الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaireé

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama

Institut des sciences et technologies

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

Etude de la convergence en probabilité des moyennes arithmétiques cas des données i.i.d (Application sur la loi de binomiale)

Présenté par :

LAHCENE Abderahmanne

Soutenu : Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.BELGUERNA Abderrahmane	MCA	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-	Présédent
Dr.LAALA Zineb	MCA	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-	Examinatrice
Dr.DAOUDI Hamza	MCA	Univ Iben Kheldoun -Tiaret -	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Dédicaces

Je tiens c'est avec de grande plaisir que je dédie ce travail :

A ma chère mère,

A mon cher père,

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères, **Ahmed et Nour eddine,**

A mes Sœurs, **Chaimaa et Ibtissam,**

A mes chers amis, **Mohammed , Oussama , Abdelkarim, Belkacem, Boubaker, Hicham , Yacine , Abdelhak et Aziz ,**

Pour ses soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études,

A mon cher ami, **AIDAOUI Amine,**

A mon cher professeur, **Dr.AIDAOUI**

Pour leurs aide et supports dans les moments difficiles

A toute ma famille et mes amis

Sans oublier tous mes enseignants et mes professeurs soit du primaire, du moyen, du secondaire et l'enseignement supérieur....

Remerciement

Avant toute considération, Sobhan **Allah** le tout-puissant qui m'a guidé par sa grandeur et fait en sorte que mes promesses deviennent une réalité par ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mon professeur encadré **Dr. DAOUDI Hamza** pour sa patience, son encouragement et leur orientations scientifiques précises ; Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance.

Mes respects et mes vifs aux Messieurs ; **Dr. BELGUERNA Abderrahmane** et **Dr.LAALA ZINEB**; qui m'ont honorés en acceptant d'être membres de ce jury d'examen de ce travail.

A tous mes enseignants qui m'ont transmis le meilleur de leur savoir, ses conseils et ses Assistances pendant la période de l'étude.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à tous ….

Table des matières

LISTE DES TABLEAUX

TABLE DES FIGURES

NOTATIONS MATHÉMATIQUES

$\mathcal{P}(\Omega)$	L'ensemble des parties de Ω
$x \in X$	x appartient à l'ensemble X.
$X \subset Y$	X inclus dans Y .
$X \supset Y$	X contient Y.
$X \cap Y$	L'intersection de X et Y.
$X \cup Y$	La réunion de X et Y.
$\mathbb{P}(X)$	La probabilité de X.
$\mathbb{E}(X)$	L'espérance de X.
$Var(X)$	La variance de X .
$\sigma(X)$	L'écart type de X .
$\Gamma(\alpha)$	Fonction gamma .
$\mathcal{B}(n)$	Loi de Bernoulli .
$\mathcal{B}(n,p)$	Loi Binomiale.
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	Loi Normale.
$\mathcal{U}(\alpha,\beta)$	Loi Uniforme .
$\varepsilon(\lambda)$	Loi Exponentielle .
$\mathcal{P}(\lambda)$	Loi de Poisson .
$X_n \xrightarrow{L} X$	La convergence en loi .
$X_n \xrightarrow{P.s} X$	La convergence prèsque süre .
$X_n \xrightarrow{r} X$	La convergence en moyenne d'ordre r .
$X_n \xrightarrow{P} X$	La convergence en probabilité .

Résumé

Ce travail s'articule autour d'une des branches les plus importantes des mathématiques, qu'est la probabilité, il s'intéresse spécifiquement au sujet de la convergence.

On a débuté par parler en général de la théorie des probabilités. Ensuite, on a parlé des différents types de convergence des variables aléatoires en mentionner les relations entre eux. On a terminé par une application sur la loi Binomiale avec une démonstration de sa convergence en probabilité.

Mots clés :

Probabilité, Convergence, v.a (variables aléatoires) , Loi de probabilité, Estimation.

Abstract

This work revolves around one of the most important branches of mathematics, which is probability, he is specifically interested in the subject of convergence.

We started by talking in general about the theory of probability. Then we talked about different types of convergence of random variables with mention of relations between them. We ended with an application on the Binomial law by showing its convergence in probability.

Key words :

Probability, Convergence, random variables, Probability distrubtions, Estimation.

ملخص

يتمحور هذا العمل حول أحد أهم فروع الرياضيات، وهو الاحتمالات، ويهتم تحديدا بموضوع التقارب.

في بداية المذكرة تحدثنا بشكل عام عن نظرية الاحتمالات، ثم قمنا بالتطرق للأنواع المختلفة للتقاربات الخاصة بالمتغيرات العشوائية مع ذكر العلاقات الرياضية فيما بينها.

في الختام قمنا بتطبيق قانون التقارب بواسطة الاحتمال على قانون ذي الحدين.

الكلمات المفتاحية :

الاحتمالات، التقارب، المتغيرات العشوائية، توزيع الاحتمال، التقدير.

INTRODUCTION

En mathématiques, l'étude des probabilités (du latin probabilitas) est un sujet qui permet l'étude et l'interprétation des expériences et l'adoption de prédictions futures à partir de celles-ci.
Le mot probabilité a plusieurs sens, par exemple qui représente l'opposé du concept de certitude ; c'est aussi une appréciation du caractère probable d'un événement ; plus récemment, la probabilité est devenue une science mathématique connue sous le nom de "la théorie des probabilités" ou plus simplement "probabilité" .

La convergence est parmi les concepts de base de l'analyse mathématique implique qu'un objet mathématique a une limite. Par exemple on parle de convergence de séquences d'éléments, de convergence de séries, de convergence de produits infinis, de convergence de fractions continues, de convergence d'intégrales, etc...
Le concept de convergence apparaît dans l'étude des objets mathématiques et leurs approximations par des objets plus simples. On peut dire que l'analyse mathématique commence lorsque le concept de convergence est introduit sur un ensemble d'éléments.
En probabilités, la convergence des variables aléatoires se divise en plusieurs types .
Ce travail concentre spécifiquement sur la convergence en probabilités.

Ce travail est présenté essentiellement en quatre chapitres.
On commence d'abord par une partie historique.

Chapitre01 : nous rappelons des concepts de base sur la théorie du calcul des probabilités avec les différentes définitions, propriétés et théorèmes 1.

Chapitre02 : Ce chapitre est particulièrement consacré à l'étude des modes de convergence des variables aléatoires 2.

Chapitre03 : On cite les relations entre les modes de convergence 3.

Chapitre04 : Ce chapitre est consacré à l'étude de la convergence en probabilité avec une application sur la loi Binomiale et une simulation 4 . Et enfin on termine par une conclusion 4.4.1.

HISTORIQUE

• La notion *« probabilité »* remonte **Aristote** (4^{me} siécle avant J-C.).Dans cette époque, ce mot désigne le principe de "ce qui est probable est ce qui est généralement admis comme vrai".

