



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

Ministère de L'Enseignement Supérieur Et de La Recherche
Scientifique



Centre universitaire Salhi Ahmed -Naàma-
Institut des Sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour obtenir le diplôme de
Master En Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDPs

Filière : Mathématiques

Thème

Etude de quelques propriétés du Produit des
Variétés Riemanniennes

Présenté par :
MARWA BENGANA

Soutenu le : 07Juillet 2019

Devant le jury composé :

Encadreur : Mr. latti Fethi	MAA.	C-Univ Salhi Ahmed -Naàma-
Président : Mr. Abdelmalek Mehammed	MCB.	ESMT Tlemcen
Examineur : Mr. Tahri Kamel	MCB.	ESMT Tlemcen

Année universitaire : 2018/2019

REMERCIEMENT

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant
ALLAH qui nous a réussi a achever ce travail.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements à **mes parents** qui ont fait
de leur mieux pour m'aider.

Mon grand respect et ma honnête considération s'adressent à mon
encadreur **Mr.Latti fethi** pour m'avoir proposé un sujet fort intéressant
et pour m'avoir guidée et encouragée.

Et puis, je tiens à remercier aux membres du jury **Mr.Abdelmalek
Mehammed** et **Mr.Tahri Kamel** d'avoir accepté de juger ce mémoire.
je remercie aussi mes enseignantes et mes collègues et mes amis.

DEDICACE

A mon chère père ABDELKADER et ma chère mère

A mes frères et ma soeur

A toutes ma famille

A tous mes amis

A mes collègues de la faculté

Et à tous ceux qui m'ont porté leur soutien moral

Je dédie ce modeste travail.

Table des matières

Table des figures	5
Introduction	6
1 Généralités	8
1.1 Applications différentiables	8
1.2 homéomorphismes et difféomorphismes	10
1.3 Théorème d'inversion locale	10
1.4 Théorème des fonctions implicites	12
1.5 Théorème du rang	13
1.5.1 Théorème de Caractérisation d'une Submersion.	14
1.5.2 Théorème de Caractérisation d'une Immersion	15
1.5.3 Théorème du rang constant	15
1.6 Plongement	16
1.7 Sous-variétés de \mathbb{R}^n	17
1.7.1 Caractérisations des sous-variétés :redressement, submersions, graphes, paramétrages	19
1.8 Espace tangent et fibré tangent	22
2 Variétés différentiables	24
2.1 Notion de variété	24
2.1.1 Variétés Différentiable	24
2.2 Variétés différentiables	26
2.2.1 Exemples	27
2.2.2 Construction de variétés	28
2.2.3 Applications différentiables	31
2.3 Espace Tangent à une Variété.	31
2.3.1 Espaces Tangent	32
2.3.2 Espaces Cotangent à une Variété.	35
2.4 Fibré tangent	35

2.4.1	Applications tangente et cotangente	35
2.5	Champs de Vecteurs et Formes Différentielles	36
2.5.1	Champ de vecteurs	36
2.5.2	Dérivations et champs de vecteurs	36
2.5.3	Formes différentielles	37
2.5.4	Fibré des formes différentielles	38
2.5.5	Crochet de Lie	38
2.6	Fibré cotangent	39
2.6.1	Formes Différentielles	39
3	Variété Riemmanienne	41
3.1	Rappel sur les tenseurs	41
3.2	Tenseurs sur une variété	42
3.3	Connexions linéaires	43
3.3.1	Dérivée covariante de fonction	43
3.3.2	Connexions linéaires	44
3.3.3	Torsion et courbure	45
3.3.4	Le tenseur de Courbure	46
3.4	Métriques Riemanniennes	46
3.5	Connexion de Levi-Civita	48
3.5.1	Tenseur de courbure Riemannienne	50
3.5.2	Courbure de Ricci	50
4	Variété Riemannienne produit	52
4.1	Variété Riemannienne produit	52
4.2	Connexion linéaire produit	54
4.3	Tenseur de torsion produit	54
4.4	Tenseur de courbure	55
4.5	Métrique diagonale sur la variété produit	55
4.6	la connexion de levi-civita	56
4.7	Tenseur de courbure Riemannienne	56
4.8	Tenseur de Ricci sur la variété produit	57
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	58

Table des figures

1.1	Difféomorphisme local entre deux ouverts de l'espace euclidien.	11
1.2	Théorème des fonctions implicites pour $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$	13
1.3	plongement régulier	17
1.4	sous-variété	19
1.5	sous-variété défini par redressement	20
1.6	sous variété par graphe	20
1.7	sous variété définie par fonction implicite	21
1.8	sous variété définie par paramétrage	21
1.9	vecteur tangent sous variété	22
2.1	Le couple (U, ϕ) constitue une carte de la variété M	25
2.2	application de transition de carte	25
2.3	Projection stéréographique	30
2.4	L'application F est différentiable si $\chi \circ F \circ \phi^{-1}$ est différentiable	31
2.5	espace tangent	32

Introduction

La géométrie différentielle est le carrefour de toutes les mathématiques et dont le point de départ est l'étude de Calcul différentiel et sous-variétés ,

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur \mathbb{R}^n . Pour cela, on va introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à \mathbb{R}^n , afin d'y transférer ce qu'on sait déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas typologiquement identiques à \mathbb{R}^n . De tels objets sont familiers dans \mathbb{R}^3 : une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe..., ressemblent localement à \mathbb{R}^2 .

Ce qu'on va définir ne peut a priori pas être vu comme sous-ensemble d'un \mathbb{R}^n . On donne une définition intrinsèque, qu'on appelle variétés, sans faire référence à un espace plus grand. On peut voir une variété différentiable M de dimension n comme une réunion (finie ou dénombrable) d'ouverts U de \mathbb{R}^n dont chaque ouvert est muni d'un système de coordonnées locales $(x_i)_{i=1\dots n}$:

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux propriétés d'une variété différentiable définie par le produit de deux variétés différentiables tel que le tenseurs de courbure, la courbure de Ricci ,....

Notre travail s'articule autour de quatre points essentiels :

- **Le chapitre 1** : sera réservé aux notions générales et préliminaires de calcul différentiel (Application différentiel, Théorème d'inversion locale, Théorème des fonctions implicites, Théorème de rang constant et plongement) et Sous-variétés .

- **Dans le chapitre 2** : on étudie Les variétés différentiables , Champ de vecteurs, Formes différentielles et Crochet de Lie.

- **dans le chapitre 3** : on donnera quelques notions et résultats de la géométrie Riemannienne : connexion linéaire, le tenseur de torsion , le tenseur de courbure, métrique Riemannienne , connexion de Levi-Civita , tenseur de courbure Riemannienne et courbure

de Ricci.

• **Dans Le chapitre 4 :** on s'intéresse aux tenseurs de courbure Riemannienne et de Ricci d'une variété Riemannienne produit. Nous montrons d'une façon générale que chacun de ces tenseurs est une somme des tenseurs de chaque variété de la base.

Chapitre 1

Généralités

Ce chapitre est élémentaire, au sens où la plus part des concepts étudiés sont des outils nécessaires pour le reste de ce mémoire. On va rappeler quelques définitions fondamentales sur le calcul différentiel et les sous variétés.

Références : ([1],[2],[3],[4],[5],[6],[12]).

1.1 Applications différentiables

Définition 1.1.1. Une application $f : U \rightarrow F$ est différentiable en $x_0 \in U$ si et seulement si il existe une application linéaire et continue $L : E \rightarrow F$ telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \quad (*)$$

Remarque 1.1.1.

1. L'égalité (*) est équivalente à l'égalité :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

où ε est une fonction définie au voisinage de $\mathbf{0}$ (sauf éventuellement en $\mathbf{0}$) et vérifiant : $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \mathbf{0}$

Dans la pratique, on calcule souvent la différentielle d'une application en montrant qu'une telle développement existe.

2. L'application linéaire L est unique (quand elle existe),

Définition 1.1.2. Si f est différentiable en x_0 , l'application linéaire L est appelée la différentielle de f en x_0 , on la note $d_{x_0}f$.

La continuité de L dans la définition de la différentiabilité d'une application est une hypothèse nécessaire et suffisante pour avoir la propriété naturelle suivante.

proposition 1.1.1. Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Définition 1.1.3. $f : U \rightarrow F$ est dite différentiable sur U si et seulement si f est différentiable en tout point de U .

On appelle alors application différentielle de f la fonction $Df : U \rightarrow \mathcal{L}^c(E; F)$ définie par $Df(x_0) = d_{x_0}f$.

f est dite C^1 sur U si et seulement si f est différentiable sur U et Df est continue sur U .

Exemple 1.1.1.

1. Si $E = \mathbb{R}$ et $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$, alors f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 (i.e. $f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$ existe) et dans ce cas, $d_{x_0}f : \mathbb{R} \rightarrow F$ est l'application linéaire définie par $D_{x_0}f(h) = hf'(x_0)$.
2. Si $f : U \rightarrow F$ est constante alors f est C^1 et $Df \equiv 0$.
3. Si $L \in \mathcal{L}^c(E; F)$, alors L est C^1 sur E et on a $DL \equiv L$ (i.e. DL est constante égale à L sur E).

Différentielles d'ordre supérieur

Définition 1.1.4. $f : U \subset E \rightarrow F$ est deux fois différentiable en x_0 si et seulement si il existe un voisinage ouvert de x_0 dans U tel que f soit différentiable sur U' et Df soit différentiable en x_0 . Dans ce cas, on appelle différentielle seconde de f en x_0 l'élément $d_{x_0}^2f$ de $\mathcal{L}_2^c(E, E; F)$ défini par $d_{x_0}^2f(h_1, h_2) = [d_{x_0}(Df)(h_1)](h_2)$. Comme f va de $U \subset E$ dans F , Df va de $U' \subset E$ dans $\mathcal{L}^c(E; F)$ et donc $d_{x_0}(Df)$ est un élément de $\mathcal{L}^c(E; \mathcal{L}^c(E; F))$. On a donc $d_{x_0}(Df)(h_1) \in \mathcal{L}^c(E; F)$ et donc $d_{x_0}^2f(h_1, h_2) \in F$. De plus, $d_{x_0}^2f$ est bilinéaire et on a

$$\|d_{x_0}^2f(h_1, h_2)\|_F \leq \|d_{x_0}(Df)(h_1)\| \cdot \|h_2\|_E \leq \|d_{x_0}(Df)\| \|h_1\|_E \|h_2\|_E$$

Donc $d_{x_0}^2f$ est continue.

Si f est deux fois différentiable sur U , on appelle différentielle seconde l'application $D^2f : U \rightarrow \mathcal{L}_2^c(E, E; F)$ définie par $D^2f(x) = d_x^2f$. On dit que f est C^2 sur U si D^2f est continue sur U .

Définition 1.1.5. On dit que $f : U \rightarrow F$ est k -fois différentiable en x_0 si et seulement si il existe un voisinage U' de x_0 dans U tel que f soit $(k-1)$ -différentiable sur U' et D^{k-1} est différentiable en x_0 .

On appelle alors différentielle d'ordre k de f en x_0 l'élément $d_{x_0}^k f \in \mathcal{L}_k^c(E, \dots, E; F)$ défini par

$$d_{x_0}^k f(h_1, \dots, h_k) = [d_{x_0}(D^{k-1}f)(h_1)](h_2, \dots, h_k)$$

et si f est k -fois différentiable sur U , alors on note $D^k f : U \rightarrow \mathcal{L}_k^c(E, \dots, E; F)$ l'application différentielle d'ordre k définie par $D^k f(x)$ ou $d_x^k f$ pour tout $x \in U$.

Gradient

Définition 1.1.6. ([04],p01) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en \mathbf{x} , alors il existe un unique vecteur noté $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ ou encore $\nabla_{\mathbf{x}} f$ tel que

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{h}) = \langle \nabla_{\mathbf{x}} f, \mathbf{h} \rangle.$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, et si $f(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$, la différentielle $D_{\mathbf{x}} f$ est l'application linéaire définie, dans les bases canoniques de $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, par la matrice jacobienne

$$j = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Lorsque $n = p$, la différentielle $D_{\mathbf{x}} f$ est alors inversible si et seulement si son jacobien $\det(J)$ est non nul.

