ alors , on a :

$$(-\Delta)^s u(x) := -C(n, s) V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

Cependant en mettant $z^* = -z$ on a

$$V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz = V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x - z^*) - u(x)}{|z^*|^{n+2s}} dz^*$$

donc après avoir changé z^* par z :

$$\begin{aligned} 2V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz &= V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz + V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z) - u(x)}{|z|^{n+2s}} dz \\ &= V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \end{aligned}$$

Enfin une expansion de Taylor du second ordre donne :

$$\frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \leq \frac{\|D^2u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|y|^{n+2s-2}}$$

et depuis $s \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi pour tout $u \in S$, on a :

$$P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy .$$

■

La proposition suivante donne la relation entre $(-\Delta)$ et $(-\Delta)^s$:

Proposition 7 $(-\Delta)^s \rightarrow (-\Delta)$ quand $s \rightarrow 1$ où la convergence est dans l'espace dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Proposition 8 Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$ alors :

$$(-\Delta)^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$$

est bien défini , et de plus :

i) $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, nous avons :

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy .$$

ii) $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}} \|v\|_{W_0^{s,p}}$$

et par suite $\|(-\Delta)^s u\|_{W_0^{-s,p^*}} \leq \|u\|_{W_0^{s,p}}$.

Preuve:

i) Comme $u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ alors l'intégrale dans la définition de $(-\Delta)^s$ existe donc :

$$(-\Delta)^s u = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy$$

alors $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, nous avons : (on utilise Fubini) :

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} v(x) dx dy .$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} v(x) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \\ &\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} v(y) dx dy \end{aligned}$$

dans le second intégrale nous changeons le rôle entre x et y alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} v(x) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \\ &\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} v(x) dx dy \end{aligned}$$

et par suite :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+2s}} v(x) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy .$$

Alors , nous avons :

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy .$$

ii) $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, nous avons par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^s u, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\leq \langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{(n+2s)(\frac{1}{2})} |x - y|^{(n+2s)(\frac{1}{2})}} dx dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u(x) - u(y))|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(v(x) - v(y))|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u\|_{W_0^{s,p}} \|v\|_{W_0^{s,p}} . \end{aligned}$$

■

Proposition 9 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$ et soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n :

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) , \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \}$$

alors

$$(-\Delta)^s : W_0^{s,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{s,p}(\Omega))^*$$

est strictement monotone , c'est-à-dire :

pour tout $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ avec $u \neq v$:

$$\langle (-\Delta)^s u - (-\Delta)^s v, u - v \rangle > 0 .$$

Preuve: D'abord nous avons , $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^s u - (-\Delta)^s v, u - v \rangle &= \langle (-\Delta)^s u, u - v \rangle - \langle (-\Delta)^s v, u - v \rangle \\ &= \langle (-\Delta)^s u, u \rangle - \langle (-\Delta)^s u, v \rangle + \langle (-\Delta)^s v, v \rangle - \langle (-\Delta)^s v, u \rangle \\ &\geq \|u\|_{W_0^{s,p}}^2 + \|v\|_{W_0^{s,p}}^2 - \|u\|_{W_0^{s,p}} \|v\|_{W_0^{s,p}} - \|u\|_{W_0^{s,p}} \|v\|_{W_0^{s,p}} \\ &= \left(\|u\|_{W_0^{s,p}} - \|v\|_{W_0^{s,p}} \right) \left(\|u\|_{W_0^{s,p}} + \|v\|_{W_0^{s,p}} \right) . \end{aligned}$$

Soit $u \neq v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ montrons que :

$$\langle (-\Delta)^s u - (-\Delta)^s v, u - v \rangle > 0$$

nous avons

$$\langle (-\Delta)^s u - (-\Delta)^s v, u - v \rangle \geq \left(\|u\|_{W_0^{s,p}} - \|v\|_{W_0^{s,p}} \right) \left(\|u\|_{W_0^{s,p}} + \|v\|_{W_0^{s,p}} \right)$$

supposons que $\langle (-\Delta)^s u - (-\Delta)^s v, u - v \rangle = 0$ et par suite $\|u\|_{W_0^{s,p}} = \|v\|_{W_0^{s,p}}$ et de plus puisque

