الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama

Institut des sciences et technologies

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

Processus de Markov et prévision

Présenté par : BEKHEDDA Larrissi

Soutenu : Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr. LATTI FETHI	MCB	C-Univ Naâma	Président
Dr. DAOUDI KHELIFA	MCB	C-Univ El-Bayadh	Examinateur
Dr. BELAIDI MOHAMMED	MCA	C-Univ El-Bayadh	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes grands parents

A mon père louggani

A ma mère zohra

A ma femme

A mes fréres et soeurs.

A ma belle famille.

Et à mes amis(es).......

Remerciement

En premier lieu et avant tout je remercie mon dieu ALLAH le tout puissant, qui nous a donné la force et la puissence et la patience d'accomplir notre devoir dans les meilleures conditions.

Et également à remercier du coeur mon encadreur Dr.BELIADI MOHAMMED , son aide précieuse et ses conseilles judicieuses.

Je voudrai également remercier les membres de jury Dr. fethi LATTI et Dr.khelifa DAOUDI maître de conférence au centre universitaire Nour El-Bachir d'El-Bayadh.

Table des matières

Table des figures

Abréviations et Notations

Ω :	Ensemble
$\mathcal{F}$:	Tribu de parties de Ω
$\mathcal{F}_t$:	L'information à la date t
$\mathcal{F}_t^X$:	Filtration d'un processus X
$\mathcal{F}_n$:	Martingle
T :	L'ensemble des temps
E :	Ensemble des états
X_n :	Suite de variable aléatoire
Pr :	Probabilité
p_{ij}^n :	Probabilité de transition à n étapes
(E, ξ) :	Espace mesurable
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$:	Espace de probabilité muni d'une filtration
$\pi^{(n)}$:	Vecteur de probabilité des états
$X(w)$:	Processus stochastique
$Z(t)$:	Variable aéatoire
G :	Générateur

Introduction

Le mathématisien russe andrei markov (1856-1922) à publié les premiers chaine de Markov en 1906 qui prédure le future on utilisons le présent est oublie le passé alors la propriétè dit markovienne. Il est trés utile en mathématique pour l'anlyse d'information ,et trés utile pour étudier des phénomènes souvent aléatoire est on cherche à prédure leurs évolution ; exemple évaluées les performences du systeme où bien prédure des choses qui sont passé au future . la chaine de Markov c'est proventif pour prédure le future.
Ce travail se décompose en trois chapitres on l'utilisons la Chaine de Markov pour prévision le futur . on va commencer premièrement par la chaine de Markov et matrice de transition à temps discret 1 qui permet la modulisation et l'évolution dynamique d'un systeme et on va voir les propriétès fondamentales des chaines de Markov dite propriété de Markov [1] , pour cela on definie chaine de Markov homogène matrice de tansition ,propriété ,caractérisation, définitions propositions et quelques exemples, plus graphe de transition entre deux états et probabilités de transition à n étapes. les probabilités de transition en un pas ceci est expliqué par les équations de Chapman Kolmogorov Loi de probabilité de (Z_n) consiste à déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilités d'états. Distributions stationnaires et limites pour les chaines de Markov homogène quand converge vers π, les distributions ergodiques et les classifications des états communiquants.2. processus aléatoire concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques , biologiques où économique évoluant dans le temps [4].Processus stochastique signifient respectivement fonction et aléatoire au cours du temps qui prendre ses valeurs dans un espace des états et évalue dans un espace des temps processus de Markov et définition les deux axiomes propriétés [7], filtration et processus croissant ,gaussiens les martingles pour les temps discret et continu, les temps d'arrêts [8]. Les semi-groups (des matrices de transition) de Markov en temps continu [3] ce que nous obligons à utilsé l'équation de chapman-kolmogorov les matrice des probabilités de transition aprés temps n,générateur,matrice génétrice pour trouver la matrice de transition on utilise les équations de Chapman-Kolmogorov 2 et enfin l'application de chaine de Markov pour la préduction et la périvision pour le futur et on a choisié la prérivision climatique d'une région 3 la conclusion été pour voir les résultats obtenus conforme avec les théories sités au chapitres un et deux.