Théorème Des fonction composés

Théorème 1. ([12],p20) Soit f une application d'un ouvert U de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n , et g une application d'un ouvert V de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . On suppose que f différentiable en $\mathbf{a} \in U$, que $f(\mathbf{a}) \in V$ et que g est différentiable en $f(\mathbf{a})$. Alors $g \circ f$ est différentiable en \mathbf{a} , et

$$d(g \circ f)_{\mathbf{a}} = d_{g f(\mathbf{a})} \circ d_{f_{\mathbf{a}}}$$

Autrement dit, la différentiable de la composé est la composé des différentielles.

1.2 homéomorphismes et difféomorphismes

Définition 1.2.1. Un homéomorphisme est une application bijective continue de réciproque continue.

Définition 1.2.2. Un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k est une application bijective de classe \mathcal{C}^k dont la réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^k .

1.3 Théorème d'inversion locale

([02],p19)

Définition 1.3.1. Soit $f : U \rightarrow V$ une application, où U est un ouvert de E et V un ouvert de F et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de U sur V si et seulement si :

- f est bijective .
- f^{-1} et f sont de classe \mathcal{C}^k . On dit alors que U et V sont difféomorphes.

proposition 1.3.1. *Si $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme, alors l'image de tout ouvert de U est un ouvert de V , et l'image réciproque de tout ouvert de V est un ouvert de U .*

Définition 1.3.2. Soit $f : U \rightarrow F$ et $x_0 \in U$. f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme local en x_0 si et seulement si il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 dans U , un voisinage $V_{f(x_0)}$ dans F tel que $f : U_{x_0} \rightarrow V_{f(x_0)}$ soit un \mathcal{C}^k -difféomorphisme

Définition 1.3.3. $f : U \rightarrow F$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme local sur U si et seulement si c'est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme local en tout point de U .

Théorème 2. (d'inversion locale 1)

Soit E et F deux espaces de Banach. Si $f : U \rightarrow F$ est \mathcal{C}^k en x_0 et $d_{x_0}f \in Iso(E; F)$, alors f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme en x_0 .

Théorème 3. (d'inversion locale 2)

Soit E et F deux espaces de Banach. Si $f : U \rightarrow F$ est \mathcal{C}^k sur U et $d_x f \in Iso(E; F)$ pour tout $x \in U$, alors f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme locale sur U .

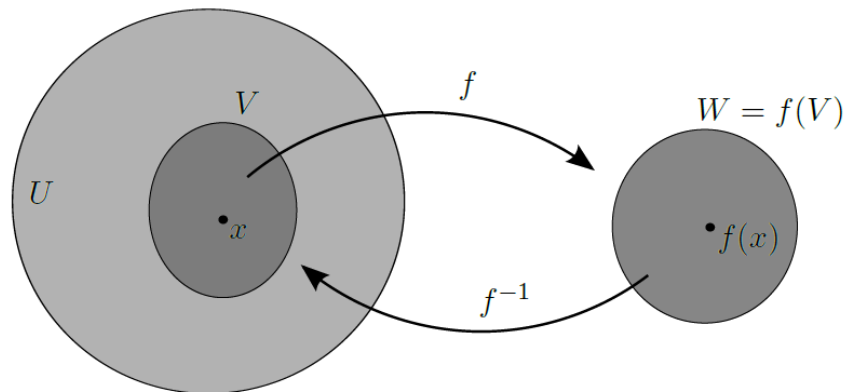


FIGURE 1.1 – Difféomorphisme local entre deux ouverts de l'espace euclidien.

Remarque 1.3.1. *Si $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme, alors c'est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme local sur U . La réciproque est fautive en général. Toutefois, le résultat suivant montre que seule la bijectivité différencie les deux notions.*

proposition 1.3.2. *Si $f : U \rightarrow F$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme local sur U , alors pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de F . En particulier, $V = f(U)$ est un ouvert de F . De plus, si f est injective sur U , alors $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme.*

Théorème 4. Inversion globale

Soit E et F deux espaces de Banach. Si $f : U \rightarrow F$ est \mathcal{C}^k sur U , si pour tout $x \in U$ et si f est injective sur U et $d_x f \in \text{iso}(E; F)$, alors $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme

1.4 Théorème des fonctions implicites

Théorème 5. ([4], p7) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, (x_0, y_0) un point de U et $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = (f^1(x, y), \dots, f^d(x, y))$ une application de classe \mathcal{C}^1 de U dans \mathbb{R}^d . On suppose que $f(x_0, y_0) := \mathbf{0}$ et que la différentielle partielle

$$D_y f(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}}$$

est inversible. Alors il existe un voisinage de (x_0, y_0) de la forme $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \rightarrow W$ de classe \mathcal{C}^1 , unique, tels que

$$\left((x, y) \in V \times W \text{ et } f(x, y) = \mathbf{0} \right) \Leftrightarrow \left(x \in V \text{ et } y = \varphi(x) \right)$$

De plus $D_y f(., .)$ est inversible en tout point de $V \times W$.

Exemple 1.4.1. On revient sur le cercle

$$C \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 = 0 \}.$$

Alors on a $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0 \}$ où $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ est de classe \mathcal{C}^1 . Les dérivées partielles sont $\partial_x f : (x, y) \mapsto -2x$ et $\partial_y f : (x, y) \mapsto -2y$. La dérivée par rapport à y est non nulle en tout point de C sauf en $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Autour de tout point de C exceptés $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ on peut effectivement voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant y en fonction de x . La dérivée par rapport à x est non nulle en tout point de C sauf en $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Et c'est effectivement autour de ces deux points qu'on ne peut pas voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant x en fonction de y .

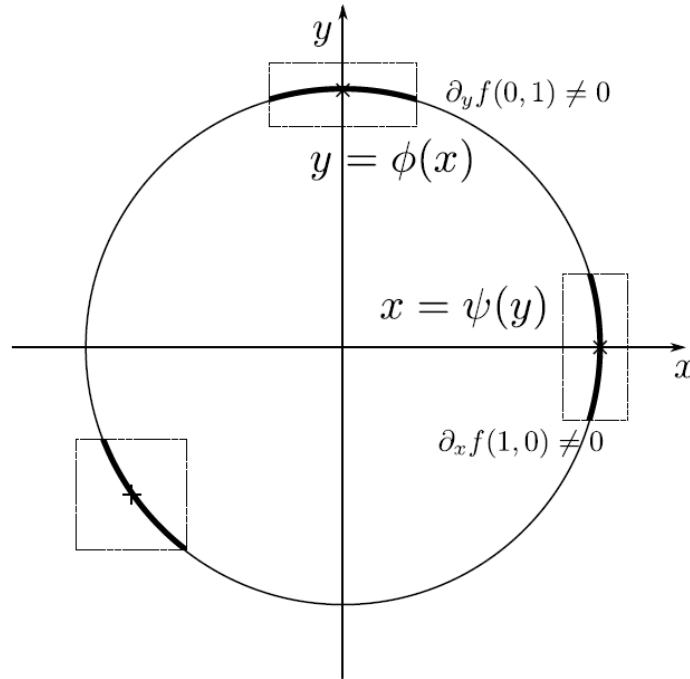


FIGURE 1.2 – Théorème des fonctions implicites pour $f : (x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$.

1.5 Théorème du rang

([6],p48)

Définition 1.5.1. Rang d'une Application

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Si $\text{Im}(D_x f) = \{D_x f(h); h \in E\}$ est un espace vectoriel de dimension fini, on dit alors que f est de rang fini en x et on note

$$\text{rang}_x(f) = \dim(\text{Im}(D_x f))$$

Remarque 1.5.1.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Si E est de dimension fini, alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(D_x f)) + \dim(\text{Im}(D_x f))$$

d'où

$$\text{rang}_x(f) = \dim(\text{Im}(D_x f)) = \dim(E) - \dim(\ker(D_x f))$$

Définition 1.5.2. immersion

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \rightarrow F$ une

application de classe \mathcal{C}^1 . On dit que f est une immersion en $x \in U$ si $D_x f : E \rightarrow F$ est une application injective (i.e $\text{Ker}(D_x f) = \{0\}$).

f est dite immersion sur U si elle est immersion en tout point $x \in U$.

Définition 1.5.3. submersion

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 . On dit que f est une submersion en $x \in U$ si $D_x f : E \rightarrow F$ est une application surjective (i.e $\text{Im}(D_x f) = F$).

f est dite submersion sur U si elle est submersion en tout point $x \in U$.

Remarque 1.5.2.

Si E et F sont de dimensions finis alors :

1. f est une immersion en x si et seulement si $\text{rang}_x(f) = \dim(E)$
2. f est une submersion en x si et seulement si $\text{rang}_x(f) = \dim(F)$

Exemple 1.5.1. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow f(x) = (x, g(x)) \end{aligned}$$

est une immersion sur \mathbb{R} ($D_x f = (1, g'(x)) \neq (0, 0)$).

Exemple 1.5.2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

est une submersion sur \mathbb{R}^n .

1.5.1 Théorème de Caractérisation d'une Submersion.

Théorème 6. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (de classe \mathcal{C}^1 , $m \leq n$) une submersion en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un ouvert $V \subset U$ ouvert voisinage de x_0 , W un ouvert de \mathbb{R}^m et $g : V \rightarrow W$ un difféomorphisme tels que :

$$\begin{aligned} f \circ g^{-1} : W &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ y = (y_1, \dots, y_m, \dots, y_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

est une projection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 f : V & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\
 g \downarrow & \nearrow & \\
 & & W
 \end{array}$$

est commutatif.

1.5.2 Théorème de Caractérisation d'une Immersion

Théorème 7. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (de classe \mathcal{C}^1 , $n \leq m$) une immersion en $\mathbf{x}_0 \in U$, alors il existe un ouvert $V \subset U$ ouvert voisinage de \mathbf{x}_0 , W' un ouvert de \mathbb{R}^m voisinage de $f(\mathbf{x}_0)$, W un ouvert de \mathbb{R}^m et $g : W' \rightarrow W$ un difféomorphisme tels que :

$$\begin{aligned}
 g \circ f : V &\rightarrow W \subset \mathbb{R}^m \\
 \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

est une injection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 V & \rightarrow & W' \\
 & \searrow & \downarrow g \\
 & & W
 \end{array}$$

est commutatif.

1.5.3 Théorème du rang constant

Théorème 8. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable de classe \mathcal{C}^1 et $r \leq \min(n, m)$. Si f est de rang r constant sur U (i.e. $\forall \mathbf{x} \in U, \text{rang}_{\mathbf{x}}(f) = r$), alors pour tout $\mathbf{x}_0 \in U$ Ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de \mathbf{x}_0 , un ouvert W voisinage de $f(\mathbf{x}_0)$, un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \rightarrow \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 V & \longrightarrow & W \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\
 & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} &
 \end{array}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}((y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_m)) = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$$

1.6 Plongement

([6],p62)

Définition 1.6.1. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe \mathcal{C}^1 . f est dite plongement si :

1. f est une immersion sur U .
2. f est injective.

Remarque 1.6.1. Si f est un plongement, alors d'après le théorème du rang constant, il existent un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$, un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \rightarrow \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

Définition 1.6.2. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe \mathcal{C}^1 . f est dite plongement régulier si

1. f est une immersion sur U .
2. f est injective.
3. $f : U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme.

où $f(U)$ est muni de la topologie $\mathbf{T}(f(U))$ induite par celle de \mathbb{R}^m
 $\mathbf{T}(f(U)) = \{\theta \cap f(U); \theta \text{ ouvert de } \mathbb{R}^m\}$

Exemple 1.6.1.

$$\begin{aligned}
 f :]0; 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\mapsto (\cos(t), \sin(t))
 \end{aligned}$$

f est un plongement régulier.