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle \leq \|u\|_{W_0^{s,p}} \|v\|_{W_0^{s,p}}$$

alors

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^s u, v \rangle &= \|u\|_{W_0^{s,p}} \|v\|_{W_0^{s,p}} \\ \text{et } \langle (-\Delta)^s v, u \rangle &= \|v\|_{W_0^{s,p}} \|u\|_{W_0^{s,p}} . \end{aligned}$$

Cela implique $u = v$ ce qui contradiction avec $u \neq v$. ■

Proposition 10 Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$, alors :

$$(-\Delta)^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$$

est continue i.e :

$$(-\Delta)^s \in C(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*) .$$

Preuve: Soit $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ montrons que $(-\Delta)^s u_n \rightarrow (-\Delta)^s u$ dans $(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n))^*$:

En effet nous avons d'après la proposition précédent :

$$\|(-\Delta)^s u_n - (-\Delta)^s u\|_{W_0^{-s,p^*}} \leq \|u_n - u\|_{W_0^{s,p}}$$

alors il suffit de montrer que : $\|u_n - u\|_{W_0^{s,p}} \rightarrow 0$, nous avons $u_n \rightarrow u$ dans $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ alors $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc pour une sous suite on a : $\exists g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telleque :

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ p.p et } |u_n| \leq g(x)$$

et d'après le théorème de convergence dominée nous obtient le résultat souhaité. ■

2.2 Les propriétés de Laplacien fractionnaire :

Dans cette section on va voir quelques propriétés de Laplacien fractionnaire .

2.2.1 La linéarité de Laplacien fractionnaire :

proposition 2.1 *L'opérateur Laplacien fractionnaire est linéaire .*

Preuve: $\forall u, v \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(-\Delta)^s (\alpha u(x) + v(x)) \stackrel{?}{=} \alpha (-\Delta)^s u(x) + (-\Delta)^s v(x)$$

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s (\alpha u(x) + v(x)) & : = C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{(\alpha u(x) + v(x)) - (\alpha u(y) + v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy & , x \in \mathbb{R}^n \\ & : = C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{(\alpha u(x) - \alpha u(y)) + (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy & , x \in \mathbb{R}^n \\ & : = C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{\alpha u(x) - \alpha u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy + C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ & : = \alpha C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy + C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ & : = \alpha (-\Delta)^s u(x) + (-\Delta)^s v(x) . \end{aligned}$$

donc il est linéaire . ■

2.2.2 La continuité de Laplacien fractionnaire :

proposition 2.2 *L'opérateur Laplacien fractionnaire est continue .*

Preuve: $(-\Delta)^s$ est continue equivaut : $\exists \alpha$ tel que $\|(-\Delta)^s u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \|u\|_S$ donc

:

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^s u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\| C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(n, s) \left\| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \left\| \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

car nous sommes dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et on utilise la linéarité donc :

$$\leq C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{\|u(x - y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|x - y\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} dy$$

on pose $X = x - y \implies dX = -dy$ alors

$$\begin{aligned} &\leq -C(n, s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \epsilon)} \frac{\|u(X)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|X\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} dX \\ &\leq -C(n, s) \|u\|_S \\ &\leq \alpha \|u\|_S . \end{aligned}$$

donc il est continue . ■

Chapitre 3

Problème de Valeur(s) Propre(s) pour un Opérateur d'Ordre deux de Type Fractionnaire :

3.1 Introduction et Motivation :

Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale à des équations aux dérivées partielles elliptiques , c'est-à-dire à l'étude des valeurs propres et des fonctions propres de ces équations . La motivation de cette étude nous permet d'étudier des solutions particuliers .

Donnons un exemple de problème au valeur propre pour le Laplacien fractionnaire avec les conditions de Dirichlet. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on cherche les couples $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W^{s,p}(\Omega)$ avec $u \neq 0$ solution de :

$$(P)^s \begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

le réel λ est appelé valeur propre , et la fonction u est appelé fonction propre. L'ensemble des valeurs propres est appelé le spectre de le problème .On peut faire l'analogie entre

$(P)^s$ et le problème le plus simple de Laplacien classique (P) avec les conditions de Dirichlet :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 3.1 On dit que u est une solution faible de $(P)^s$ si $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que :

$$(P)^s : \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx dy, \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Définition 3.2 Soit $s \in (0, 1)$, on dit que λ est une valeur propre de l'opérateur Laplacien fractionnaire, s'il existe une solution faible $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $u \neq 0$ du problème (P_s) . La solution faible u s'appelle fonction propre associé à λ .