• Au 16^{me} et 17^{me} siècles, Le polymathe italien **Girolamo Cardano** a considéré les probabilités comme un rapport entre les résultats possibles et improbables, mais Les principes de probabilité remontent aux correspondances de **Pierre de Fermat** et de **Blaise Pascal** (1654).
Durant cette période, le terme « risque » est apparu et le concept de probabilité se rapproche alors de la notion de hasard.
Encouragé par **Pascal**, **Christian Huygens** publie "De ratiociniis in ludo aleae" (raisonnements sur les jeux de dés) en 1657. Ce livre est le premier ouvrage important sur les probabilités. Il a définit la notion d'espérance et a développé plusieurs problèmes de partages de gains lors de jeux ou de tirages dans des urnes.
Jacques Bernoulli (1713) qui définit la notion de variable aléatoire et donne la première version de *la loi des grands nombres* et la Théorie de la probabilité d'**Abraham de Moivre** (1718) qui généralise l'usage de la combinatoire.
En 1755, **Thomas Simpson** a appliqué *La Théorie des erreurs* [1] aux erreurs sur les observations.
En 1812, **Pierre-Simon de Laplace** donne une première version du *théorème central limite*.

• La théorie classique des probabilités n'a vraiment pris son envol qu'avec les concepts de mesures et d'ensembles mesurables, introduits par **Émile Borel** en 1897. Ce concept de mesure est complété par Henri Léon Lebesgue et sa théorie de l'intégration.

• En 1902, **Andreï Markov** introduit les chaînes de Markov pour entreprendre une généralisation de la loi des grands nombres.

1. qui cherche à quantifier l'écart entre la mesure que l'on fait d'une variable et sa vraie valeur et qui est une préfiguration des théorèmes central limite

Il faudra attendre 1933 pour que la théorie des probabilités sorte d'un ensemble de méthodes et d'exemples divers et devienne une véritable théorie, axiomatisée par **Kolmogorov**.
les années 1940, **Kiyoshi Itô** met en place une théorie et un lemme qui porte son nom. Ceux-ci permettent de relier le calcul stochastique et les équations aux dérivées partielles faisant ainsi le lien entre analyses et probabilités.

Un peu d'histoire (extraits de wikipédia)
$https : //public.iutenligne.net/mathematiques/statistiques - et - probabilites/farge/probabilites/$un peu d'histoire extraits de wikipdia.html

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

L'étude des probabilités est une étude relativement récente, bien que l'origine du mot remonte aux anciens Grecs, mais les développements radicaux dans ce domaine ne se sont manifestés qu'au cours du XVIIIe siècle, à la suite de l'étude des aspects aléatoires et inattendus de certains phénomènes, notamment les jeux de hasard. L'étude des probabilités a contribué à laisser un impact prépondérant dans de nombreux domaines comme la météorologie, la finance, la chimie et autres...

1.1 Espace probabilisable

Définition 1.1.1
On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard lors qu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.

Exemples : 1.1.1

1. *Jeter une pièce de monnaie et noter le côté qui apparaît .*
2. *On lance un dé et observe le total.*
3. *Etudier La durée de vie d'une ampoule électrique.*

Définition 1.1.2
Dans la théorie des probabilités, un espace de probabilité ou le triplet de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une construction mathématique qui fournit un modèle formel d'un processus aléatoire ou "expérience".*
Un espace de probabilité est composé de trois éléments ;
► *un ensemble* Ω *appelé univers, qui présente l'ensemble de tous les résultats possibles.*
► $\mathcal{F}$ *une partie de l'ensemble des parties* Ω *, appelé tribu.*
► $\mathbb{P}$ *une application de* $\mathcal{F}$ *dans [0,1].*

1.1.1 Algèbre-Tribu

Définition 1.1.3

$\mathcal{F}$ est une tribu (ou une σ-algèbre) sur Ω si elle vérifie les propositions suivantes :

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $\forall M \in \mathcal{F}$, *alors le complémentaire* $\overline{M} \in \mathcal{F}$

c) Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{F}$, *alors* $\bigcup\limits_{0}^{\infty} M_n \in \mathcal{F}$

Exemples : 1.1.2

► $\{\emptyset, \Omega\}$ *est une tribu ;*

► *L'ensemble des parties* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est une tribu.*

► *Posons* $\Omega = \{a, b, c\}$ *et* $M = \{\emptyset, \Omega, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}\}$*,alors M n'est pas une* σ *algèbre sur* Ω *puisque* $\overline{\{a, c\}} = \{b\} \notin M$

Proposition 1.1.1

Soit $\mathcal{F}$ *une tribu. Alors :*

— $\emptyset \in \mathcal{F}$.

— *Toute réunion finie ou dénombrable d'éléments de* $\mathcal{F}$ *est un élément de* $\mathcal{F}$

— *Toute intersection finie ou dénombrable d'éléments de* $\mathcal{F}$ *est un élément de* $\mathcal{F}$

Définition 1.1.4

Un ensemble est dit dénombrable, ou infini dénombrable, lorsque ses éléments peuvent être listés sans omission ni répétition dans une suite indexée par les entiers.

Définition 1.1.5

Soit Ω *l'espace d'échantillonnage et* $\mathcal{F}$ *la tribu sur* Ω. *le couple* $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ *est appelé espace probabilisable.*

1.2 Espace de probabilité

Définition 1.2.1
Soit l'espace probabilisable $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ et $A, B, A_1, A_2, ...A_n$ des éléments de $\mathcal{F}$

a) On dit que A et B sont incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

b) On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ sont deux à deux incompatibles si pour tout

$$1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap A_j = \emptyset$$

.

c) On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ forment une partition de ω ,s'ils sont deux à deux incompatibles et si

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega.$$

1.2.1 Probabilités

Dans cette partie, soit $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable
Définition 1.2.2
On appelle probabilité sur $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans [0,1] que vérifiant :

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles ;

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

.

Définition 1.2.3
La probabilité d'un évènement A est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Proposition 1.2.1

— $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*; l'évènement impossible.*

— $\forall A \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

— *Pour tout* $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

— *Pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

— *Pour tout* $A, B \in \mathcal{P}$ *, si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset$ *alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

— *Pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exemples : 1.2.1

- *La probabilité pour que l'enfant à naître soit garçon est de 1/2.*
- *On lance un dé :*
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *, A :"avoir un nombre pair"=* $\{2, 4, 6\}$ *;*
  $$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{N} = \frac{3}{6}$$
  .
- *on lance un dé :*
  A : "avoir un chiffre impair" , B : "avoir un chiffre supérieur ou égale à 2".
  On a $A = \{1, 3, 5\}$ *et* $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ *, d'où* $A \cap B = \{3, 5\}$*, ainsi* $\mathbb{P}(A) = 1/2$ *,* $\mathbb{P}(B) = 5/6$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/6$*, alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$*.*

Remarques 1.2.1

- *Un événement A est dit* ***négligeable****(ou* ***presque impossible****) si* $\mathbb{P}(A) = 0$*.*
- *Un événement A est dit* ***presque sûr*** *si* $\mathbb{P}(A) = 1$*.*
- *Toute réunion dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.*
- *Toute intersection dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.*

1.2.2 Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A et $B \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2.4

A et B sont dits des évènements ***indépendants*** *si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

.

Définition 1.2.5

A et B sont dits des évènements ***indépendants*** *avec* $\mathbb{P}(B) > 0$*, si :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$$

Remarques 1.2.2

- *A et B sont dits des évènements* ***incompatibles****, s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps ,c'est-à-dire* $\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset$*.*
- *Un évènement A* ***implique*** *(ou* ***entraîne****) un événement B, lorsque A est inclus dans B(*$A \subset B$*), c'est-à-dire si A se réalise alors B se réalise également.*

Exemples : 1.2.2

— *On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.*
Soit A l'évènement :"on tire un roi " et B l'évènement :"on tire un trèfle ".
On a :
$\mathbb{P}(A) = 4/32 = 1/8$ *(il y'a 4 roi dans le jeu de 32 cartes)*
$\mathbb{P}(B) = 8/32 = 1/4$ *(il y'a 8 trèfle dans le jeu 32 cartes).*
$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/32$ *(il y'a 1 roi de trèfle dans le jeu de 32 cartes)*
alors : $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = \mathbb{P}(A \cap B)$
donc A et B sont indépendants.