Exemple 1.6.2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

f est une immersion non injective

Exemple 1.6.3. soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{aligned}$$

f est un plongement régulier sur $S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > 0\}$

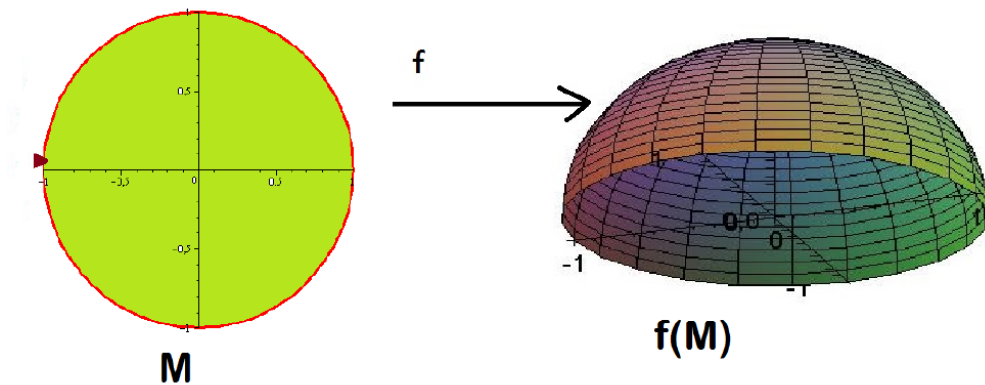


FIGURE 1.3 – plongement régulier

1.7 Sous-variétés de \mathbb{R}^n

([3])

Définitions

Définition 1.7.1. Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est appelé une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n si pour tout $\mathbf{x}_0 \in M$, il existe des $U \in \mathbb{R}^n$ ouvert voisinage de \mathbf{x}_0 et $V \in \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de $\mathbf{0}$ dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme

$$\begin{aligned}\varphi : U &\rightarrow V \\ x &\mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))\end{aligned}$$

tels que $\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ et

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{\mathbf{0}\}).$$

Remarque 1.7.1. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U .

Exemple 1.7.1.

Les sous-variétés de dimension **1** sont appelées des courbes celles de dimension **2** des surfaces.

Les sous-variétés de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$ sont appelées des hypersurfaces.

Exemple 1.7.2.

$M = \mathbb{R}^p \equiv \mathbb{R}^p \times \{\mathbf{0}\}$ est une sous variété de \mathbb{R}^n de dimension p (ici $\varphi = \text{Id}$).

Exemple 1.7.3.

$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ est une sous variété de dimension **2**.
En effet, soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, $U = D \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}f : U &\rightarrow U \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z - \sqrt{1 - x^2 - y^2})\end{aligned}$$

On a $M \subset U$ et

$$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : f est un difféomorphisme de U , tels que $f(M) = D \times \{\mathbf{0}\} \equiv D$;
i.e. $((x, y, z) \in M) \Leftrightarrow (f_3(x, y, z) = z - \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0)$

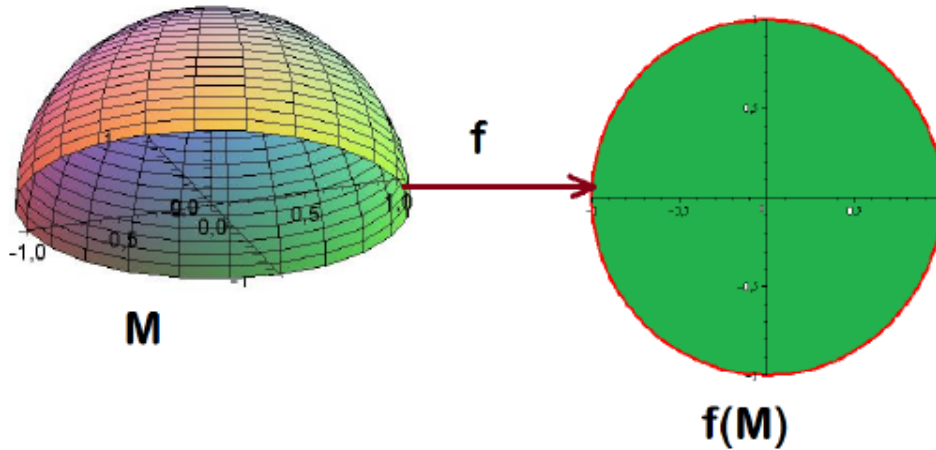


FIGURE 1.4 – sous-variété

1.7.1 Caractérisations des sous-variétés : redressement, submersions, graphes, paramétrages

Soit M un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dit que M est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p et de classe \mathcal{C}^k s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes

Théorème 9. (*Sous-variétés : le point de vue redressement*)

pour tout x de M , il existe des voisinages respectifs U de x dans \mathbb{R}^n et V de $\mathbf{0}$ dans \mathbb{R}^n , ainsi qu'un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $f : U \rightarrow V$, envoyant x sur $\mathbf{0}$, et telle que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{\mathbf{0}\})$.

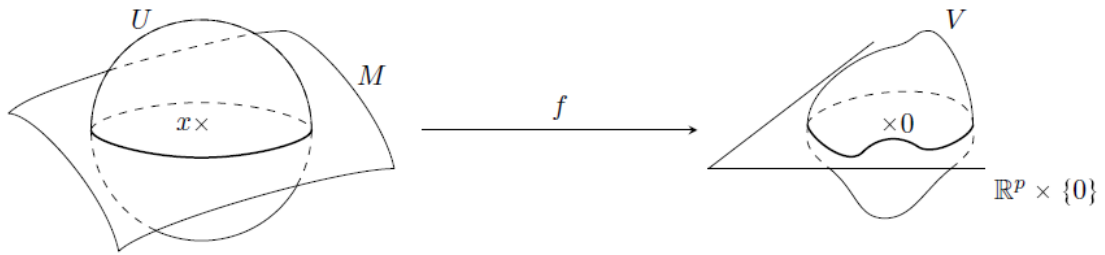


FIGURE 1.5 – sous-variété défini par redressement

Théorème 10. (Sous-variétés : le point de vue graphe)

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$: La propriété suivante :

- pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant $x = (x^1, \dots, x^n)$ un ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ contenant $x' = (x^1, \dots, x^m)$, et une application $h : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $U \cap M = \{(y, h(y)), y \in V\}$ équivaut à
- M est une sous-variété de \mathbb{R}^n

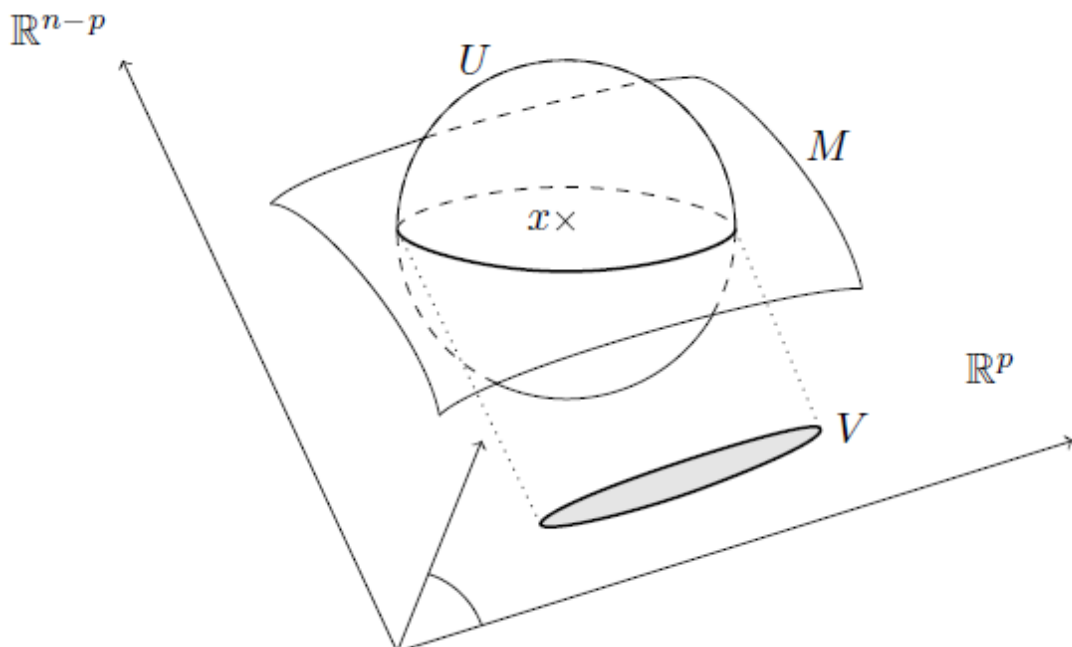


FIGURE 1.6 – sous variété par graphe

Théorème 11. (Sous-variétés : le point de vue fonction implicite)

pour tout \mathbf{x} de M , il existe un voisinage U de \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n ainsi que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une \mathcal{C}^k -submersion en \mathbf{x} , telle que $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$.

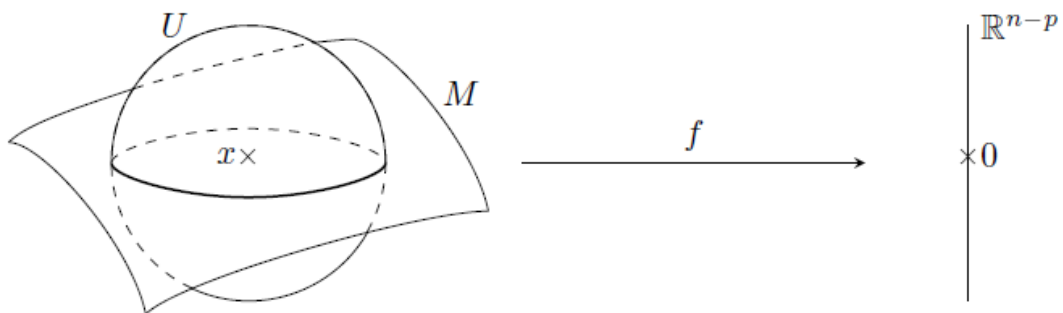


FIGURE 1.7 – sous variété définie par fonction implicite

Théorème 12. (Sous-variétés : le point de vue paramétrage)

pour tout \mathbf{x} de M , il existe des voisinages respectifs U de \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n et V de 0 dans \mathbb{R}^p , ainsi que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une \mathcal{C}^k -immersion en 0 , envoyant 0 sur \mathbf{x} , et induisant un homéomorphisme $V \rightarrow U \cap M$.

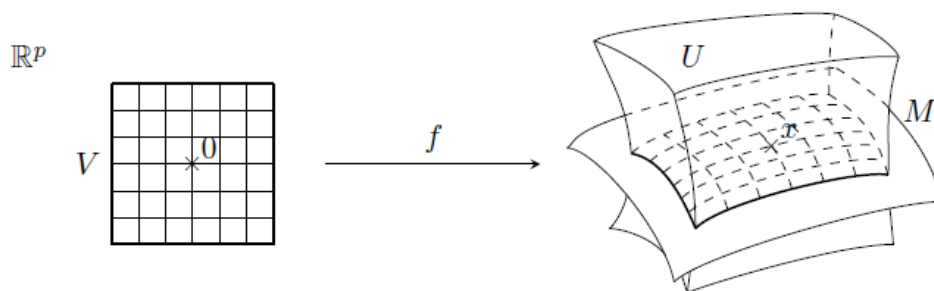


FIGURE 1.8 – sous variété définie par paramétrage

1.8 Espace tangent et fibré tangent

([1],p9)

M^m est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension m et classe \mathcal{C}^k , x_0 est un point de M .