Remarque 3.1 Remarquons que si on remplace φ par $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ dans (P_s) on obtient λ comme le quotient suivant :

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx},$$

ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh.

3.2 Existence de la Première Valeur Propre:

Définition 3.3 La première valeur propre de l'opérateur Laplacien fractionnaire notée par λ_1 est définie par:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant .

Théorème 3.1 Soient $s \in (0, 1)$ et Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors le problème admet une fonction propre associée à la première valeur propre $\lambda_1 > 0$ qui est caractérisée comme suit :

$$(P_s) : \lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}.$$

Pour montrer ce théorème on utilise la méthode de minimisation d'une fonctionnelle . On définit la fonctionnelle suivante :

$$J : W_0^{s,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow J(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx}$$

d'où λ_1 représente le minimum de J .

Preuve: D'abord on montre que :

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

on a :

$$(1) : \lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2$$

car

$$\left\{ u \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\} \subset \{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}\}.$$

Pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on pose :

$$v = \frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \in W_0^{s,p}(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)}=1$$

alors

$$u(x) - u(y) = \|u\|_{L^2(\Omega)} (v(x) - v(y))$$

donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 (v(x)-v(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x) - v(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

D'où

$$\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \|v\|_{L^2(\Omega)}^p \geq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2$$

ce qui implique

$$(2) \quad \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \geq \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2$$

de (1) et (2) on obtient :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \inf_{\substack{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}=1}} \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2.$$

Pour montrer le théorème on utilise la méthode direct de minimisation: pour $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

par conséquent

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{C} > 0$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante telle que :

$$\forall n > 0, \exists u_n : \lambda_1 \leq \frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} < \lambda_1 + \frac{1}{n},$$

alors :

$$\frac{\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \rightarrow \lambda_1.$$

C'est-à-dire:

$$\|u_n(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \text{ et } \|u_n\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda_1.$$

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{s,p}(\Omega)$, donc il existe une sous suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{s,p}(\Omega).$$

Par le lemme 1.3, on obtient:

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \lambda_1.$$

Alors $\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \lambda_1$ d'où :

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \inf_{v \in W_0^{s,p}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2.$$

Donc u est un point minimum.

Posons :

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \quad \text{et} \quad B(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

et on définissons le quotient :

$$J : W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \rightarrow J(u) := \frac{A(u)}{B(u)}.$$

Alors :

$$\lambda_1 = \inf_{\{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)}=1\}} J(u).$$

Ainsi $\exists u \in W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ et $J(u) = \lambda_1$, et on a la fonction J est différentiable d'après le théorème 25, et on a :

$$\langle dJ(u), v \rangle = \frac{2}{B(u)} \left(\langle dA(u), v \rangle - \frac{A(u)}{B(u)} \langle dB(u), v \rangle \right).$$

Comme u est un point minimum de J donc $dJ(u) = 0$, et par conséquent :

$$\langle dA(u), v \rangle = \frac{A(u)}{B(u)} \langle dB(u), v \rangle = \lambda_1 \langle dB(u), v \rangle.$$

Alors u est une solution faible de $(P)^s$. ■

Théorème 3.2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$, alors la fonction $J : W_0^{s,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Preuve: On a $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, alors nous avons: $u \in L^2(\Omega)$ donc $\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} < +\infty$ et $\|u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$.

Alors $J(u)$ est bien définie.

On montre que $J : W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en u c'est-à-dire :

$$J(u+v) = J(u) + L(u).v + \sigma(v), \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega),$$

avec $L : W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire continue.