— *On considère un dé, les évènements d'avoir un chiffre "pair" et d'avoir le chiffre "impair" sont incompatibles.*

— *Soit un groupe des enfants de 6 ans, on choisit un enfant de ce groupe pour la vaccination, on prend G l'évènement "l'enfant sélectionné est un garçon" et A l'évènement "l'enfant sélectionné a 6 ans ".*
Alors G entraîne A (la réalisation de G implique la réalisation de A).

Définition 1.2.6
Soient $A_1, A_2, ...A_n$ *des évènements d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *tels que* $n > 2$. *On dit que* $A_1, A_2, ...A_n$ *sont indépendants si :*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

1.2.3 Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 1.2.7
Soient A et B deux événements de Ω *tels que* $\mathbb{P}(B) > 0$. *On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition 1.2.2
Soient $A, BetC \in \mathcal{F}$

1. $\mathbb{P}(\Omega/A) = 1$
2. $\mathbb{P}(B \cup C/A) = \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(C/A) - \mathbb{P}(B \cap C/A)$
3. *Si B et C sont incompatibles , alors* $\mathbb{P}(B \cup C/A) = \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(C/A)$
4. $\mathbb{P}(\overline{B}/A) = 1 - \mathbb{P}(B/A)$

Exemple : 1.2.1
Pour un étudiant,les chances de réussir un cours de Statistique sont de 65% , les chances de réussir un cours de Finance sont de 80% et les chances de réussir les deux sont 50 %. Soit S l'événement "réussir en Statistiques" et F l'événement "réussir en Finance". Quelle est la probabilité que l'étudiant réussisse en Statistiques sachant qu'il a réussi le cours de Finance ?
Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(S/F)$ *:*

$$\mathbb{P}(S/F) = \frac{\mathbb{P}(S \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.63$$

Remarques 1.2.3
Soient $A et B \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(A) > 0$ *D'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)$$

De même :

$$\mathbb{P}(C/A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C/A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B)$$

Alors on obtient :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(C/A \cap B)$$

Théorème 1.2.1 (Formule des probabilités totales)
Soit $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ *un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle , et B un événement .*
on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B/A_n)$$

1.2.4 Formule de Bayes

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable Soient $A_1, A_2, ...A_n$ une partition de $\Omega, B \in \mathcal{F}$ et supposons que $\mathbb{P}(B) > 0$
et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n.$
Soit $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}(B \cap A_k) = \mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k/B)\mathbb{P}(B)$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B)}$$

En faisant appel à la formule des probabilités totales dans cette dernière égalité, on obtient :

Théorème 1.2.2 (Formule de Bayes)
Soient $A_1, A_2, ...A_n$ un systeme complet de $\Omega, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$ et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
Alors :

$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B/A_k)}$$

Remarque 1.2.1
La formule de Bayes est appelée aussi la formule des causes, en effet la quantité $\mathbb{P}(A_k/B)$ donne la probabilité que l'évènement B s'est réalisé à travers A_k ou "à cause" A_k.

1.3 Variables aléatoires

En théorie de probabilités , le résultat d'une épreuve peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation est celle de **variable aléatoire** (notée également **v.a**.)

Définition 1.3.1
En générale,une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée après un tirage aléatoire.
On peut aussi considérer une variable aléatoire sur un espace probabilisé $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ *, toute application X de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$X : (\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\omega \to X(\omega)$$

Remarques 1.3.1

— *Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X , Y,...etc.*

— *Le support d'une variable aléatoire est l'ensemble des ses valeurs possibles*
Par exemple :
X est le résultat d'un lancer de dé,alors le support de X est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.3.1 Loi de probabilité

Définition 1.3.2
Soient l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *et X une v.a . On appelle* ***loi de probabilité*** *de X l'application :*

$$\mathbb{P}_X : X(\Omega) \to [0, 1] x \to \mathbb{P}_X = \mathbb{P}(\{X = x\})$$

Remarque 1.3.1
On note $\mathbb{P}(\{X = x\}), \mathbb{P}(X = x)$ *ou* $\mathbb{P}_X(x)$ *la probabilité que* X *prenne la valeur* x. *Cette application est bien une probabilité dont l'univers est l'ensemble* $X(\Omega)$ *des valeurs prises par* X.

Exemple : 1.3.1
Dans le jeu suivant on lance un dé à six faces.
Si :

- *Si le résultat est pair, on gagne 20.DA.*
- *Si le résultat est 1, on gagne 30.DA.*
- *Si le résultat est 3 ou 5, on perd 40.DA.*

On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on définit X une v.a sur Ω tq :
$X(1) = 30,\ X(2) = 20,\ X(3) = -40,\ X(4) = 20,\ X(5) = -40$ et $X(6) = 20$.
On sait que La probabilité d'avoir chaqu'un des élément de l'univers Ω égal à $\frac{1}{6}$.
On peut résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau suivant :

x_i	-40	20	30
$\mathbf{P}(X = x_i)$	1/3	1/2	1/6

TABLE 1.1 – La loi de probabilité de la variable aléatoire X

Remarque 1.3.2
Soit la loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$.
On la note p_i.
$\forall i \in 1....n$, $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

1.3.2 Fonction de répartition

Définition 1.3.3
En générale, on définit une loi de probabilité de la v.a X par sa fonction de répartition, on note :

$$\mathrm{F} : \mathbb{R} \to [0, 1] x \to \mathrm{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Parfois également appelée fonction cumulative car on cumule les probabilités de toutes les valeurs inférieures ou égales à x.

Proposition 1.3.1

1. $0 \leq \mathrm{F}_X \leq 1$.
2. $\underset{x \to -\infty}{\mathrm{F}_X(x)} = 0$ *et* $\underset{x \to +\infty}{\mathrm{F}_X(x)} = 1$.
3. F_X *est une fonction croissante.*
4. F_X *est continue à droite.*
5. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{F}_X(b) - \mathrm{F}_X(a), \qquad \forall a \leq b.$

1.4 Variables aléatoires discrètes

On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.4.1
On appelle variable aléatoire discrète une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et pour tout $x \in \mathbb{R}, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$.

Remarque 1.4.1
On peut également définir la variable aléatoire discrète comme une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs ponctuelles (isolées).