On note $\mathcal{C}_{x_0}M$ l'ensemble des courbes $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k et telle que $\gamma(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset M$ et $\gamma(0) = x_0$

Définition 1.8.1. Un vecteur $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ est tangent à M en x_0 si et seulement si il existe une courbe $\gamma \in \mathcal{C}_{x_0}M$ telle que $\gamma'(0) = \vartheta$

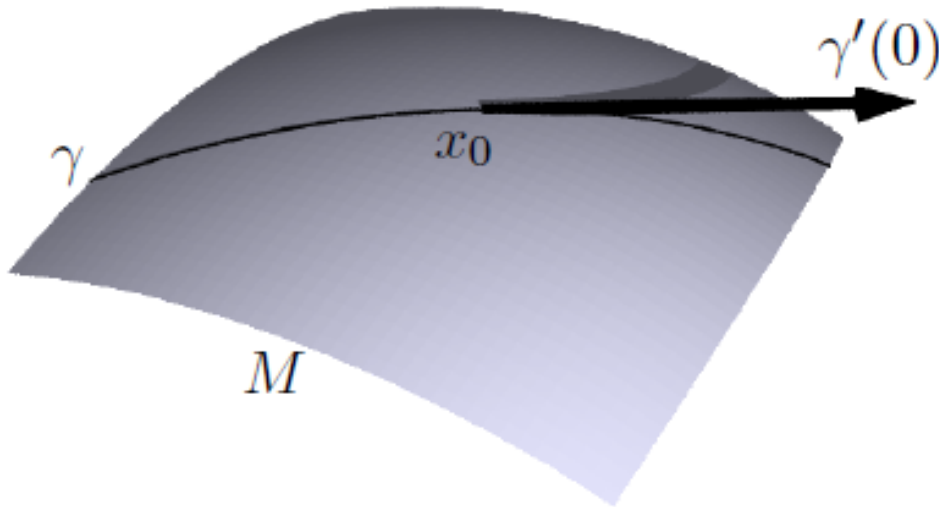


FIGURE 1.9 – vecteur tangent sous variété

Remarque 1.8.1. $T_{x_0}M$ est le quotient de $\mathcal{C}_{x_0}M$ par la relation d'équivalence définie par : $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si et seulement si $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$

Théorème 13. L'ensemble des vecteurs tangents à M en x_0 forme un sous-espace vectoriel de dimension m de \mathbb{R}^n , noté $T_{x_0}M$. De plus

- i) Si U est un voisinage ouvert de x_0 dans \mathbb{R}^n , V un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^n , et $f : U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme tel que $f(x_0) = 0$ et $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, alors : $T_{x_0}M = (df_{x_0})^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$
- ii) s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans \mathbb{R}^n et une application $f : u \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de

classe \mathcal{C}^1 telle que $U \cap M = f^{-1}(\mathbf{0})$ et $d_{x_0}f$ soit une submersion, alors $T_{x_0}M = \text{Ker } d_{x_0}f$. Autrement dit, si $f = (f_1, \dots, f_{n-m})$ alors $v \in T_a M$

$$\text{si et seulement si on a } \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \cdot v_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_n}(x_0) \cdot v_n = 0 \end{cases}$$

iii) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion de classe \mathcal{C}^1 . Si $M = f(U)$ est une sous-variété de dimension p , alors :

$$\begin{aligned} T_{f(x_0)}M &= D_{x_0}f(\mathbb{R}^p) \\ TM &= Df(\mathbb{R}^p) = \bigcup_{x_0 \in U} D_{x_0}f(\mathbb{R}^p) \end{aligned}$$

fibré tangent

Définition 1.8.2. Soit M une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n . On appelle fibré tangent de M l'ensemble

$$TM = \bigcup_{x_0 \in M} x_0 \times T_{x_0}M = \{(x_0; v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n, v \in T_{x_0}M \subset \mathbb{R}^n\}$$

Remarque 1.8.2.

1. le fibré tangent à une sous-variété M en général n'est pas un espace vectoriel.
2. Si $x \neq y$ alors $T_x M \cap T_y M = \emptyset$.

proposition 1.8.1. Si M est une sous-variété de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) et de dimension p de \mathbb{R}^n , alors TM est une sous-variété de classe \mathcal{C}^{k-1} et de dimension $2p$ de \mathbb{R}^{2n} .

Chapitre 2

Variétés différentiables

Références([7],[9],[11],[13])

Rappels de topologie

Définition 2.0.3. Un espace topologique est un ensemble M muni d'une famille de sous-ensembles de M , appelés ouverts, telle que :

1. l'ensemble vide \emptyset et M sont des ouverts.
2. l'intersection $\bigcap_r U_r$ d'un nombre fini d'ouverts est un ensemble ouvert.
3. l'union $\bigcup_r U_r$ d'ouverts est un ensemble ouvert.

Définition 2.0.4. Un espace topologique M est un espace **séparé**(Hausdorff), si pour tous les points distincts x et y de M il existe des voisinages U_x et U_y qui ne s'intersectent pas, i.e. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

2.1 Notion de variété

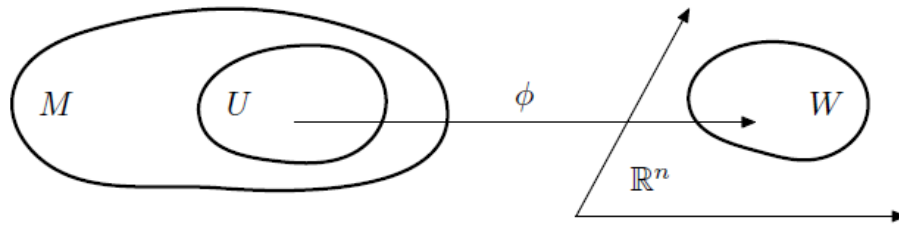
2.1.1 Variétés Différentiable

Soit M un espace topologique.

Définition 2.1.1. (la carte)

Une carte ou carte locale sur M est un homéomorphisme d'un ouvert de M vers un ouvert de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire un couple (U, ϕ) tel que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. U est un ouvert de M , et l'image $W = \phi(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .
2. $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme,

FIGURE 2.1 – Le couple (U, ϕ) constitue une carte de la variété M **Définition 2.1.2. (Compatibilité)**

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux cartes sont Compatible si $U \cap V \neq \emptyset$, l'application $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ s'appelle changement de carte (ou application de transition)..

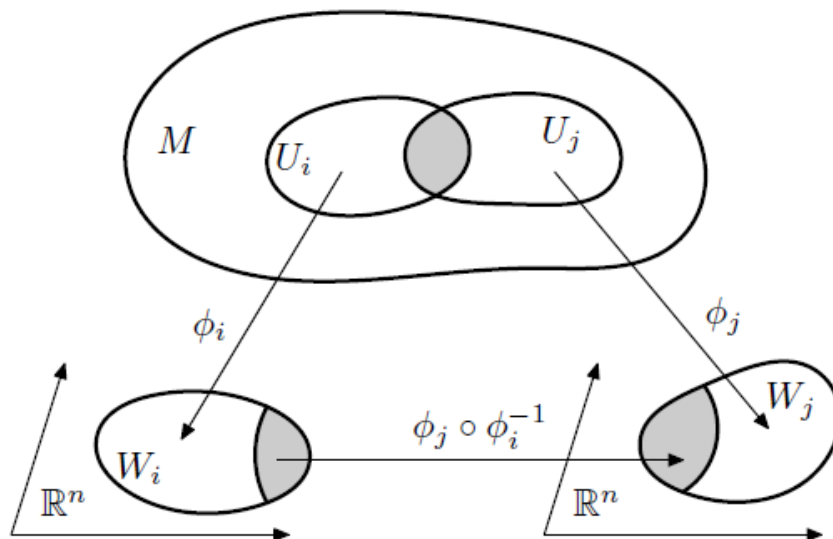


FIGURE 2.2 – application de transition de carte

Définition 2.1.3. (Atlas)

Soit M un espace topologique séparé. Une famille de cartes $\mathbf{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de

dimension n de M est dite atlas différentiable de dimension n si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
2. $\forall i \in I, (U_i, \varphi_i)$ est une carte de dimension n .
3. $\forall i, j \in I, (U_i, \varphi_i)$ et (U_j, φ_j) sont compatibles.

Remarque 2.1.1.

1. Un atlas est dit de classe \mathcal{C}^k si tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^k .
2. Deux atlas A et A' sont dit \mathcal{C}^k -compatibles si $A \cup A'$ est un atlas de classe \mathcal{C}^k .
3. la compatibilité est une relation d'équivalence.

Définition 2.1.4. Soient M un espace topologique séparé et $A = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de dimension n . Une carte (V, ψ) est dite compatible avec l'atlas A si elle est compatible avec toutes les cartes $(U_i, \varphi_i), i \in I$

Définition 2.1.5. Soient M un espace topologique séparé, A_1 et A_2 deux atlas de même dimension n . On dit que A_1 et A_2 sont compatibles si toute carte de l'atlas A_1 est compatible avec A_2 ou l'inverse.

proposition 2.1.1. (Atlas maximal)

Si A est un atlas sur un espace topologique séparé M , alors il existe sur M un unique atlas maximal A_{max} contenant A défini par

$$A_{max} = \{(U, \varphi) \text{ carte sur } M \text{ compatible avec } A\}.$$

2.2 Variétés différentiables

Définition 2.2.1. (Variété)

Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique séparé M muni d'un atlas différentiable A de dimension n , on la note par le couple (M, A) . Dans le cas général on note

1. $atl(M) = A_{max}$ l'atlas maximal de M .
2. $atl(M, x) = \{(U, \varphi) \in A_{max}, x \in U\}$.

2.2.1 Exemples

1. \mathbb{R}^n est une variété de dimension n munie de l'atlas $\mathbf{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$.
2. La sphère $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ est une variété de dimension 1 munie des projections suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_y^+ : U_y^+ = \{(x, y) \in S^1; y > 0\} &\rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_y^+)^{-1} :]-1, 1[&\rightarrow U_y^+ \\ x &\mapsto (x, \sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_y^- : U_y^- = \{(x, y) \in S^1; y < 0\} &\rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_y^-)^{-1} :]-1, 1[&\rightarrow U_y^- \\ x &\mapsto (x, -\sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x^+ : U_x^+ = \{(x, y) \in S^1; x > 0\} &\rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_x^+)^{-1} :]-1, 1[&\rightarrow U_x^+ \\ y &\mapsto (\sqrt{1-y^2}, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x^- : U_x^- = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} &\rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_x^-)^{-1} :]-1, 1[&\rightarrow U_x^- \\ y &\mapsto (-\sqrt{1-y^2}, y) \end{aligned}$$

On a :

$$\text{a) } S^1 = U_y^+ \cup U_y^- \cup U_x^+ \cup U_x^-$$

$$\text{b) } U_y^+ \cap U_y^- = \emptyset, U_x^+ \cap U_x^- = \emptyset$$

c)

$$\begin{aligned} \varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} :]0, 1[&\rightarrow]0, 1[\\ z &\mapsto \sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^∞ .

De la même on démontre que $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$, $\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}$ et $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^-)^{-1}$ sont des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ .

Donc S^1 est une variété de dimension 1 muni de l'atlas :

$$U = (U_y^+, \varphi_y^+), (U_y^-, \varphi_y^-), (U_x^+, \varphi_x^+), (U_x^-, \varphi_x^-)$$

3. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , alors le graphe $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in I\}$ est une variété de dimension 1 munie de l'atlas $U = \{(\Gamma, \varphi)\}$ où

$$\varphi : (x, y) \in \Gamma \rightarrow \varphi(x, y) = x \in I$$

2.2.2 Construction de variétés

Soient M un ensemble et $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ une famille de cartes. Si A vérifie les conditions suivantes :

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
2. $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n , $\forall i, j \in I$
3. $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i)$ est une bijection, $\forall i, j \in I$
4. $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est un \mathcal{C}^∞ difféomorphisme, $\forall i, j \in I$
5. Pour tout compact $F \subset \varphi_i(U_i)$, $\varphi_j(U_j \cap \varphi_i^{-1}(F))$ est un fermé de $\varphi_j(U_j)$, $\forall i, j \in I$.