En effet, $\forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ on pose:

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \text{ et}$$

$$B(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

(i). Pour $A(u)$: on montre que $A : W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en u c'est-à-dire :

$$A(u+v) = A(u) + L(u) \cdot v + \sigma(v), \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Donc :

$$\begin{aligned} A(u+v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u+v)(x) - (u+v)(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{((u(x) - u(y)) + (v(x) - v(y)))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2 + 2(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) + (v(x) - v(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x) - v(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \\ &= A(u) + L(u) \cdot v + \|v\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \\ &= A(u) + L(u) \cdot v + \sigma(v). \end{aligned}$$

Donc $A(u)$ est différentiable et $L(u)$ s'appelle le différentielle de $A(u)$ que se note $dA(u)$:

$$\langle dA(u), v \rangle = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx dy.$$

(ii). Pour $B(u)$: on montre que $B : W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en u c'est-à-dire :

$$B(u+v) = B(u) + L(u) \cdot v + \sigma(v), \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Donc :

$$B(u+v) = \int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx + \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \\
&= B(u) + 2 \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= B(u) + L(u) \cdot v + \sigma(v).
\end{aligned}$$

Où

$$\langle dB(u), v \rangle = 2 \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\sigma(v) = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{car} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}.$$

Donc $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \|v\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2$.

Alors $B(u)$ est différentiable.

(iii). Pour $J(u)$: maintenant, on montre que $J : W_0^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en u c'est-à-dire :

$$J(u+v) = J(u) + L(u) \cdot v + \sigma(v), \quad \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

On a :

$$J(u) = \frac{A(u)}{B(u)}$$

d'autre part on a :

$$B(u) = B(u) \left(1 + \frac{2}{B(u)} \langle u, v \rangle + \sigma(v) \right)$$

on pose :

$$X = \frac{2}{B(u)} \langle u, v \rangle + \sigma(v).$$

Donc :

$$B(u) = B(u) (1 + X)$$

avec $X \rightarrow 0$ quand $v \rightarrow 0$, donc $\sigma(X) = \sigma(v)$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(u+v)} &= \frac{1}{B(u)(1+X)} = \frac{1}{B(u)} (1 - X + \sigma(X)) \\ &= \frac{1}{B(u)} - \frac{2}{B(u)^2} \langle u, v \rangle + \sigma(v) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \left(A(u) + 2 \langle u, v \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} + \sigma(v) \right) \left(\frac{1}{B(u)} - \frac{2}{B(u)^2} \langle u, v \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} + \sigma(v) \right) \\ &= \frac{A(u)}{B(u)} + \frac{2}{B(u)} \langle u, v \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} - \frac{2A(u)}{B(u)^2} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sigma(v) \\ &= J(u) + \frac{2}{B(u)} \langle u, v \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} - \frac{2A(u)}{B(u)^2} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sigma(v) \\ J(u+v) &= J(u) + L(u) \cdot v + \sigma(v) . \end{aligned}$$

Donc $J(u)$ est différentiable en u et

$$\langle dJ(u), v \rangle = \frac{2}{B(u)} \left(\langle u, v \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} - \frac{A(u)}{B(u)} \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right)$$

qu'est la différentielle de $J(u)$. ■

Remarque 3.2 *Tout point critique de J est une solution faible de $(P)^s$ i.e : tout point critique u de J nous avons $\langle dJ(u), v \rangle = 0, \forall v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et par suite:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda \int_{\Omega} u(x) v(x) dx dy.$$

3.3 Propriété de la Première Fonction Propre :

3.3.1 Positivité de la Première Fonction Propre :

proposition 3.1 *Soient $s \in (0,1)$ et $n > 2s$, alors il existe une fonction non négative $e_1 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ qu'est une fonction propre associé à λ_1 est le minimum dans $(P)^s$. C'est-*

à-dire $\|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy .$$

Preuve: Il suffit de montrer que e_1 est de signe constante .

D'abord , on montre que si e est une fonction propre associé à λ_1 alors e et $|e|$ est le minimum dans $(P)^s$. C'est-à-dire $e \geq 0$ ou $e \leq 0$.