Exemple : 1.4.1
Lancer de 3 pièces de monnaies identiques dont l'issue est P "pile" et F "face".
Les résultats possibles sont : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$
Car les résultats ne sont pas composés de grandeur numériques on peut par exemple s'intéresser au nombre de fois où pile est apparu.
$X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}$; *définie par le tableau :*

X=le nombre de pile	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8
F_X	1/8	1/2	7/8	1

TABLE 1.2 – Distribution d'une variable aléatoire discrète(X= nombre de "Pile")

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise ***un diagramme en bâtons*** *pour visualiser la distribution de probabilités et* ***une fonction escalier pour la fonction de répartition****.*

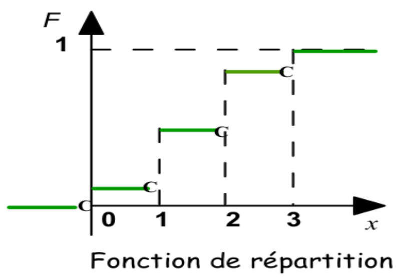

FIGURE 1.1 – Variable aléatoire discrète

Cette application ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire X est discrète avec $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

1.5 Variables aléatoires continues

On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.5.1
Soit X une v.a réelle qui prend un nombre infini non dénombrable de valeurs, alors on dit que X est une v.a.r. continue. Dans ce cas, la loi de X est déterminée par l'ensemble des probabilités : $\mathbb{P}(a < X < b)$, *pour tout* $a < b$.

Remarque 1.5.1
Autrement dit, La variable aléatoire X est dite continue si l'ensemble $X(\Omega)$ *est un intervalle (borné ou non borné) ou une réunion d'intervalles de* $\mathbb{R}$

Exemples : 1.5.1
- *Le poids et la taille pour un groupe des enfants.*
- *Taux de glucose dans le sang.*
- *La durée de vie d'une appareille électronique.*

etc...

1.5.1 Fonction de densité

Définition 1.5.2
Une variable aléatoire X possède une densité s'il existe une fonction positive $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *telle que :*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \qquad \textit{pour tous } a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

Cette fonction f_X *est appelée densité de* X.

Proposition 1.5.1
La donnée d'une densité f permet donc de décrire complétement notre variable aléatoire en caractérisant sa loi grâce aux propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq 0.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
3. $\mathbb{P}(a \leq x \leq b) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)dx$

Remarque 1.5.2
Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la relation entre la fonction de répartition F_X *et et la fonction de densité est la suivante :*

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}_X(y) = \mathbb{P}(X < y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx$$

Exemple : 1.5.1
Soit l'étude de l'évolution d'un phénomène dans le temps, sa fonction de densité est donnée par : $f(t) = 2\exp(-t) - 2\exp(-2t)$
Donc da fonction de répartition est : $\mathrm{F}_X(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.
la représentation graphique est la suivante :

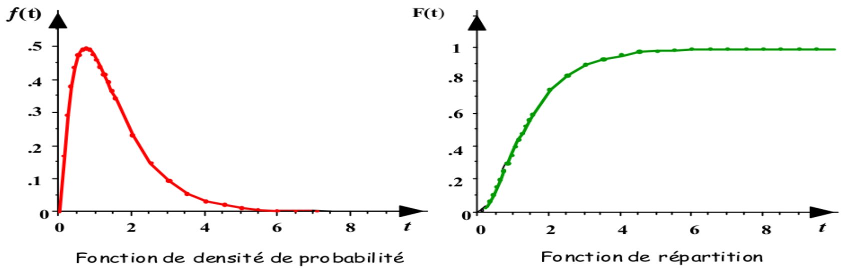

FIGURE 1.2 – Variable aléatoire continue

1.6 Caractéristiques des variables aléatoires

Soient l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et X est une variable aléatoire.

1.6.1 Espérance mathématique

Définition 1.6.1
L'espérance d'une variable aléatoire, notée $\mathbb{E}(X)$, est la moyenne espérée lors d'une réalisation de la variable aléatoire X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs.

L'espérance est définie comme suit :

a) Si X est une variable aléatoire **discrète** :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple : 1.6.1
On prend un dé truqué,telle que la probabilité d'obtenir un face est proportionnelle à le numéro de ce face. Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
Solution :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *et par les notions de l'exercice* $\mathbf{P}(X = k) = k\alpha$.
$\sum_{k=1}^{6} (X = k) = 1 \Leftrightarrow \alpha + 2\alpha + ... + 6\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1/21.$
D'où :
donc :$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = 13/3$

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X=k)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

TABLE 1.3 – La loi X de l'exercice1.6.1

b) Si X est une variable aléatoire **continue** :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

où f est la fonction de densité.

Exemple : 1.6.2

Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x^{1/3} & si 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Quelle est l'espérance de X ?

Solution :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x\frac{3}{5}x^{1/3}dx = \frac{9}{35}$$

Proposition 1.6.1

Soit X et Y deux variables aléatoires et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\mathbb{E}(\alpha) = \alpha$
2. $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\mathbb{E}(X)$
3. $\mathbb{E}(X+\alpha) = \mathbb{E}(X) + \alpha$
4. $\mathbb{E}(\alpha X + \beta X) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(x)$
5. $\mathbb{P}(X > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X) \quad , \ \forall \alpha > 0$ ***(Inégalité de Markov)***.

1.6.2 Variance mathématique

Définition 1.6.2

La variance d'une variable aléatoire est définie par :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Proposition 1.6.2

Soit X un variables aléatoires et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

1. $V(\alpha) = 0$.
2. $V(X+\alpha) = V(X)$.
3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$.
4. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^2}V(X) \quad , \ \forall \alpha > 0$ ***(Inégalité Bienaymé-Tchebychev)***.

1.6.3 Ecart-type

Définition 1.6.3
L'écart-type d'une variable aléatoire est définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

1.7 Lois usuelles de probabilité

Voici certaines lois de probabilité que nous utilisons souvent :

1.7.1 Loi discrètes

Loi	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Bernoulli $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X=1)=p, \mathbb{P}(X=0)=q$ $q=1-p$	p	pq
Binomiale $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$	$\mathbb{P}(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$ $q=1-p, x=0,1,...n$	np	npq
Poison $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ x=0,1,....	λ	λ
Géométrique $X \rightsquigarrow \mathcal{G} \rightsquigarrow (p)$	$\mathbb{P}(X=x)=pq^{x-1}$ q=1-p,x=1,2,...	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

TABLE 1.4 – Loi usuelles discrètes

1.7.2 Lois continues

Loi	Densité $f_X(x)$	Espérance	Variance
Uniforme $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$ $x \in [a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{2}$
Exponentielle $X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda)$	$\lambda e^{-x\lambda}$ $x \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2
Gamma $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha,\lambda)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$ $x \in \mathbb{R}^{*+}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Student $X \rightsquigarrow \tau(n)$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$	$0 sin > 1$	$\frac{n}{n-2} sin > 2$

TABLE 1.5 – Lois usuelles continues

Remarque 1.7.1

La fonction Gamma est de la forme :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

CHAPITRE 2

LES MODES DE CONVERGENCE DES VARIABLES ALÉATOIRES

En mathématiques, la notion de convergence est la propriété de s'approcher d'une limite de plus en plus près à mesure qu'un variable de la fonction augmente ou diminue ou que le nombre de termes devient plus grand.

En probabilité, la convergence de variables aléatoires est de chercher d'un variable aléatoires X tq la suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires se rapproche de plus en plus de X lorsque n augmente.

2.1 La convergence en loi

Définition 2.1.1
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles.
F_{X_n} et F_X désignent respectivement la fonction de répartition de X_n et d'une variable aléatoire X.
On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X si F_{X_n} converge vers F_X en tout point x où F_X est continue. $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$.
On note la convergence en loi : $X_n \xrightarrow{L} X$.