Alors il existe une unique structure de variété différentiable de classe \mathcal{C}^∞ sur M d'atlas A

Pour la preuve voir ([6], p.28)

Exemple 2.2.1. Soient $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ et $A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$

tels que $U_1 = S^1 - \{(1, 0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(-1, 0)\}$,

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1} :]0, 2\pi[&\rightarrow U_1 \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{-1} :]-\pi, \pi[&\rightarrow U_2 \\ \theta &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} :]0, 2\pi[-\{\pi\} &\rightarrow]-\pi, \pi[-\{0\} \\ \theta &\mapsto \theta - \pi\end{aligned}$$

Exemple 2.2.2. Projection stéréographique

Soient $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ et $A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ tels que $U_1 = S^1 - \{(0, 1)\}$, $U_2 = S^1 - \{(0, -1)\}$,

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{1 - y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow U_1 \\ z &\mapsto \left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{z^2 - 1}{1 + z^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{1 + y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ z &\mapsto \frac{1}{z}\end{aligned}$$

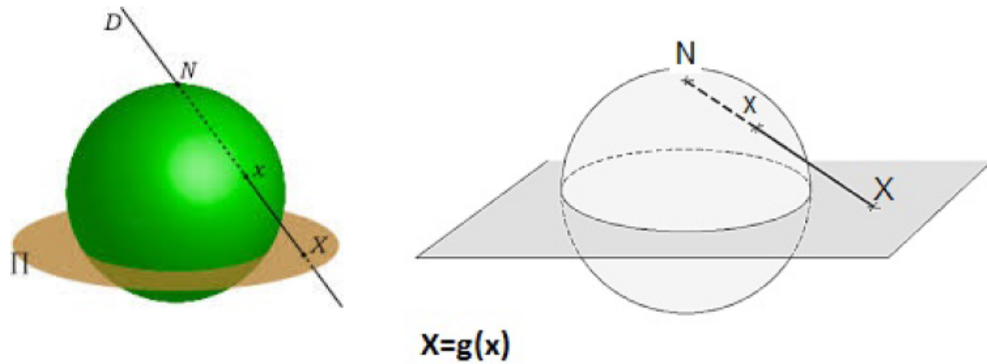


FIGURE 2.3 – Projection stéréographique

Coordonnées locales

Soit (U, ϕ) une carte locale de la variété différentiable M . Pour $p \in U$, $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

On dit que $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ sont les **coordonnées de p dans la carte (U, ϕ)** , alors les n applications (x^1, \dots, x^n) sont les n **applications coordonnées** associées à cette carte, on note par (x^i) . Soit

$$X : \phi(U) \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

un difféomorphisme (de classe \mathcal{C}^∞) entre l'ouvert $\phi(U)$ de \mathbb{R}^n et un autre ouvert W de \mathbb{R}^n . Alors $(U, X \circ \phi)$ est encore une carte locale de la variété différentiable M , dont les coordonnées associées ne sont plus celle associées à la carte locale (U, ϕ) .

Pour un ouvert U de M donné, il existe une infinité de systèmes de coordonnées sur U . X permet d'effectuer un **changement de coordonnées** sur l'ouvert U . Si (x^i) sont les coordonnées associées à (U, ϕ) et (y^j) sont celles associées à $(U, X \circ \phi)$, alors on note symboliquement le changement de coordonnées $(y^j(x^i))$ où l'on regarde les y^j comme n fonctions (de classe \mathcal{C}^∞) définies sur l'ouvert $\phi(U)$ de \mathbb{R}^n .

On dit que le système de coordonnées associées à une carte locale (U, ϕ) est centré en $p \in M$ si $p \in U$ et $\phi(p) = (0, \dots, 0)$. Les coordonnées de p sont donc nulles. Un tel système de coordonnées existe toujours pour n'importe quel p , puisqu'il suffit de composer l'homéomorphisme d'une carte locale par une translation dans \mathbb{R}^n .

Étant donné une carte locale (U, ϕ) , une fonction

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

prendra localement la forme $f(x^1, \dots, x^n)$ au dessus de U . En fait, il s'agit ici de la fonction $f \circ \phi^{-1}$.

2.2.3 Applications différentiables

Définition 2.2.2. Soient deux variétés différentiables (M^m, \mathcal{A}) et (N^n, \mathcal{B}) de dimension m et n respectivement. Une application $F : M \rightarrow N$ est différentiable de classe \mathcal{C}^k , si pour tout $p \in M$, il existe une carte locale (U, ϕ) de M autour de p , de classe \mathcal{C}^k , et une carte locale (V, χ) de N , de classe \mathcal{C}^k , telles que $F(U) \subset V$ et $\chi \circ F \circ \phi^{-1}$ soit de classe \mathcal{C}^k .

Ainsi, pour parler de dérivabilité d'une telle application, nous sommes obligés de composer à la fois à droite et à gauche par les homéomorphismes définissant les cartes locales.

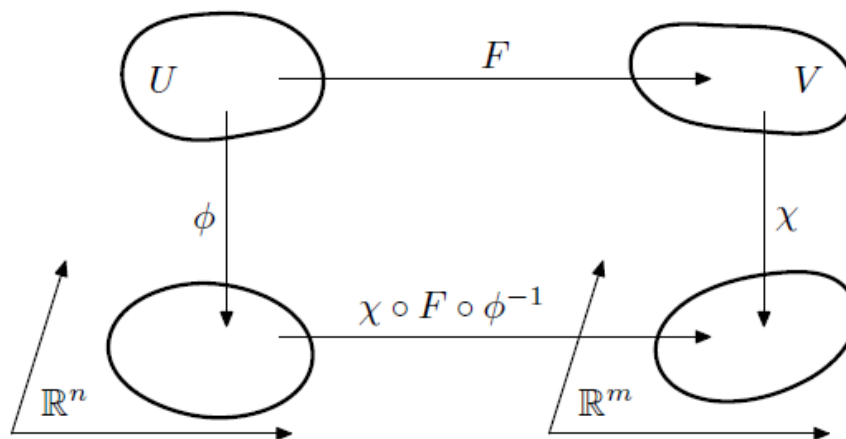


FIGURE 2.4 – L'application F est différentiable si $\chi \circ F \circ \phi^{-1}$ est différentiable

2.3 Espace Tangent à une Variété.

Soit M une variété différentiable et $x \in M$, pour définir le concept important de tangence au point x à la variété M , on utilise deux points de vue :

1. Utiliser les courbes différentiables tracées sur M au voisinage de x et passant par x

2. Dériver les germes (en \mathbf{x}) de fonctions différentiables définies au voisinage de M et à valeur

dans la variété différentielle \mathbb{R} (munie de sa structure d'atlas à une carte $(\mathbb{R}, \text{Id}_{\mathbb{R}}, \mathbf{1})$). Conformément ces deux points de vue, on définit les courbes différentiables tracées sur \mathbb{R} et passant par \mathbf{x} et les germes de fonctions différentiables sur \mathbb{R} en \mathbf{x}

2.3.1 Espaces Tangent

on note par

- $\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty\}$, germe de fonctions.
- $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{x}) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ au voisinage de } \mathbf{x}\}$, germe de fonctions en \mathbf{x} .
- $(\mathcal{C}^\infty, +, \times, \cdot)$ est une algèbre.

Définition 2.3.1. Soit M^m une variété de dimension m . Une courbe passant par $\mathbf{x} \in M$ est une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ d'un interval $I \subset \mathbb{R}$ à image dans la variété M , tel que $\mathbf{0} \in I$ et $\gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{x}$.

On note par $\mathcal{K}_x = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M, \gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{x}\}$. On définit sur \mathcal{K}_x une relation d'équivalence par :

$$(\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_x), \gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2, \Leftrightarrow \exists (U, \varphi) \in \text{atl}(M, \mathbf{x}) : \frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(\mathbf{0}) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(\mathbf{0}). \quad (3.2)$$

Remarque 2.3.1. En vertu de la compatibilité des cartes, la relation (3.2) est indépendante de la carte choisie.

Définition 2.3.2.

- L'ensemble quotient $T_x M = (\mathcal{K}_x)_{/\mathcal{R}}$ est appelé espace tangent à la variété M en \mathbf{x} .
- La classe d'équivalence $\dot{\gamma}(\mathbf{0})$ est dite vecteur tangent à la variété M en \mathbf{x} .

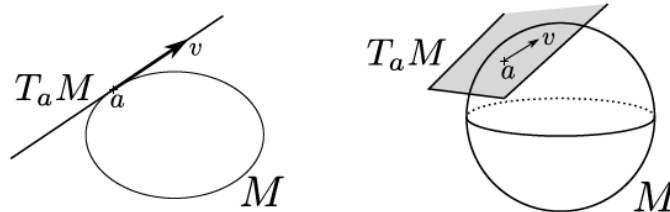


FIGURE 2.5 – espace tangent

Structure vectoriel sur $T_x M$

Soit $(U, \varphi) \in \text{atl}(M)$, on pose

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : T_x M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{\gamma}(0) &\mapsto \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned}$$

De la définition de la relation d'équivalence \mathcal{R} (formule (3.2)), on déduit que $\tilde{\varphi}$ est une application injective.

Pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ on a $\varphi(x) + t\mathbf{y} \in \varphi(U)$.
Si on note

$$\gamma : t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\mathbf{y}) \in U$$

alors γ est une courbe passant par x telle que $\tilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}(0)) = \mathbf{y}$, en déduit que $\tilde{\varphi}_x$ est surjective. Donc $\tilde{\varphi}$ est une application bijective. Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \text{atl}(M, x)$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x \circ \tilde{\psi}_x^{-1}(\mathbf{y}) &= \frac{d}{dt}[\varphi \circ \psi^{-1}(\psi(x) + t\mathbf{y})]_{t=0} \\ &= J_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

est une application linéaire bijective, ce nous permet de transporter d'une manière indépendante de la carte choisie, la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n , à $T_x M$ par les formules suivantes

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(0) + \dot{\gamma}_2(0) &= \tilde{\varphi}_x^{-1}(\tilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) + \tilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_2(0))) \\ &= \tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0} + \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{t=0}\right) \\ \lambda \cdot \dot{\gamma}_1(0) &= \tilde{\varphi}_x^{-1}(\lambda \cdot \tilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_1(0))) \\ &= \tilde{\varphi}_x^{-1}\left(\lambda \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0}\right). \end{aligned}$$

$(T_x M, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension $\dim(T_x M) = m = \dim(M)$.

Notation

1. Relativement à une carte $(U, \varphi) \in \text{atl}(M, x)$ on a $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x)) \in \mathbb{R}^m$. On note alors $\mathbf{x}^i = \varphi^i(x)$ ($1 \leq i \leq m$).
2. Une carte $(U, \varphi) \in \text{atl}(M)$ sera noté $(U, \mathbf{x}^i, 1 \leq i \leq m)$.
3. Si $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ est la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m alors $\tilde{\varphi}_x^{-1}(\mathbf{e}_i)$ est noté par $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ou $\partial_i|_x$

4. $(\frac{\partial}{\partial x_i|_x}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m|_x})$ (est une base locale relativement à la carte (U, φ)).
5. $\frac{\partial}{\partial x_i|_x}$ est le vecteur associé à la courbe $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t.e_i)$.
6. Si $v \in T_x M$ tel que $\tilde{\varphi}(v) = y = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$, alors (par Convention d'Einstein), on obtient

$$v = \sum_{i=1}^m y^i \frac{\partial}{\partial x_i|_x} = y^i \frac{\partial}{\partial x_i|_x} = \dot{\gamma}(0)$$

ou $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t.y)$.

Dérivation

Une dérivation en x est une application linéaire

$$D_x : C_x^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_x est une dérivation si, pour tous réels a et b et toutes fonctions \tilde{f} et \tilde{g} dans $C_x^\infty(M)$,

1. $D_x(a\tilde{f} + b\tilde{g}) = aD_x(\tilde{f}) + bD_x(\tilde{g})$ (linéarité),
2. $D_x(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = g(x)D_x(\tilde{f}) + f(x)D_x(\tilde{g})$ (Leibniz)

où \tilde{f} et \tilde{g} sont les classes d'équivalence de f et g .

Une base de l'espace tangent

Puisque nous avons un espace vectoriel, il est utile d'en trouver une base. Soient $(x^1 \dots, x^n)$ des coordonnées au voisinage de p . Une base de $T_p M$ est donnée par les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, pour $1 \leq i \leq n$, dont les courbes associées sont les γ_i définies par : $x^j(\gamma_i(t)) = 0$ pour $j \neq i$ et $x^i(\gamma_i(t)) = t$. En particulier, la dimension de $T_x M$ en tant qu'espace vectoriel est la dimension de M en tant que variété. Donc tout vecteur $X(p) \in T_p M$ s'écrit $X(p) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, où les $X^i(p)$ sont des réels. Cette écriture a l'avantage de suggérer que $X(p)$ est un vecteur puisqu'il a n composantes $(X^1(p), \dots, X^n(p))$, et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe γ définit ce vecteur, avec bien sûr $\gamma(0) = p$, alors nous avons

$$X^i(p) = \left(\frac{d\gamma^i(t)}{dt} \right)_{t=0}$$

Nous utiliserons souvent cette relation, que nous écrirons $\dot{\gamma}(0) = X(p)$.