D'après les formules $(P)^s$ et la formule précédente on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_1(x) - e_1(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

et d'après l'inégalité triangulaire , $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$||e(x)| - |e(y)|| \leq |e(x) - e(y)|$$

mais si $x \in \{e > 0\}$ et $y \in \{e < 0\}$ on a :

$$\begin{aligned} ||e(x)| - |e(y)|| &= |e(x) + e(y)| = \max \{e(x) + e(y), -e(x) - e(y)\} \\ &< e(x) - e(y) = |e(x) - e(y)| . \end{aligned}$$

Alors nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|e(x)| - |e(y)|)^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|e(x)| - |e(y)|)^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

Si $|\{e > 0\}| \neq 0$ et $|\{e < 0\}| \neq 0$. Comme e est le minimum alors:

$$\lambda_1 = \|e\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} \leq |||e|||_{W_0^{s,p}(\Omega)}$$

ce qui implique

$$\|e\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \|e\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \|e_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}$$

Si $|\{e > 0\}| = 0$ et $|\{e < 0\}| = 0$.

Alors e_1 est de signe constante . ■

3.3.2 Simplicité :

Nous montrons dans cette sous section que la fonction propre associée à la première valeur propre est unique à une constante multiplicative près .

Theorem 11 *La première valeur propre λ_1 est simple , c'est-à-dire si $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution faible de (P) alors $u = Ce_1$, avec $C \in \mathbb{R}$.*

Preuve: On suppose que $f_1 \geq 0$ ou $f_1 \leq 0$, considérons le cas de $f_1 \geq 0$.

Posons

$$\psi = \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2(\Omega)}} \text{ et } g_1 = e_1 - \psi.$$

Montrons que $g_1 = 0$. Par l'absurde, on supposant que $g_1 \neq 0$.

On a

$$g_1 = e_1 - \psi$$

, alors g_1 est une fonction propre associée à λ_1 alors nous avons $g_1 \geq 0$ ou $g_1 \leq 0$, ce que implique $e_1 \geq \psi$ ou $e_1 \leq \psi$ et on suppose que e_1 non négative donc :

$$e_1^2 \geq \psi^2 \text{ ou } e_1^2 \leq \psi^2.$$

D'autre part on a :

$$\int_{\Omega} (e_1^2(x) - \psi^2(x)) dx = \|e_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 - 1 = 0$$

alors

$$e_1^2(x) - \psi^2(x) = 0.$$

donc

$$e_1(x) = \psi(x)$$

d'où

$$g_1 = 0.$$

Donc on obtient f_1 est proportionnelle à e_1 . ■

3.4 Existence d'une Suite de Valeurs Propres :

Dans cette section nous montrons qu'ils existe une suite de valeurs propres positive qui tend vers l'infini pour l'opérateur Laplacien fractionnaire .

Lemme 1 (Orthogonalité) Soient λ et ϵ deux valeurs différents de problème $(P)^s$ avec des fonctions propres e et $e_1 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ respectivement , alors :

$$\langle e, e_1 \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e(x) e_1(x) dx .$$

Preuve: Pour $e \neq 0$ et $e_1 \neq 0$, posons

$$f = \frac{e_1}{\|e\|_{L^2(\Omega)}}$$

qui sont des fonctions propres aussi , dans $(P)^s$, on remplace u par f et on remplace v par ϕ , on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \epsilon \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

alors

$$(\lambda - \epsilon) \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx = 0$$

avec $\lambda \neq \epsilon$ donc :

$$\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx = 0$$

d'où

$$\langle f, \phi \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))(\phi(x) - \phi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0.$$

■

Théorème 3.3 *L'ensemble des valeurs propres du problème $(P)^s$ consiste en une suite*

$\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *avec :*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$$

et

$$\lambda_k \rightarrow +\infty \text{ quand } k \rightarrow +\infty$$

de plus , pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres sont caractérisées comme suit :

$$(P_\lambda) : \lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in p_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

où :

$$p_{k+1} = \left\{ u \in W_0^{s,p}(\Omega) \quad tq \quad \langle u, e_j \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \right\} .$$

Preuve: On définit λ_{k+1} comme dans (P_λ) existe, de plus $p_{k+1} \subseteq p_k \subseteq W_0^{s,p}(\Omega)$ on a :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$$

On montre que $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

On pose $e_1 \in p_2$ aussi une fonction propre associée à λ_1 donc d'après le théorème de simplicité $e_2 = Ce_1$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $e_2 \neq 0$ puisque $e_1 \in p_2$ alors :

$$0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = C \|e_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2,$$

ce que implique $e_1 \equiv 0$, c'est une contradiction donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Pour tout $\varphi \in p_{k+1}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx$$

Alors on montre que e_{k+1} est une fonction propre associée à λ_{k+1} pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$. C'est-à-dire on montre que la formulation faible est valable pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ non seulement dans p_{k+1} .