Remarque 2.1.1
On peut noter que, pour cette convergence, les variables aléatoires ne sont pas nécessairement définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Proposition 2.1.1
Soient X_n une suite des variables aléatoires de fonction de caractéristique φ_n, les propriétés suivants sont équivalentes :

1. *X_n converge en loi vers X.*
2. *φ_n converge uniformément vers φ_X.*
3. *Soit f une fonction continue bornée tq $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)).$$

Exemple : 2.1.1
Soit X_n une suite de variable aléatoire de la loi $\mathbf{B}(n, \lambda/n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x) &= C_n^x(\frac{\lambda}{n})^x(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}(\frac{\lambda}{n})^x(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)(n-x)!}{x!(n-x)!}(\frac{\lambda}{n})^x(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!}(\frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^x})\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^x} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{x+1}{n})\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^x}
\end{aligned}$$

On a donc :
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$
D'où :
$\mathrm{F}_{X_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X \le x)$
Alors : $X_n \xrightarrow{L} X$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

2.2 Convergence presque sûre

Définition 2.2.1
Soient X_n et X des variables aléatoires .
On dit que X_n converge presque sûrement vers X si :

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$$

On note $X_n \xrightarrow{P.s} X$

Propriété 2.2.1 (lemme de Borel-Cantelli)

— $\forall\epsilon > 0; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$ *converge* $\longrightarrow (X_n \xrightarrow{P.s} X)$.

— *En plus : si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes , alors $X_n \xrightarrow{P.s} 0$.*

Exemple : 2.2.1
Soit X une variable aléatoire d'une loi $\mathcal{U}(0,1)$ *tq :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 \leq X(\omega) \leq 1/n \\ 0, & \text{si } 1/n \leq X(\omega) \end{cases}$$

On a si $1/n \leq X(\omega)$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0$
Donc $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0) = \mathbb{P}(X > 0) = 1$ *, c'est à dire* $Y_n \xrightarrow{P.s} 0.$

2.3 Convergence en moyenne

Définition 2.3.1
Soient X *une variable aléatoire et* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires.*
X_n *converge en moyenne vers* X *si :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$$

On note $X_n \longrightarrow X$ *en moyenne.*

Définition 2.3.2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires de carré intégrable .*
On dit que X_n *converge en moyenne d'ordre 2 vers une variable aléatoire* X*(moyenne quadratique) si :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^2) = 0$$

On note $X_n \longrightarrow X$ en moyenne quadratique.

Définition 2.3.3
Soient X *une variable aléatoire et* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires.*
On dit que X_n *converge vers* X *en moyenne d'ordre* r *ou en norme* L^r *si :*

$$\mathbb{E}(|X_n|^r) < \infty \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) = 0$$

Remarque 2.3.1
La convergence en moyenne d'ordre r *nous dit que l'espérance de la puissance* r^{me} *de la différence entre* X_n *et* X *converge vers zéro.*

Exemple : 2.3.1
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires tq :*

$$\mathbb{E}(X_n) = \begin{cases} 1 - e^{-n}, & \text{si } X_n = 0 \\ e^{-n}, & \text{si } X_n = 1. \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - 0|) = \mathbb{E}(X_n) = e^{-n} \longrightarrow 0$
Donc X_n *converge en moyenne vers 0.*

Remarque 2.3.2

- *L'intégrabilité des variables considérées est une condition nécessaire pour appliquer la notion de convergence en moyenne.*
- *Lorsqu'une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers une variable aléatoire X , alors X est aussi intégrable.*

2.4 Convergence en probabilité

Définition 2.4.1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité .
On dit que X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X , si :

$$\forall \varepsilon > 0, n \to \infty, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$$

On note : $X_n \xrightarrow{P} X$.

Théorème 2.4.1 (de convergence en probabilité)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et α un nombre réel, si :
$\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \alpha$ *et* $Var(X_n) \longrightarrow 0$, *quand* $n \to \infty$,
alors : $X_n \xrightarrow{P} \alpha$.

Remarque 2.4.1

Ce théorème est utilisé en théorie de l'estimation .

Proposition 2.4.1

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X_n \xrightarrow{P} X'$, alors $X = X' ps$ (unicité ps de la limite en probabilité).

Démonstration 1

Pour tout $\varepsilon > 0$, on :

$$\mathbb{P}(|X - X^{'}| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|X_n - X^{'}| > \varepsilon/2)$$

et on déduit de $X_n \xrightarrow{P} X$ *et* $X_n \xrightarrow{P} X'$ *que* $\forall \varepsilon > 0$ *:*

$$\mathbb{P}(|X - X^{'}| > \varepsilon) = 0$$

Proposition 2.4.2
On a pour $n \to \infty$, $X_n \xrightarrow{P} X$ *si et seulement si* $\hat{d}_{\mathbb{P}}(X_n, X) \to 0$.

Démonstration 2
Par l 'inégalité de Markov , on a pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(min(|X_n - X|, 1) \geq \varepsilon) \leq \frac{\hat{d}p(X_n, X)}{\varepsilon}$$

on a :
$\hat{d}p(X_n, X) = \mathbb{E}[min(|X_n - X|, 1)]$
$= \mathbb{E}[min(|X_n - X|, 1)\boldsymbol{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}] + \mathbb{E}[min(|X_n - X|, 1)\boldsymbol{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}]$
$= \varepsilon + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$
$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ *quand* $X_n \xrightarrow{P} X$, *on a donc*

$$lim_{n\to\infty}\hat{d}p(X_n, X) = 0$$

.

Théorème 2.4.2
Soit $X_n \xrightarrow{P} \alpha.$ *, si* f *une fonction continue au point* α
alors : $f(X)$ *converge en probabilité vers* α

Théorème 2.4.3 (L'inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire positive admettant un espérance.

$$\forall \alpha \geq 0 \ \ , \ \ \mathbb{P}(X > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X)$$

preuve 2.4.1
$\forall \epsilon \geq 0$

— ***Cas v.a discrète***

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{k > \alpha} k\mathbb{P}(X = k)$$
$$\geq \alpha \sum_{k \geq \alpha} \mathbb{P}(X = k) = \alpha[\mathbb{P}(\alpha) + \mathbb{P}(\alpha + 1) + \mathbb{P}(\alpha + 2) + ...]$$

Donc

$$\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X) \geq \mathbf{P}(X > \alpha)$$

— ***Cas v.a continue***

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

on sait que X est positive alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \textstyle\int_0^\alpha xf(x)dx + \int_\alpha^{+\infty} xf(x)dx &\geq \textstyle\int_\alpha^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \alpha \textstyle\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = \alpha\mathbb{P}(X > \alpha)\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{P}(X > \alpha)$$

Théorème 2.4.4 (L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une variable aléatoire, $\forall\alpha \geq 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^2}Var(X)$$

preuve 2.4.2
D'aprés l'inégalité de Markov :

$$\forall\alpha \geq 0 \ , \ \mathbb{P}(X > \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$

On pose

$$Y = [X - \mathbb{E}(X)]^2$$

D'où

$$\forall\alpha \geq 0, \ \mathbb{P}(Y \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha}$$

Alors

$$\forall\alpha \geq 0, \ \mathbb{P}([X - \mathbb{E}(X)]^2 \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)}{\alpha}$$

On sait que

$$Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$$

Alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \sqrt{\alpha}) \leq \frac{Var(X)}{\alpha}$$

Donc

$$\forall\alpha \geq 0 \ , \ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^2}Var(X)$$

2.4.1 Comment on peut montrer une convergence en probabilité ?

On peut montrer une convergence en probabilité par une des méthodes suivantes :

1. Vérifié si est une conséquence de la loi des grands nombres
2. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
   Si $\mathbb{E}(X_n)$ existe et constante (égale à m) , et si $V(X_n)$ existe et tend vers 0 . Alors on montre que $\overline{X_n} \xrightarrow{P} m$
3. Essayer de montrer par l'inégalité de Markov :
   Si $\mathbb{E}(X_n)$ existe et converge vers $m \in \mathbb{R}$. Alors on montre que $\overline{X_n} \xrightarrow{P} m$
4. On calcule $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ puis sa limite.