Nous pouvons considérer l'effet d'un changement de coordonnées sur les n nombres $X^i(p)$: si nous passons des coordonnées (x^i) aux coordonnées $(y^j(x^i))$, alors si $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^j(p) \frac{\partial}{\partial y^j}(p)$, nous avons

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) X^i(p)$$

2.3.2 Espaces Cotangent à une Variété.

Soient M une variété de dimension m et $p \in M$, on note

$$T_p^*M = (T_pM)^*$$

espace dual de l'espace vectoriel tangent T_pM .

2.4 Fibré tangent

Définition 2.4.1. Soit M une variété différentiable de dimension m . On appelle fibré tangent sur M l'union disjointe des espaces tangents

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Alors TM est une variété différentiable, appelée fibré tangent à M . Un élément de TM est un couple $(p, X(p))$ avec $p \in M$ et $X(p) \in T_pM$. Soit (U, ϕ) une carte locale sur M , de coordonnées (x^i) . Pour $p \in U$, et $X(p) \in T_pM$, nous pouvons prendre comme coordonnées du couple $(p, X(p))$ les réels $(x^1(p), \dots, x^n(p), X^1(p, X), \dots, X^n(p, X))$ où nous décomposons $X(p)$ selon $X(p) = X^i(p, X) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$.

Nous avons donc $2n$ coordonnées pour caractériser un élément de TM . Cette variété topologique est donc de dimension $2n$. De plus, il est facile de voir, grâce à ces coordonnées, que TM est bien une variété différentiable. Il est de même assez facile de montrer que c'est une variété orientable.

Il existe une application surjective particulière $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, X) = p$. C'est la projection de TM sur M . Nous remarquons que les ouverts des cartes de TM , définies ci-dessus, sont les ouverts $\pi^{-1}(U) \subset TM$. D'autre part, en identifiant $p \in M$ au point $(p, 0)$ de TM , on peut considérer M comme une sous-variété de TM .

2.4.1 Applications tangente et cotangente

Définition 2.4.2. (Application tangente)

Soient M^m, N^n deux variétés et $f : M^m \rightarrow N^n$ une application différentiable. On appelle application tangente associée à f , l'application définie par :

$$df : TM \rightarrow TN$$

$$\dot{\gamma} \mapsto \overbrace{(f \circ \gamma)}^{\dot{}}(0)$$

Expression locale Si $(U, \varphi) \in \text{atl}(M)$ et $(V, \psi) \in \text{atl}(N)$ tel que $\varphi(U) \subset V$, alors

$$\begin{array}{ccc} & df & \\ \pi_M^{-1}(U) & \rightarrow & \pi_N^{-1}(V) \\ \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi} \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^m & \rightarrow & \psi(V) \times \mathbb{R}^n \\ & \tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\varphi}^{-1} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z, \mathbf{y}) &= (\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z), D_z(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}))(\mathbf{y}) \\ &= (\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z), J_z(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}))(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ce qui montre que df est une application différentiable.

L'application cotangent : est la transposée de la tangente.

2.5 Champs de Vecteurs et Formes Différentielles

2.5.1 Champ de vecteurs

Soient M une variété différentiable et TM le fibré tangent à M . Une section de TM est une application $X : M \rightarrow TM$

telle que $\pi \circ X$ soit l'identité sur M . C'est à dire que pour tout $p \in M$, nous associons un $X(p) \in T_p M$. Une telle section X de classe \mathcal{C}^∞ , sera appelée champ de vecteurs sur M .

Un champ de vecteurs est donc une application qui à tout point de la variété M associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon \mathcal{C}^∞ . Cette dernière hypothèse équivaut à ce que, si

$$X(p) = X_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

les fonctions $X_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ soient \mathcal{C}^∞ sur l'ouvert de la carte locale.

Nous notons $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M et par la suite, nous noterons souvent $X|_p$ à la place de $X(p)$.

2.5.2 Dérivations et champs de vecteurs

Nous appellerons dérivation sur l'algèbre $F(M)$ toute application linéaire $D : F(M) \rightarrow F(M)$ qui vérifie la relation de Leibniz : $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Alors tout champ de vecteur X sur M définit une dérivation sur $F(M)$ par la relation suivante :

$(X \cdot f)(p) = X(p) \cdot f$ où dans le second membre, $X(p)$ est pris comme dérivation au sens de la définition de $T_p M$. Localement, cette formule s'écrit

$$(X \cdot f)(p) = X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

C'est la dérivée de f dans la direction de X , On identifie $\Gamma(M)$ aux dérivations de $F(M)$.

2.5.3 Formes différentielles

Définition 2.5.1. Une r -forme différentielle (ou r -forme) sur M est un champ tensoriel de type $(0, r)$ complètement antisymétrique. On note $\Omega^r(M)$ l'espace vectoriel de ces r -formes. Pour $r = 0$, on a $\Omega^0(M) = F(M)$. Pour $r = 1$, on retrouve les 1-formes différentielles. Pour $r > n$ (n dimension de M), on a $\Omega^r(M) = \{0\}$. Une r -forme différentielle est donc une application $F(M)$ -multilinéaire antisymétrique de $\Gamma(M) \times \dots \times \Gamma(M)$ dans $F(M)$.

Expressions locales

Si $\{dx^i\}$ est une base locale des 1-formes différentielles, au dessus de l'ouvert U d'une carte locale de M , de coordonnées (x^i) , on pose

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma \in G_r} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(r)}}$$

Produit extérieur

Définition 2.5.2. Soient $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^s(M)$, on définit le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$ par la formule

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{r+s}) = \\ \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in G_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \eta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}) \end{aligned}$$

Ce produit donne à l'espace vectoriel

$$\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega^n(M)$$

une structure d'algèbre. Il a la propriété de commutativité $\omega \eta = (-1)^{rs} \omega \wedge \eta$

2.5.4 Fibré des formes différentielles

On a regardé les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles comme des sections de fibrés. On va faire le même pour les r-formes différentielles sur M . Pour tout $p \in M$, posons $\wedge^r T_p^* M$ l'espace vectoriel des r-formes multilinéaires antisymétriques sur $T_p M$. On définit alors la variété

$$\wedge^r T^* M = \bigcup_{p \in M} \wedge^r T_p^* M$$

appelée fibré des r-formes différentielles. Alors toute r-forme différentielle est une section \mathcal{C}^∞ de ce fibré.

2.5.5 Crochet de Lie

Soient $X, Y \in \Gamma(M)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Nous appellerons crochet de Lie de X et Y le champ de vecteurs $[X, Y]$.

$$\begin{aligned} [X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ f &\rightarrow [X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)) \end{aligned}$$

Propriété

- $[,]$ bilinéaire, $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisymétrique)
- $[f \cdot X, g \cdot Y] = fX(g)Y - gY(f)X + (f \cdot g)[X, Y]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (l'identité de Jacobi)

Exemple 2.5.1. Si $X = y \frac{\partial}{\partial x} - \cos(x) \frac{\partial}{\partial y}$ et $Y = x \frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX \\ &= X(x) \frac{\partial}{\partial x} - X(y) \frac{\partial}{\partial x} - Y \cos(x) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= y \frac{\partial}{\partial x} + x \sin(x) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

2.6 Fibré cotangent

Comme pour T_pM , nous pouvons considérer la variété différentiable

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

appelée fibré cotangent de M . Si U est un ouvert de M , on note

$$T^*U = \bigcup_{p \in U} T_p^*M$$

dual de l'espace tangent TU . Soient $(U, \varphi) \in \mathbf{atl}(M)$ une carte de M et $(\partial_1, \dots, \partial_m)$ la base locale de champs de vecteurs associée. On note par (dx^1, \dots, dx^m) la base locale de formes linéaires définies par

$$\begin{aligned} dx^i : U &\rightarrow T^*U \\ x &\mapsto dx^i|_x = (\partial_i|_x)^* \\ dx^i|_x(\partial_j|_x) &= \delta_j^i, (1 \leq i, j \leq m) \end{aligned}$$

2.6.1 Formes Différentielles

Définition 2.6.1. Une forme différentielle sur la variété M^m est une section

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow T^*M \\ x &\mapsto \omega_x \in T_x^*M \end{aligned}$$

de classe \mathcal{C}^∞ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \omega : M & \rightarrow & T^*M \\ Id \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

L'ensemble des formes différentielle est noté $\mathcal{H}^*(M)$ ou $\Gamma(T^*M)$.

Remarque 2.6.1.

1. La différentielle d'une fonction f définie par

$$df : x \rightarrow d_x f,$$

est une 1-forme différentielle.

2. Si α et β sont deux 1-formes différentielles. La somme $\alpha + \beta$ définie par

$$\alpha + \beta = \mathbf{p} \rightarrow \alpha_{\mathbf{p}} + \beta_{\mathbf{p}}$$

est une 1-forme différentielle.

3. Si f est une fonction et ω est une 1-forme différentielle le produit

$$f \cdot \omega : \mathbf{p} \rightarrow f(\mathbf{p})\omega_{\mathbf{p}}$$

est également une 1-forme différentielle.

4. Si ω est une forme différentielle et (x_1, \dots, x_n) des coordonnées au voisinage U d'un point \mathbf{p} . Il existe des fonctions uniques ω_i définies sur U telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot dx_i$$

Définition 2.6.2. [Forme différentielle lisse]

Nous dirons qu'une 1-forme différentielle ω est de classe \mathcal{C}^k au voisinage du point \mathbf{p} , s'il existe des coordonnées (x_1, \dots, x_n) telles qu'au voisinage de \mathbf{x} nous ayons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i \cdot dx_i$$

pour des fonctions f_i de classe \mathcal{C}^k au voisinage de \mathbf{p} . Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est de classe \mathcal{C}^k si elle est de classe \mathcal{C}^k au voisinage de tout les points de la variété M .

Chapitre 3

Variété Riemmanienne

Références([8],[10],[13])

3.1 Rappel sur les tenseurs

Définition 3.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. Nous notons E^* et F^* leur espace vectoriel dual. Pour $f \in E^*$, $g \in F^*$, $x \in E$ et $y \in F$, nous posons $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Nous définissons ainsi $f \otimes g$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$. C'est le **produit tensoriel des deux formes** f et g .

Si $\{e^1, \dots, e^p\}$ est une base de E^* et $\{f^1, \dots, f^q\}$ une base de F^* , alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e^i \otimes f^j$. Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$ et appelé produit tensoriel de E^* et F^* .

Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij}e^i \otimes f^j$.

Nous savons d'autre part que tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^* , c'est à dire comme élément de E^{**} (en dimension finie, nous avons $E^{**} \simeq E$). Nous pouvons donc appliquer ce schéma de construction à E^* et F^* afin de définir le produit tensoriel $E \otimes F \simeq E^{**} \otimes F^{**}$. Une base de $E \otimes F$ est alors $\{e_i \otimes f_j\}$ où $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases de E et F . Nous avons alors les règles algébriques suivantes, faciles à vérifier : si $x, x_1, x_2 \in E$, $y, y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y) \end{cases}$$

En particulier, si $F = E^*$ alors $E \otimes \dots \otimes E \otimes E^* \otimes \dots \otimes E^*$ où E apparaît s fois et E^* r fois. Les éléments de cet ensemble sont des formes $(r + s)$ -linéaires sur $E^* \times \dots \times E^* \times E \times \dots \times E$. Un tel élément s'écrit $T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$

c'est un tenseur de type (s, r) les coefficients $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ sont les coordonnées du tenseur T dans la base (e_i) .

Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés. Le produit tensoriel du tenseur.

$$S = S_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p}$$

avec le tenseur

$$T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

On définit l'espace $\wedge^r \mathbf{E}^*$ des r-formes multilinéaires antisymétriques sur \mathbf{E} par

$$\otimes^r \mathbf{E}^* = \underbrace{\mathbf{E}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^*}_{r \text{ fois}}$$

et posons $\wedge^r \mathbf{E}^*$ le sous espace vectoriel de $\otimes^r \mathbf{E}^*$ des éléments antisymétriques On définit le produit extérieur

$$\begin{aligned} \wedge : \wedge^r \mathbf{E}^* \times \wedge^s \mathbf{E}^* &\rightarrow \wedge^{r+s} \mathbf{E}^* \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \\ \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in G_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot \eta(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)}) \end{aligned}$$

3.2 Tenseurs sur une variété

Définition 3.2.1. Pour tout $p \in M$, définissons l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)} M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{s \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{r \text{ fois}}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)} M$ est un tenseur de type (s, r) au dessus de p Dans une base associée à des coordonnées locales $(x^i)_{i=1, \dots, n}$ au voisinage de p , il s'écrit

$$T|_p = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) dx_{|p}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

On considère la variété différentiable

$$T^{(s,r)} M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(s,r)} M$$

3.3 Connexions linéaires

3.3.1 Dérivée covariante de fonction

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = f(t\mathbf{u} + \mathbf{y}), (\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

La dérivée de g en t_0 est dite dérivée de la fonction f suivant la direction du vecteur \mathbf{u} , elle est dite aussi dérivée covariante de f par rapport à \mathbf{u} en \mathbf{y} , on a

$$\begin{aligned} g'(0) &= \left. \frac{df(t\mathbf{u} + \mathbf{y})}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{y}) \cdot u^i \\ &= \mathbf{d}_y f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

On note alors

$$(\nabla_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{y}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{y}) \cdot u^i$$

On remarque que si f est une application de classe \mathcal{C}^k alors $\nabla_{\mathbf{u}} f$ est une application de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Définition 3.3.1. Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée covariante sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par rapport à \mathbf{u} est définie par

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \nabla_{\mathbf{u}} f \end{aligned}$$

Définition 3.3.2. Soient M^m une variété, $\mathbf{X} \in \Gamma(TM)$. La dérivée covariante par rapport au champ de vecteurs \mathbf{X} est une application notée $\nabla_{\mathbf{X}}$, définie par

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} : \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ f &\mapsto \nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}(f) = df \circ \mathbf{X} \end{aligned}$$

3.3.2 Connexions linéaires

Soient M^m une variété de dimension m . Une connexion linéaire sur M est une application

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

telle que, pour tous $X, X', Y, Y' \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

- $\nabla_{X+fX'} Y = \nabla_X Y + f \nabla_{X'} Y$ ($\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire).
- $\nabla_X fY = (\nabla_X f)Y + f \nabla_X Y = X(f)Y + f \nabla_X Y$.

Exemple 3.3.1. Soit \mathbb{R}^n muni de l'atlas usuelle $\{(\mathbb{R}^m, Id)\}$, si $X = (X^1, \dots, X^m) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))^m$ et $Y = (Y^1, \dots, Y^m) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))^m$ alors

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \left(\frac{\partial Y^1}{\partial x^i} X^i, \dots, \frac{\partial Y^m}{\partial x^i} X^i \right) \\ &= (X(Y^1), \dots, X(Y^m)) \\ &= (\nabla_X Y^1, \dots, \nabla_X Y^m)\end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur \mathbb{R}^m .

Définition 3.3.3. Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M . Soit $(\partial_1, \dots, \partial_m)$ la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ) . On a

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (1 \leq i, j, k \leq m)$$

où $\Gamma_{ij}^k \partial_k \in \mathcal{C}^\infty$ appelé coefficient de **Christoffel**.

Si $X = X^i \partial_i$ et $Y = Y^j \partial_j$ relativement à la carte (U, φ) , alors

$$\nabla_X Y = X^i [\partial_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k] \partial_k$$

preuve

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} Y^j \partial_j \\ &= X^i [\nabla_{\partial_i} Y^j \partial_j] \\ &= X^i [(\nabla_{\partial_i} Y^j) \partial_j + Y^j (\nabla_{\partial_i} \partial_j)] \\ &= X^i [\partial_i(Y^k) \partial_k + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k] \\ &= X^i [\partial_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k] \partial_k\end{aligned}$$

Définition 3.3.4. Une connexion linéaire ∇ est dite symétrique si et seulement si

$$\forall X, Y \in \Gamma(TM) : \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

i.e

$$\forall (U, \varphi) \in \text{atl}(M) : \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (1 \leq i, j, k \leq m)$$

3.3.3 Torsion et courbure

Tenseur de Torsion

Soient M une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M . le tenseur de type $(2, 1)$ défini par l'expression

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

est dit tenseur de torsion associé à la connexion ∇ .

Preuve

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X + Y(f)X - f[X, Y] \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X, Y] \\ &= fT(X, Y) \end{aligned}$$

Comme T est antisymétrique (i.e. $T(X, Y) = -T(Y, X)$) alors

$$\begin{aligned} T(X, gY) &= -T(gY, X) \\ &= -gT(Y, X) \\ &= gT(X, Y) \end{aligned}$$

De la \mathbb{R} -bilinearité de ∇ et $[,]$, on déduit que T est \mathbb{R} -bilinéaire.

propriétés

1. La connexion ∇ est symétrique si et seulement si elle est sans torsion (i.e $T = 0$).
2. Toute connexion ∇ localement plate est sans torsion.

3.3.4 Le tenseur de Courbure

Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M . Le tenseur de type $(3, 1)$ défini par

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) &\mapsto \nabla_X \nabla_Y (Z) - \nabla_Y \nabla_X (Z) - \nabla_{[X, Y]}(Z) \end{aligned}$$

est dit tenseur de courbure associé à la connexion ∇ .

3.4 Métriques Riemanniennes

Définition 3.4.1. Une métrique Riemannienne g sur une variété M est une application,

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

$\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

Remarque 3.4.1. Soit g une métrique Riemannienne sur M . Pour tout $V, W \in \Gamma(TM)$, on a :

1. $g(V, W) = g(W, V)$. (symétrique)
 - $g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$. (non dégénérée)
 - $g(V, V) \geq 0$. (définie positive)
2. $g \in \Gamma(TM^*) \otimes \Gamma(TM^*)$

Si (U, φ) est une carte sur M , alors

$$g = \sum_{i, j=1}^k g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelé composantes du tenseur métrique relativement à la carte (U, φ) . Localement, si $V = V^i \partial_i$ et $W = W^j \partial_j$ on a

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3. Pour tout $x \in M$ on a

$$g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où $T_x M$ désigne l'espace tangent en x .

Définition 3.4.2. . Une variété Riemannienne est un couple (M, g) , où M est une variété différentiable et g une métrique Riemannienne sur le fibré tangent (TM, π, M) .

Exemple 3.4.1.

Sur $M = \mathbb{R}$, on pose $g(p) = h(p)dx^2$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction \mathcal{C}^k et dx^2 est la forme quadratique sur $\mathbb{R} \simeq T_p\mathbb{R}$ définie par $dx^2(u, u) = u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors g est une métrique Riemannienne \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} (on construit ainsi toutes les métriques possibles sur \mathbb{R}).

Définition 3.4.3. (tiré en arrière, pull-back)

Si f est différentiable de M dans N (deux variétés), et si N est munie d'une métrique g^N , alors on peut définir une métrique sur M par :

$$v, \omega \in T_pM(f^*g^N)(v, \omega) = g^N(d_{f_p}(v), d_{f_p}(\omega))$$

On voit aisément que cela définit bien une forme bilinéaire symétrique et positive, par contre elle est définie positive si et seulement si la différentielle d_{f_p} est injective. C'est à partir de cette métrique que d'autres notions clés vont être définies comme celle d'isométrie entre variétés riemanniennes

Définition 3.4.4. (Isométries)

Soit (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ est appelé une isométrie si

$$f^*h = g.$$

Exemple 3.4.2. (Métriques induites)

Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^k = alors le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n induit une métrique sur M en posant, pour $p \in M$ et $(u, v) \in T_pM^2$

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Cette métrique est bien \mathcal{C}^k car si (Ω, φ) est une carte locale de M alors

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \circ \varphi^{-1}(p) \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

est de classe \mathcal{C}^k comme composée d'applications de classe \mathcal{C}^k .

3.5 Connexion de Levi-Civita

Théorème 14. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'application*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur M , appelée connexion de Levi-Civita.

preuve

1

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) + g(Z, [fX, Y]) \\ &\quad + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]) \\ &= fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\ &\quad - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X) + fg(Z, [X, Y]) \\ &\quad + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\ &= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) + fg(Z, [X, Y]) \\ &\quad + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) \\ &= 2g(f\nabla_X Y, Z), \end{aligned}$$

et comme g est non dégénérée on a , $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

2.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{X+W} Y, Z) &= (X + W)(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X + W)) - Z(g(X + W, Y)) \\ &\quad + g(Z, [X + W, Y]) + g(Y, [Z, X + W]) - g(X + W, [Y, Z]) \\ &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) + W(g(Y, Z)) + Y(g(Z, W)) \\ &\quad - Z(g(W, Y)) + g(Z, [W, Y]) + g(Y, [Z, W]) - g(W, [Y, Z]) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_W Y, Z) \\ &= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z), \end{aligned}$$

d'où , $\nabla_{X+W}Y = \nabla_XY + \nabla_WY$.

3.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(g(X, fY)) + g(Z, [X, fY]) \\
&\quad + g(fY, [Z, X]) - g(X, [fY, Z]) \\
&= X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\
&\quad - fZ(g(X, Y)) + X(f)g(Z, Y) + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) \\
&\quad + Z(f)g(X, Y) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\
&\quad + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

4. De même manière on obtient , $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$. Donc ∇ est une connexion linéaire sur M .

Théorème 15. .(*Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne*)
Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g .

Preuve

: On a

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2}\{g(Z, [X, Y]) - g(Z, [Y, X])\} \\
&= g(Z, [X, Y]),
\end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion. Et,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + X(g(Z, Y))\} \\
&= X(g(Y, Z)),
\end{aligned}$$

Connexion linéaire compatible avec une métrique Une connexion linéaire ∇ sera dite compatible avec la métrique g si

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour trois champs de vecteurs quelconques X, Y, Z sur M Nous dirons aussi que ∇ est une connexion métrique. Il est facile de voir, grâce à la définition de ∇_X sur les tenseurs, que cette relation est équivalente à

$$\nabla_X g = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Il existe une unique connexion sans torsion compatible avec la métrique g , c'est la connexion de Levi-Civita, qui a pour expression :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})$$

3.5.1 Tenseur de courbure Riemannienne

Définition 3.5.1. (M, g) une variété Riemannienne, et ∇ est la connexion de Levi-Civita on appelle **tenseur de courbure Riemannienne** l'application \mathcal{C}^∞ -linéaire.

$$\begin{aligned} \bar{R} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (X, Y, Z, W) &\mapsto g(R(X, Y)Z, W) = g(W, R(X, Y)Z). \end{aligned}$$

Localement, on a

$$\bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = R_{kl,ij} = -R_{lk,ij}$$

proposition 3.5.1. Le tenseur $\bar{R}(X, Y, Z, W)$ a les propriétés de symétrie suivantes

1. *Identité de Bianchi* : $\bar{R}(X, Y, Z, W) + \bar{R}(X, Z, W, Y) + \bar{R}(X, W, Y, Z) = 0$.
2. *Anti-symétrie en (X, Y)* : $\bar{R}(X, Y, Z, W) = -\bar{R}(Y, X, Z, W)$.
3. *Anti-symétrie en (Z, W)* : $\bar{R}(X, Y, Z, W) = -\bar{R}(X, Y, W, Z)$.
4. *Symétrie dans les couples (X, Y) et (Z, W)* : $\bar{R}(X, Y, Z, W) = \bar{R}(Z, W, X, Y)$.

3.5.2 Courbure de Ricci

Définition 3.5.2. La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M, g) de dimension m est un tenseur de type $(2, 0)$ défini par

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= trace R(*, X)Y \\ &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i), \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, où (e_i) est une base orthonormée locale sur M , et

$$\begin{aligned} R(*, X)Y &: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\mapsto R(Z, X)Y \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto \mathbf{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

La courbure de Ricci, Ric est forme bilinéaire symétrique, en effet

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \sum_{i=1}^m g(\mathbf{R}(e_i, \mathbf{X})\mathbf{Y}, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m g(\mathbf{R}(\mathbf{Y}, e_i)e_i, \mathbf{X}) \\ &= \sum_{i=1}^m g(\mathbf{R}(e_i, \mathbf{Y})\mathbf{X}, e_i) \\ &= \mathbf{Ric}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \end{aligned}$$

Définition 3.5.3. . Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M, g) , est un tenseur de type $(1, 1)$, défini par

$$\mathbf{Ricci}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{R}(\mathbf{X}, e_i)e_i$$

pour tout $\mathbf{X} \in \Gamma(TM)$, où $(e_i)_{i=1..m}$ est une base orthonormée locale sur M .