On utilise la récurrence : supposant qu'il est vrai pour $1, \dots, k$ et on montre pour $k+1$, alors on utilise la décomposition en somme directe.

$$W_0^{s,p} = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\} \oplus (\text{span} \{e_1, \dots, e_k\})^\perp = \text{span} \{e_1, \dots, e_k\} \oplus p_{k+1}$$

donc pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ nous écrivons $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_2 \in p_{k+1}$ et

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^k c_i e_i$$

pour $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, alors la formulation faible avec φ une fonction test, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)) (\varphi_1(x) - \varphi_1(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi_1(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^k c_i \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)) (e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx \right]
\end{aligned}$$

d'autre part, pour $i = 1, \dots, k$ nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)) (e_i(x) - e_i(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_i \int_{\Omega} e_{k+1}(x) e_i(x) dx$$

d'après le lemme on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = 0 = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Alors e_{k+1} est une fonction propre associée à λ_{k+1} .

Pour $h, k \in \mathbb{N}$, $k \neq h$, alors :

$$\langle e_k, e_h \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx.$$

Soit $k > h$ donc $k - 1 > h$, alors :

$$e_k \in p_k = (\text{span} \{e_1, \dots, e_{k-1}\})^\perp \subseteq (\text{span} \{e_k\})^\perp$$

cela implique

$$\langle e_k, e_h \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0$$

mais e_k est une fonction propre donc en utilisant l'équation $(P)^s$ pour e_k avec fonction test $\varphi = e_k$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_k(x) - e_k(y))(e_h(x) - e_h(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda_k \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx$$

d'où

$$\langle e_k, e_h \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x) e_h(x) dx .$$

On montre que :

$$\lambda_{k+1} \rightarrow +\infty \text{ quand } k \rightarrow +\infty .$$

on suppose que $\lambda_k \rightarrow c$, telle que $c \in \mathbb{R}$, alors λ_k est borné dans \mathbb{R} , puisque $\|e_k\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \lambda_k$, alors d'après le théorème d'injection compact il existe une sous suite e_{k_j} tq:

$$e_{k_j} \rightarrow e$$

dans $L^2(\Omega)$ comme $k_j \rightarrow +\infty$ et $e \in L^2(\Omega)$, en particulier :

$$e_{k_j} \text{ est une suite de cauchy dans } L^2(\Omega) .$$

D'autre part on a e_{k_j} et e_{k_i} sont orthogonal dans $L^2(\Omega)$ alors :

$$\|e_{k_j} - e_{k_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|e_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|e_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_{k_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 .$$

C'est une contradiction .

Maintenant , nous montrons que la suite des valeurs propres constructeur en (P_λ) c-à-d toute valeur propre du problème $(P)^s$ écrite sous la forme (P_λ) .

On montre par l'absurde , supposons qu'il existe une valeur propre λ telle que :

$$\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} .$$

Soit $e \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une fonction propre associé à λ , alors $\|e\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Donc on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e(x) - e(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \lambda .$$

Comme λ_1 est le minimum , on a :

$$\lambda = \|e\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \geq \|e_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \lambda_1 .$$

On a $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\lambda_k \rightarrow +\infty$ implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$$

alors

$$e \notin p_{k+1} .$$

Si $e \in p_{k+1}$, on déduire que

$$\lambda = \|e\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \geq \lambda_{k+1} .$$

Alors contradiction , donc $e \notin p_{k+1}$, ce que implique qu'il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ telle que $\langle e, e_i \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} \neq 0$, c'est une contradiction , et donc la preuve de $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est faux , alors tout les valeurs propres appartiennent à la suite $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. ■