CHAPITRE 3

LA RELATION ENTRE LA CONVERGENCE EN PROBABILITÉ ET LES AUTRES MODES DE CONVERGENCE

3.1 La convergence presque sûre et la convergence en probabilité

Proposition 3.1.1

Si$(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *converge presque sûrement vers* X *implique que* $(X_n)_n$ *converge en probabilité vers* X

preuve 3.1.1

On a $\quad \forall n \in \mathbb{N};\ X_n \xrightarrow{P.s} X \Rightarrow \mathbb{P}\{\omega \in \Omega,\ \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$

Soit $\varepsilon > 0$ *tq* $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$ *alors* $\mathbf{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) < 1$

$\forall \alpha > 0$ *tq* $\mathbf{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) > 1 - \alpha$

Donc $\quad lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0$

Alors $\quad X_n \xrightarrow{P} X$

Remarque 3.1.1

La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre.

Démonstration 3 (contre-exemple)

Soit $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(1/n)$

On a $0 < \varepsilon < 1$ *alors* $\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|X_n| = 1) = 1/n$

Donc $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|X_n|) = 0 \Rightarrow X_n$ *converge en probabilité vers 0.*

D'autre part $\forall\varepsilon > 0,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{\infty}(\frac{1}{n}) = +\infty$

Donc X_n *ne converge pas presque sûrement vers 0 .*

3.2 La convergence en moyenne et la convergence en probabilité

Proposition 3.2.1

Soit $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *qui converge en moyenne d'ordre* r *vers* X *alors* $(X_n)_n$ *converge en probabilité vers* X

preuve 3.2.1

$X_n \longrightarrow X$ *en moyenne d'ordre* r

Par l'inégalité de Markov, on a :

$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^r}\mathbb{E}(|X_n - X|^r)$

Alors $lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|X_n - X|^r) = 0$

Donc $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

Remarque 3.2.1

La convergence en probabilité n'implique pas la convergence en moyenne d'ordre r

3.3 La convergence en loi et la convergence en probabilité

Proposition 3.3.1

Soit $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *qui converge en probabilité* p *vers* X *alors* $(X_n)_n$ *converge en loi vers* X

preuve 3.3.1

On a $X_n \xrightarrow{P} X$

On prend f *une fonction continue bornée*

Alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X) \Rightarrow lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) = 0$

Par l'inégalité de Markov , on a :

$\mathbf{P}(|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(|f(X_n) - f(X)|)$

$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|f(X_n|) - f(X)|) = 0 \Rightarrow lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|f(X_n) = \mathbb{E}(f(X))$

Donc $X_n \xrightarrow{L} X$

Remarque 3.3.1

La réciproque de cette proposition est fausse.

Démonstration 4 (contre-exemple)

On considère X une variables aléatoires de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires tq $X_n = 1 - X$

Alors $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/2$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = 1/2$ *et* $\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/2$ *Donc* $X_n \longrightarrow \mathcal{B}(1/2) \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

Par contre $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \neq 0 \Rightarrow X_n \overset{P}{\nrightarrow} X.$

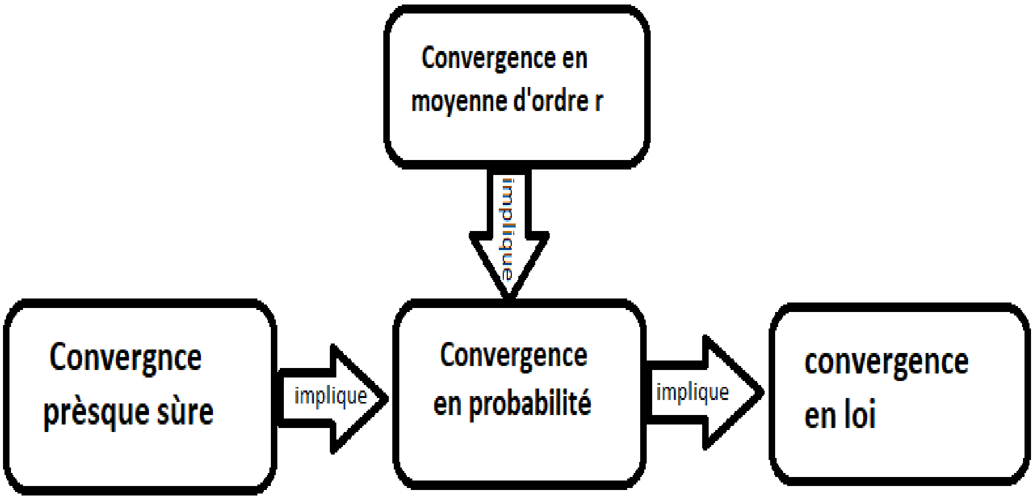

FIGURE 3.1 – Les relations entre les modes de convergence

CHAPITRE 4

APPLICATION SUR LA LOI BINOMIALE

4.1 Loi faible des grands nombres(LGN)

Théorème 4.1.1
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes , tq : tous les variables ont la même espérance m et la même variance σ^2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

. *Alors* $\overline{X_n} \xrightarrow{P} m$

preuve 4.1.1
Posons

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Alors on :

$$\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X_k)$$

Et :

$$Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \frac{1}{n}Var(X_k) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

De l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$\forall \alpha \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})| > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^2}Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n\alpha^2}$$

On observe que

$$\lim n \to \infty \frac{\sigma^2}{n\alpha^2} = 0$$

Alors

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})| > \alpha) \to 0$$

Donc

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(\overline{X_n})$$

Théorème 4.1.2 (La loi des grands nombres des fréquences)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p .
Alors on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{P.s} p$$

4.2 La loi binomiale

Définition 4.2.1
La loi binomiale (Décrite pour la première fois par Isaac Newton en 1676 et démontrée pour la première fois par le mathématicien suisse Jacob Bernoulli en 1713),de paramètres n et p , est une loi de probabilité du nombre de succés lors de n essais indépendants d'une même expérience.
On la note : $\mathbf{X} \approx \mathcal{B}(n, p)$
Cette loi est donnée par l'expression :

$$\mathbb{P}(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad \text{tq : } q = 1 - p$$

Remarque 4.2.1
La loi Binomiale s'applique sur une variable de Bernoulli sur laquelle on réalise n épreuves.
La loi de Bernoulli est utilisée lorsque la variable observée ne peut prendre que 2 résultats possibles .
Exemple : 4.2.1
On lance pièce de monnaie 4 fois de suites .
$\mathbb{P}(X = pile) = \mathbb{P}(X = face) = 1/2.$
La loi Binomiale correspondante est :

$$X \approx B(n, p) \approx B(4, 1/2)$$

Le 'succès' de cette expérience est d'obtenir 'face' à une épreuve, donc nous avons 5 cas possibles :

$\mathbb{P}(X=0)$	nous avons aucun 'face'
$\mathbb{P}(X=1)$	nous avons 1 'face'
$\mathbb{P}(X=2)$	nous avons 2 'face'
$\mathbb{P}(X=3)$	nous avons 3 'face'
$\mathbb{P}(X=4)$	nous avons 4 'face'

TABLE 4.1 – Les cas possibles de l'exemple4.2.1

pour X=3 nous avons :

$$\mathbb{P}(X = 3\text{"}face\text{"}) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!}(1/2)^3(1/2)^1 = 1/32$$

.