Remarque 3.5.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne, de dimension m . Pour tout $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Gamma(TM)$ on a :

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g(\mathbf{Ricci}(\mathbf{X}), \mathbf{Y})$$

Chapitre 4

Variété Riemannienne produit

Références :([8],[10],[13]).

4.1 Variété Riemannienne produit

Définition 4.1.1. Soient $(M_1, A_1), (M_2, A_2)$ deux variétés de classe \mathcal{C}^∞ , munies de deux atlas A_1 et A_2 de dimensions m_1, m_2 respectivement. Alors le produit $A_1 \times A_2$ donné par

$$A_1 \times A_2 = \{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) | (U_1, \varphi_1) \in A_1, (U_2, \varphi_2) \in A_2\}$$

où,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 &\rightarrow \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \end{aligned}$$

est un atlas sur $M_1 \times M_2$ de dimension $m_1 + m_2$ et de classe \mathcal{C}^∞ .

La variété $(M_1 \times M_2, A_1 \times A_2)$ est dite variété produit de M_1 et M_2 .

proposition 4.1.1.

1. Si M_1 et M_2 sont deux variétés de classe \mathcal{C}^∞ , alors les projections canoniques $\pi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ et $\eta : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ sont de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Si M_1, M_2 et M_3 sont trois variétés, alors l'application $f : M_3 \rightarrow M_1 \times M_2$ est de classe \mathcal{C}^∞ si et seulement si $\pi \circ f$ et $\eta \circ f$ sont de classe \mathcal{C}^∞ .
 $f = (\pi \circ f, \eta \circ f)$.
3. Pour tout $(x, y) \in M_1 \times M_2$ le sous-espace $M_1 \times \{y\}$ et $\{x\} \times M_2$ sont deux sous-variétés de de la variété produit $M_1 \times M_2$.

4. $T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) \cong T_{(x,y)}M_1 \times T_{(x,y)}M_2$
5. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M_1 et M_2 respectivement, le couple (X, Y) défini par

$$\begin{aligned} (X, Y) : M_1 \times M_2 &\rightarrow T_{M_1} \times T_{M_2} \\ (X, Y) &\mapsto (X_x, Y_y) \end{aligned}$$

est un champ de vecteurs sur la variété produit $M_1 \times M_2$.

proposition 4.1.2. Formule de leibniz

soit une application $M_1 \times M_2$ dans N La différentielle de au point (x, y) est donné par

$$T_{(x,y)}\psi(Z) = T_x\psi_y(X) + T_y\psi_x(Y), \forall Z \in T_{(x,y)}M_1 \times M_2$$

où ψ_y et ψ_x sont définies par $\psi_y(z_1) = (z_1, y)$ et $\psi_x(z_2) = (x, z_2)$ respectivement et $Z = X + Y \in T_xM_1 \oplus T_yM_2$

proposition 4.1.3. Soient X et Y deux champs de vecteur sur la variété produit $M_1 \times M_2$, si pour $f_1 \in C^\infty(M_1)$ tout et pour tout $f_2 \in C^\infty(M_2)$ on

$$\begin{cases} X(f_1 \circ \pi) = Y(f_1 \circ \pi) \\ X(f_2 \circ \eta) = Y(f_2 \circ \eta) \end{cases} \Rightarrow X = Y$$

proposition 4.1.4.

Soient M_1 et M_2 deux variété différentiables, on a les propriétés suivantes :

1. $(X_1, 0)(f_1 \circ \pi) = X_1(f_1) \circ \pi$ et $(X_1, 0)(f_2 \circ \eta) = 0$
2. $(0, X_2)(f_2 \circ \eta) = X_2(f_2) \circ \eta$ et $(0, X_2)(f_1 \circ \pi) = 0$
3. $[(X_1, 0), (Y_1, 0)] = ([X_1, Y_1], 0)$; $[(0, X_2), (0, Y_2)] = (0, [X_2, Y_2])$
et $[(X_1, 0), (0, X_2)] = 0$
4. $(f_1 X_1, 0) = (f_1 \circ \pi)(X_1, 0)$ et $(0, f_2 X_2) = (f_2 \circ \eta)(0, X_2)$

pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$, $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$, $f_1 \in C^\infty(M_1)$ et $f_2 \in C^\infty(M_2)$.

proposition 4.1.5. Soient α, β deux formes différentielle sur la variété produit $M_1 \times M_2$. Pour tout $X_1 \in \Gamma(TM_1)$ et $X_2 \in \Gamma(TM_2)$,

$$\begin{cases} \alpha(X_1, 0) = \beta(X_1, 0) \\ \alpha(0, X_2) = \beta(0, X_2) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

proposition 4.1.6. Soient ∇, ∇' deux connexions linéaires sur $M_1 \times M_2$.
telle que pour tous $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$,

$$\begin{cases} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = \nabla'_{(X_1,0)}(Y_1, 0) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) = \nabla'_{(X_1,0)}(0, X_2) \\ \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) = \nabla'_{(0,X_2)}(X_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) = \nabla'_{(0,X_2)}(0, Y_2) \end{cases} \Rightarrow \nabla = \nabla'$$

4.2 Connexion linéaire produit

Soient M_1 et M_2 deux variétés. Si ∇^1 et ∇^2 sont deux connexions linéaires sur M_1 et M_2 respectivement, alors il existe une unique connexion linéaire ∇ sur $M_1 \times M_2$, telle que pour tous $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) &= (\nabla_{X_1}^1 Y_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) &= (0, \nabla_{X_2}^2 Y_2) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) &= \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) = 0 \end{aligned}$$

∇ est appelé connexion linéaire produit.

4.3 Tenseur de torsion produit

Soient ∇^1 une connexion linéaire sur M_1 et ∇^2 une connexion linéaire sur M_2 . Si T^1 et T^2 désignent les tenseurs de torsions sur M_1 et M_2 respectivement, alors T le tenseur de torsion produit sur $M_1 \times M_2$ est donné par

$$T = (T^1, 0) + (0, T^2) = (T^1, T^2)$$

proposition 4.3.1. pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$, où T, T^1 et T^2 désignent les tenseurs de torsion sur $M_1 \times M_2, M_1$ et M_2 respectivement

$$\begin{cases} T((X_1, 0), (Y_1, 0)) = (T^1(X_1, Y_1), 0) \\ T((0, X_2), (0, Y_2)) = (0, T^2(X_2, Y_2)) \\ T((X_1, 0), (0, X_2)) = 0 \end{cases}$$

4.4 Tenseur de courbure

Soient ∇^1 une connexion linéaire sur M_1 et ∇^2 une connexion linéaire sur M_2 . Si R_1 et R_2 désignent les tenseurs de courbure sur M_1 et M_2 respectivement, alors R le tenseur de courbure produit sur $M_1 \times M_2$ est donné par

$$R = (R_1, 0) + (0, R_2) = (R_1, R_2)$$

Remarque 4.4.1.

1. La variété produit $M_1 \times M_2$ est sans torsion si et seulement si les variétés M_1 et M_2 sont sans torsion.
2. La variété produit $M_1 \times M_2$ est localement plate si et seulement si les variétés M_1 et M_2 sont localement plates.

4.5 Métrique diagonale sur la variété produit

Si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés Riemanniennes de dimension m_1 et m_2 respectivement, On définit la métrique Riemannienne produit sur $M_1 \times M_2$ par

$$g = \pi^*g_1 + \eta^*g_2$$

où $\pi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ et $\eta : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ désignent la première et la deuxième projection canonique.

proposition 4.5.1. *pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$.*

$$\begin{aligned} g((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2) \\ g((X_1, 0), (Y_1, 0)) &= g_1(X_1, Y_1) \circ \pi \\ g((0, X_2), (0, Y_2)) &= g_2(X_2, Y_2) \circ \eta \\ g((X_1, 0), (0, Y_2)) &= 0 \end{aligned}$$

La matrice associées à g

$$\begin{pmatrix} (g_1)_{ab} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & (g_2)_{cd} \end{pmatrix}$$

Définition 4.5.1. La variété Riemannienne $(M_1 \times M_2, g)$ est dite variété Riemannienne produit.

4.6 la connexion de levi-civita

Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes. Si ∇^{M_1} (resp ∇^{M_2}) désigne la connexion de Levi-Civita sur M_1 (resp M_2), alors la connexion de levi-civita sur la variété $M_1 \times M_2$ associée à la métrique produit $g = \pi^*g_1 + \eta^*g_2$ coïncide avec la connexion linéaire produit définie

$$\begin{cases} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla_{X_1}^{M_1} Y_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla_{X_2}^{M_2} Y_2) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) = \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) = 0 \end{cases}$$

4.7 Tenseur de courbure Riemannienne

soit $(M_1 \times M_2, g = \pi^*g_1 + \eta^*g_2)$ une variété Riemannienne produit avec son tenseur de courbure R . Si $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM_1)$, et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_2)$, alors

$$\begin{cases} R((X_1, 0), (Y_1, 0))(Z_1, 0) & = (R^1(X_1, Y_1)Z_1, 0) \\ R((0, X_2), (0, Y_2))(0, Z_2) & = (0, R^2(X_2, Y_2)Z_2) \\ R((X_1, 0), (0, Y_2))(Z_1, 0) & = R((X_1, 0), (Y_1, 0))(0, Z_2) \\ & = R((0, X_2), (Y_1, 0))(Z_1, 0) = 0 \\ R((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))(Z_1, Z_2) & = (R^1(X_1, Y_1)Z_1, R^2(X_2, Y_2)Z_2). \end{cases}$$

4.8 Tenseur de Ricci sur la variété produit

soit $(M_1 \times M_2, g = \pi^*g_1 + \eta^*g_2)$ une variété Riemannienne produit avec S son tenseur de Ricci telle que pour tous $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$, et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$, alors

$$\begin{cases} S((X_1, 0), (Y_1, 0)) = S^1(X_1, Y_1) \circ \pi \\ S((0, X_2), (0, Y_2)) = S^2(X_2, Y_2) \circ \eta \\ S((X_1, 0), (0, X_2)) = 0 \end{cases}$$

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E.Aubry, Introduction à la géométrie Riemannienne, 2008
- [2] E.Aubry , Géométrie différentielle. M1Math 2009-2011
- [3] H.Auvray, Géométrie différentielle : sous-variétés de \mathbb{R}^n , variétés
ENS de Cachan, Janvier 2014.
- [4] J.Angst, Éléments de calcul différentiel Université de Rennes 1,
2014-2015
- [5] J.Cresson, Promenade vers la Géométrie Différentielle, *Université
de Franche Comté, Equipe de Mathématiques de Besançon,*
- [6] M.Djaa, Géométrie Différentielle - Sous variété De \mathbb{R}^n *Centre Uni-
versitaire Ahmed Zabana Relizane, 2017*
- [7] M.Djaa, Géométrie Différentielle-I Variétés Différentielles, *Centre
Universitaire Ahmed Zabana Relizane , 2017-2018.*
- [8] M.Djaa, Introduction à la géométrie riemannienne et l'analyse har-
monique sur les variétés, *Geometry Analysis control and Applica-
tions Laboratory Saida University, 2018*
- [9] A.Frabetti, Géométrie différentielle appliquée à la physique Cours
M2 - Lyon 1 - *Institut Camille Jordan, CNRS UMR 5028, Univer-
sité Lyon 1 , 17 décembre 2010*
- [10] B.Gherici, Produit de deux variétés munies de quelques struc-
tures, *universite abou-bekr belkaid - Tlemcen*
- [11] F.Labourie, Géométrie différentielle , *25 septembre 2013*

-
- [12] J.Lafontaine,introduction aux varété différentielles,Presses Universitaires de Grenoble,1996
 - [13] T.Masson ,Géométrie différentielle,groupe et algèbres de Lie,fibrés et connexions,8 mars 2010