Lemme 3.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $e_{k+1} \in p_{k+1}$, qui est une fonction

propre associé à λ_{k+1} , réalisé le minimum en (P_λ) , c'est-à-dire $\|e_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et

$$\lambda_{k+1} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy .$$

Théorème 3.4 La suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonction propre correspondant à (λ_k) est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ et une base orthogonale de $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Preuve: D'abord on montre que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $W_0^{s,p}(\Omega)$, on montre que

$$\text{si } v \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ telle que } \langle v, e_k \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

alors on peut supposer $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et on a $\lambda_{k+1} \rightarrow +\infty$ si $k \rightarrow +\infty$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que:

$$\|v\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 < \lambda_{k+1} = \min_{\substack{u \in p_{k+1} \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

donc $v \notin p_{k+1}$ et il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $\langle v, e_j \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} \neq 0$ ce qui est contradiction, alors $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $W_0^{s,p}(\Omega)$. ■

Theorem 12 Chaque valeur propre λ_k a une multiplicité finie, plus précisément, si λ_k est telle que

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$$

pour $h \in \mathbb{N}_0$, alors l'ensemble de toutes les fonctions propres correspondant à λ_k correspond à

$$\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} .$$

Preuve: Soit $h \in \mathbb{N}_0$ telle que $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$ est vrai.

On a : chaque élément de $\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}$ est une fonction propre de problème $(P)^s$ correspondant à $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+h}$ donc:

Montrons que tout fonction propre $\psi \neq 0$ correspondant à λ_k appartient à $\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\}$

: on écrit

$$W_0^{s,p} = \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} \oplus (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp$$

et donc $\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec

$$\psi_1 \in \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} \quad \text{et} \quad \psi_2 \in (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp$$

en particulier

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 .$$

Puisque ψ est une fonction propre correspondant à λ_k , alors ψ vérifie la formulation faible et on pose la fonction teste ψ , on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi(x) - \psi(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \|\psi\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

donc

$$(P_{\lambda_1}) \quad \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2$$

de plus, on a e_k, \dots, e_{k+h} sont des fonctions propres correspondant à $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+h}$, et donc

ψ_1 est une fonction propre correspondant à λ_k .

Alors ψ_1 vérifie la formulation faible et on pose la fonction teste ψ_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(x) \psi_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi_1(x) - \psi_1(y))(\psi_2(x) - \psi_2(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(x) \psi_2(x) = 0$$

donc

$$(P_{\lambda_2}) : \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1 + \psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2$$

on écrit

$$\psi_1 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i e_i$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$, d'après l'orthogonalité de $W_0^{s,p}(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, on obtient

$$(P_{\lambda_3}) \quad \|\psi_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \|e_i\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \lambda_i = \lambda_k \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 = \lambda_k \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

On a ψ est une fonction propre correspondant à λ_k , et ψ_1 est aussi une fonction propre correspondant à λ_k .

Alors on déduit que ψ_2 est aussi une fonction propre correspondant à λ_k , alors d'après le lemme on obtient :

$$\langle \psi_2, e_1 \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \dots = \langle \psi_2, e_{k-1} \rangle_{W_0^{s,p}(\Omega)} = 0.$$

Donc

$$\psi_2 \in (\text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\})^\perp = p_{k+h+1}.$$

On montre que

$$\psi_2 \equiv 0.$$

On suppose que $\psi_2 \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}
 \lambda_k &< \lambda_{k+h+1} = \min_{u \in P_{k+h+1}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx} \\
 (P_{\lambda_4}) \quad &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\psi_2(x)-\psi_2(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy}{\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_2(x)|^2 dx} \\
 &= \frac{\|\psi_2\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2}{\|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2} .
 \end{aligned}$$

Alors d'après $(P_{\lambda_1}), (P_{\lambda_2}), (P_{\lambda_3}), (P_{\lambda_4})$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\psi_1\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}^2 \\
 &> \lambda_k \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= \lambda_k \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 .
 \end{aligned}$$

c'est une contradiction , alors $\psi_2 \equiv 0$ d'où :

$$\psi = \psi_1 \in \text{span} \{e_k, \dots, e_{k+h}\} .$$

■

Conclusion

Les EDPs de type fractionnaire est un sujet très riche dans ces derniers années à cause que possèdent plusieurs applications en physique et en chimie Dans ce thèse on a essayé de comprendre quelque chose relié avec le Laplacien fractionnaire et on a démontré que :

Existence de la première valeur propre.

Propriété de la première fonction propre .

Positivité de la première fonction propre.

Simplicité .

Existence d'une suite de valeurs propres .