4.2.1 Les paramètres caractéristiques de loi binomiale :

L'espérance

$$\mathbf{E}(X) = np$$

La variance

$$Var(X) = np(1-p)$$

Démonstration 5

Soit $(X_1, X_2....., X_n)$ une échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p , on sait que :

$$\mathbb{E}(X_i) = p \ \ et \ \ Var(X_i) = p(1-p)$$

. La variable aléatoire $S = X_1 + X_2..... + X_n$ suit la loi Binomiale de paramètres n et p. Donc, on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1 + X_2..... + X_n)$$

$$Var(S_n) = Var(X_1 + X_2..... + X_n)$$

Soit $(X_1, X_2....., X_n)$ une échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant même loi .
Alors :

$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + ... + \mathbb{E}(X_n)$
$\qquad = p + p + ...p = np$
$Var(S_n) = Var(X) + Var(X) + ... + Var(X_n)$
$\qquad = p(1-p) + p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$

4.3 La convergence en probabilité

Application 1 (La convergence en probabilité de la loi Binomiale)
Soit $(X_1, X_2....., X_n)$ *une échantillon de taille* n *de la loi de Bernoulli de paramètre* p $(\{X_n\}_{n\geq 1} \approx \mathcal{B}(p))$*.....Alors* $\mathbb{E}(X_k) = p \ \ et \ \ Var(X_k) = p(1-p) \quad tq \ \ k = \{1, 2, ...n\}$

On pose S_n *une suite des variables aléatoires suivent la loi Binomiale de paramètres* n *et* p
$(\{S_n\} \approx \mathcal{B}(n,p)))$ *tq* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
Alors

$$\mathbb{E}(S_n) = np \ \ et \ \ Var(S_n) = np(1-p)$$

On sait que

$$\overline{S_n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_n}{n}$$

d'où

$$\mathbb{E}(\overline{S_n}) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = p$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev , On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\overline{S_n} - \mathbb{E}(\overline{S_n})| \geq \alpha) &= \mathbf{P}(|\overline{S_n} - p| \geq \alpha) = \mathbf{P}(|S_n - np| \geq n\alpha) \\ &= \mathbf{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq n\alpha) \leq \tfrac{1}{n^2\alpha^2}V(S_n)\end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{n^2\alpha^2}V(S_n) = \frac{np(1-p)}{n^2\alpha^2} = \frac{p(1-p)}{n\alpha^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$S_n \xrightarrow{P} np = \mathbb{E}(S_n)$$

. Alors S_n *converge en probabilité vers* $\mathbb{E}(S_n)$

4.4 Simulation

4.4.1 La convergence des v.a sous logiciel R

Remarques 4.4.1

- *Pour appliquer la notion de la convergence des variables aléatoires en logiciel* **R** *et la vérifier , il est nécessaire d'avoir le package "* ***convergenceconcepts*** *"*
- *La commande "* ***check.convergence*** *" nous permet d'étudier les modes de convergence sur des données simulées : en probabilité, presque sûrement, en r-ième moyenne et en loi.*
- *Pour maipuler la loi Binomiale , on utilise les fonctions suivants :*

dbinom(x,size,probabilité)	*Calculer les coefficients de la loi aux valeurs dans x*
pbinom(p,size,probabilité)	*Calculer la fonction de répartition aux valeur dans p*
qbinom(q,size,probabilité)	*Calculer les quantiles de la loi dont les ordres dans q*
rbinom(n,size,probabilité)	*Simuler un n échantillon de v.a*

Pour vérifier la convergence des variables aléatoires avec le logiciel **R**, on utilise le code suivant :

```
check.convergence(nmax,M,genXn,mode)
```

La signification des commandes utilisées :

nmax	nombre de points dans chaque échantillonnage
M	nombre d'échantillons à générer
genXn	fonction qui génère les valeurs $Xn - X$ ou Xn dans le cas de la convergence en loi
mode	une chaîne de caractères précisant le mode de convergence à étudier : "p", "as", "r" ou "L".

TABLE 4.2 – Les commandes de la convergence avec logiciel **R**

Remarque 4.4.1

les modes de convergence à étudier :

- *"p"* *la convergence en probabilité .*
- *"as"* *la convergence presque sûre .*
- *"r"* *la convergence en moyenne d'ordre r.*
- *"L"* *la convergence en loi .*

Exemple : 4.4.1

[la convergence en probabilité de la loi Binomiale] Soit $\{X_1, X_2, ..., X_{40}\}$ *une suite de variables aléatoires suit la loi Binomiale avec une probabilité* $p = 0.3$

— *Pour vérifier la convergence en probabilité vers* $\mathbb{E}(X)$ *de cette suite par le programme* $\mathbf{R}$*, on utilise le code suivant :*

```
n=40          #la taille d'échantillon
p=0.3         #le pramètres p
X=0:n
d=dbinom(X,n,p) #P(X=1,2....,40)
plot(d,type = "l",lwd=2,col="red",xlab = "X",
    ylab="P(X)",main = "la probabilité de v.a")
    #tracer la courbe de la  fonction P(X)
```

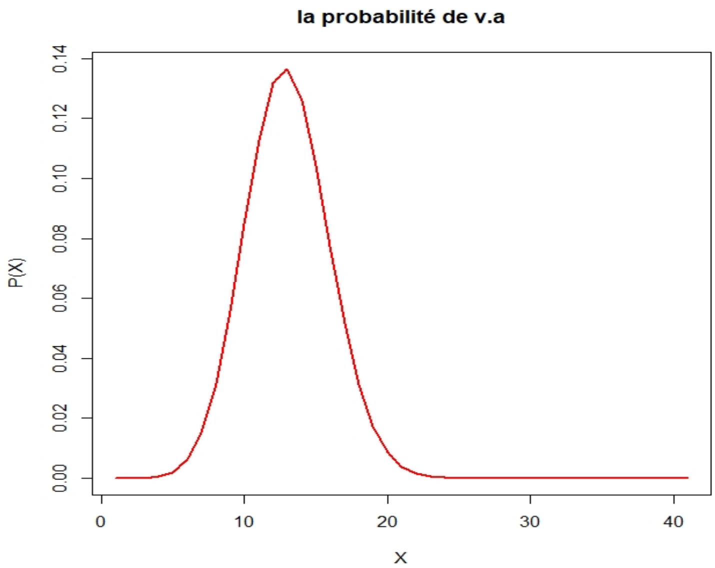

FIGURE 4.1 – La probabilité de v.a de l'exemple 4.4.1

```
n=40
p=0.3
X=0:n
N=100
y=rbinom(N,n,p) #simuler un échantillon de la
                #taille 100 avec cette loi
E=mean(rbinom(N,n,p)) #calculer l'espérance de
                      #l'échantillon à simuler
lim=(y-E)             #calculer X-E(X)
abline(h=0,col="blue") #tracer une droite
                       #horizontal y=0
plot(lim,type = "l",lwd=2,xlab="N",ylab="|X-E(X)|",
    col="red")
     #tracer la courbe de la fonction (X-E(X))
z=dbinom(abs(lim),N,p)  #calculer P(|X-E(X)|)
```

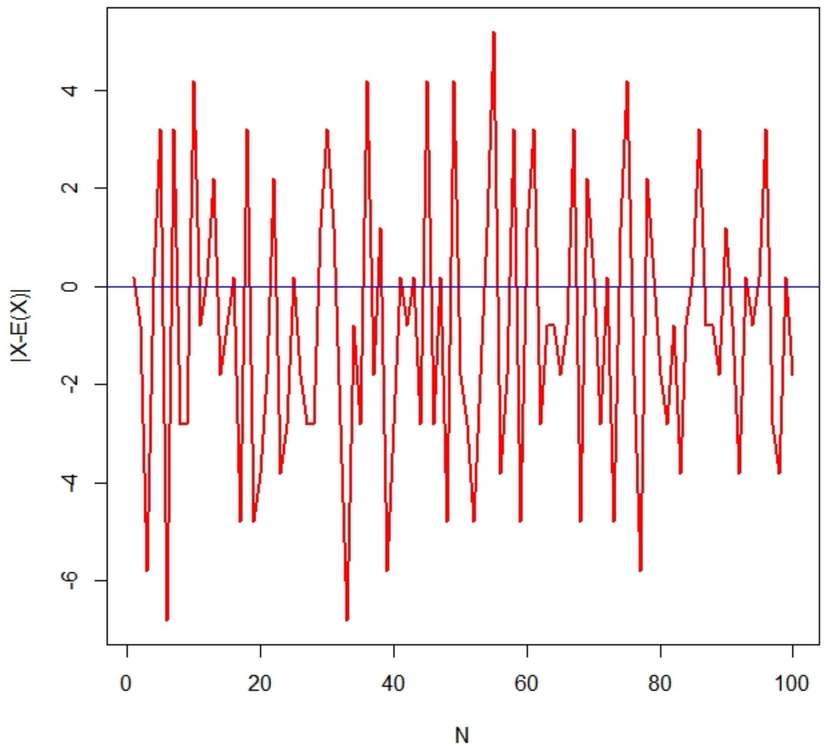

FIGURE 4.2 – $X - \mathbb{E}(X)$

```
> z
 [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
[89] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
> |
```

FIGURE 4.3 – $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|)$

On remarque que la différence $X - \mathbb{E}(X)$ *est proche de la valeur nulle et* $\mathbb{P}|X - \mathbb{E}(X)|$ *tend vers 0.*
Donc on peut dire par définition que X_n *converge en probabilité vers* $\mathbb{E}(X)$

— *Ou bien on utilise la commande "check.convergence"*

```
library(ConvergenceConcepts)
n=40
p=0.3
N=100
k<-rbinom(N,n,p)    #simuler N échantillon de loi
                    #Binomiale de paramètres n et p
G<-function(n) cummax(k-mean(k))   #calculer la
                                   #limite de Xn-E(Xn)
A<-check.convergence(nmax=100,M=500,genXn=G,
                     mode="p")
```

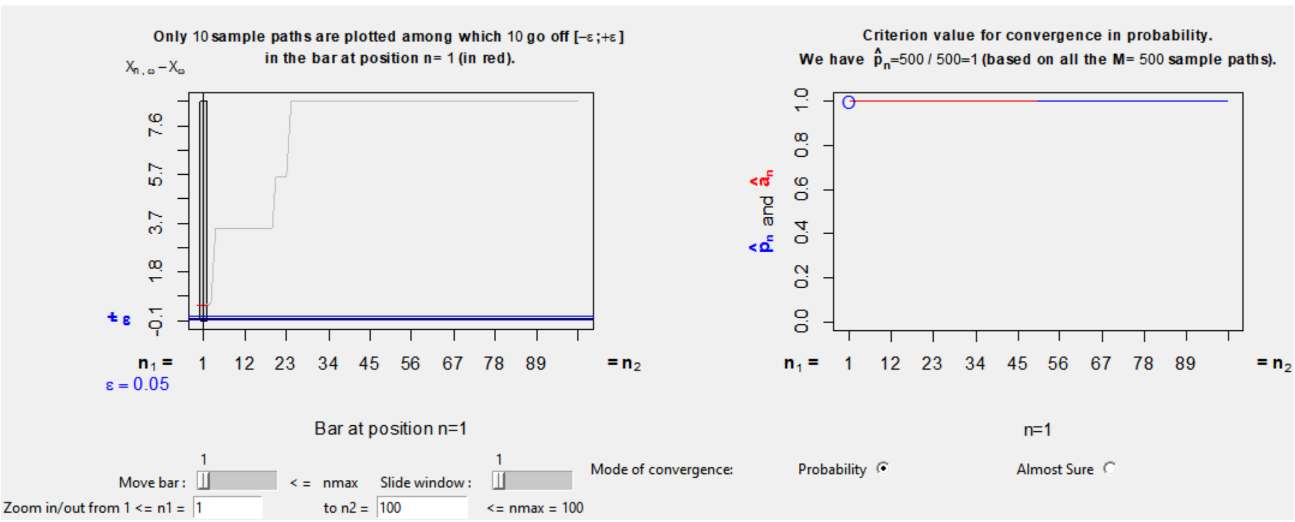

FIGURE 4.4 – Visualisation de la convergence en probabilité

CONCLUSION

Dans ce travail , nous avons étudier la convergence en probabilité des moyennes arithmétiques dans le cas des données indépendantes identiquement distribuées , avec une application sur la loi Binomiale . Cette étude nous permet d'interpréter la probabilité comme une fréquence de réalisation , justifiant ainsi le principe des sondages et présente l'espérance comme une moyenne . Plus formellement ,elle signifie que la moyenne empirique d 'un échantillon converge vers l'espérance lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.
Dans la continuité de ce travail , cette recherche ouvre la voie à étudier la convergence en loi des suites des variables i.i.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Convergence de variables aléatoires. techno-science.net
$[https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Convergence-de-variables-aleatoires-page-2.html]$

[2] DAOUDI Hamza.UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET.Cours de Probabilité 2^{me} Année LMD Mathématiques.

[3] Francis Maisonneuve . Probabilités,Variables aléatoires réelles et vectorielles .2014.

[4] Jean-Bérard .Introduction aux probabilités et à la statistique.

[5] Jean-Luc ROCUET . PROBABILITES et STATISTIQUES 4^{me} édition ,1^{er} trimestre. 2013.

[6] Mathieu Mansuy .Convergence de variables aléatoires.
$[http://mathieu-mansuy.fr]$.

[7] MathSV.univ-lyon1.
$[http://mathsv.univ-lyon1.fr/app/cours/?theme=proba\&chap=3]$

[8] Maurice LETHIELLEUX ,Céline CHEVALIER .Probabilités,Estimation statistiques en 24 fiches 4^{e} édition .2013.

[9] Oliver Rioul . Théorie des probabilités .2008.

[10] Pierre. P., Probabilités. 2005.

[11] Thierry. G. and Raphaèle H., Mesure et intégration. 2004.

[12] Un peu d'histoire (extraits de wikipédia)
$[https://www.public.iutenligne.net]$

[13] Xavier. M., Théorie de la Mesure et Intégration. 2012