En fin , je souhaite pour les étudiants de futur de continuer ce modeste travail dans le cas général . Si quelqu'un veux d'aider je suis là et ainsi nous pouvons travailler ensemble pour faire une chose très précisée et prudent .

Mon adresse email est : abdellahbelam12@gmail.com .

Bibliographie

- [1] ESPACES FONCTIONNELS : Utilisation Dans la Résolution des Equatins Aux Dérivées Partielles . FRANCOISE et GILBERT DEMNGEL .
- [2] Introduction à la théorie des points critiques et application aux problème elliptiques . Otared KAVIAN .
- [3] Théorie des opérateurs linéaire 1 par : Mourad OUDGHIRI Juin 2012 , unv Mohammed Premier , Oujda .
- [4] ANALYSE FONCTIONNELLE : théorie et application 2^{eme} tirage . Haim BREZIS .
- [5] A new Approach for solving Fractional Partial Differential Equactions . (Hindawi Publishing corporation , Journal of Applied Mathemathiques volume 2013 . article ID 2568235).
- [6] Introduction aux Equatins Aux Dérivées Partielles .B-Helffer à partir du texte établir par Thierry Ramond , unv paris-sud , version de janvie mai 2007.

المخلص :

قمنا في هذه المذكرة أولا بتعريف فضاء صوبوليف في الصنف الكسري في الحالتين لما $0 < s < 1$ والحالة الثانية $1 < s < +\infty$ ثم قمنا بذكر خصائصه و خصائص التباين في فضاء صوبوليف .

ثم عرفنا مؤثر لابلاسيان في الحالة الكسرية و ذكرنا بعضا من خصائصه . كل هذا كان تمهيدا لدراسة المشكل القيم والدوال الذاتية مع مؤثر لابلاسيان الكسري أي بصيغة أدق :

$$(P)^s \begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

حيث Ω هو فتح محدود لـ \mathbb{R}^n و $1 < p < +\infty$. أظهرنا وجود القيم الذاتية الأولى و بينا أنها موجبة عادية أظهرنا أن λ_1 هي القيمة الذاتية الوحيدة و المرتبطة بدالة ذاتية موجبة تماما .

الكلمات المفتاحية : فضاء صوبوليف في الصنف الكسري ، و خصائص التباين في فضاء صوبوليف

مؤثر لابلاسيان في الحالة الكسرية ، القيمة الذاتية ، الدالة الذاتية

Résumer :

Dans cette étude nous définissons d'abord l'espace de Sobolev de type fractionnaire dans les deux cas de $0 < s < 1$ et le second cas $1 < s < +\infty$, puis nous mentionnons ses propriétés et les propriétés de l' injection dans l'espace de Sobolev de type fractionnaire .

Ensuite, nous avons défini l' opérateur Laplacien de type fractionnaire et mentionné certaines de ses propriétés. Tout cela était un prélude à l'étude du problème des valeurs et des fonctions propres avec l' opérateur laplacien fractionnaire, c'est-à-dire sous une forme plus précise :

$$(P)^s \begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $1 < p < +\infty$. Nous avons montré l'existence des premières valeurs propres et montré qu'elles sont normales positives. Nous avons montré que est la seule valeur propre associée à une valeur propre complètement positive.

Les mots clés : l'espace de Sobolev de type fractionnaire , les propriétés de l' injection , l'opérateur Laplacien de type fractionnaire , valeur propre , fonction propre .

Abstract :

In this study we first define the Sobolev space of fractional type in the two cases of $0 < s < 1$ and the second case $1 < s < +\infty$, then we mention its properties and the properties of the injection in fractional-type Sobolev space.

Next, we defined the Laplacian fractional operator and mentioned some of its properties. All this was a prelude to the study of the problem of eigenvalues and functions with the fractional Laplacian operator, that is to say in a more precise form:

$$(P)^s \begin{cases} -\Delta^s u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded open of \mathbb{R}^n and $1 < p < +\infty$. We have shown the existence of the first eigenvalues and shown that they are positive norms. We have shown that is the only eigenvalue associated with a completely positive eigenvalue.

Keywords : the fractional-type Sobolev space, the properties of the injection, the fractional-type Laplacian operator, eigenvalue, eigenfunction.