Chapitre 1

Chaine de Markov et matrice de transition

1.1 Chaine de Markov

Une chaine de Markov est une suite de variable aléatoire $(\mathbf{Z_n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$ qui nous aide de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire ; (Z_n) represente l'état du système à l'instant n

La propriètè fondamentale des chaines de markov, c'est à dire propriètè de markov.[1]

Définition 1.1.1

Soit $(Z_n, n \geq 0)$ *une suite de variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des états* E *supposé égale à* $\mathbb{N}$*,on dit que cette suite est une chaine de markov ;si pour tout* $n \geq 0$ *et toute suite* $(i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j)$*,on a :*

$$Pr(\underbrace{Z_{n+1} = j}_{futur}/\underbrace{Z_n = i, Z_{n-1} = i_{n-1}......Z_0 = i_0}_{passetprsent}) = Pr(\underbrace{Z_{n+1} = j}_{futur}/\underbrace{Z_n = i}_{prsent})$$

Exemple : 1.1

Une voiture se deplace aléatoirement sur les sommets d'un carré $\mathbf{ABCD}$*.chaque seconde ,elle tourne sur l'un des sommets voisins de façon équiprobable.Aprés* $\mathbf{n}$ *secondes,on note*$(\mathbf{Z_n})$ *sa position.* $Z_0 = C, Z_1 = D, Z_2 = C, Z_3 = B$ $\qquad$ $\mathrm{E} = \{A, B, C, D\}$

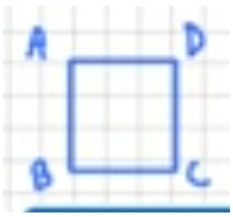

FIGURE 1.1 – exemple 1

Remarque 1.1.1

1. *L'état du processus à l'instant* $(n + 1)$ *n'a pas de relation jusque à l'instant* n *précédent, mais pas de ses états antérieurs*

2. *ce processus est dit sans mémoire.*

Définition 1.1.2 (Chaine de markov homogène)
Une chaine de Markov et dite homgéne si :
$p_{ij}(n) = Pr(Z_{n+1} = j/Z_n = i) = p_{ij} = Pr(Z_1 = j/Z_0 = i); n \geq 0.$

Définition 1.1.3
(Probabilite de transition)
On dit que la probabilité de transition de l'état i à l'état j entre les instants n et (n+1) par la quantité
$p_{ij}(n) = Pr(Z_{n+1} = j/Z_n = i) \forall i, j \in \mathrm{E},$
ou,p_{ij} : Pr*(pour que le système soit dans l'état j à l'instant $(n+1)$ sachant que à l'instant n il se trouvait à l'état i),*

Définition 1.1.4
***(Matrice de transiton pour card(**$\mathrm{E}) = r$*)*

$$\text{La matrice } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix},$$

$\sum_{j \in \mathrm{E}} p_{ij} = 1$ *(matrice stochastique),*
Dont les coefficients sonts des probabilites de transition p_{ij} .

Exemple : 1.2
Dans une région s'il pleut un quelque jour alors il pleut également le lendemain avec une probabilité égale à 0.7. De plus , s'il ne pleut pas un quelque jour alors il pleut le lendemain avec une probabilité égale à 0.2. on choisit au hasard une journée.Z_n est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il pleut aprés n jours et 2 s'il ne pleut pas après n jours.

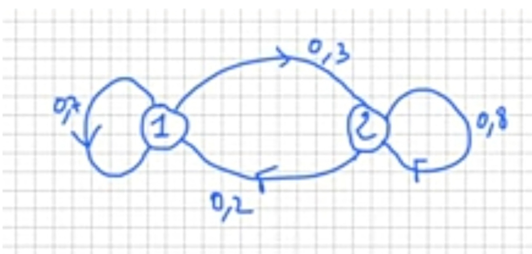

FIGURE 1.2 – graphe de transition

les sommets sont les états du système ,les arêtes sont pondéres par les probabilites de

transition
la matrice de transition est :$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ *l'espace des états* $\mathrm{E} = \{1.2\}$

Proposition 1.1.1

1. P *admet 1 comme valeur propre.*
2. *l'existence d'un vecteur propre gauche,lié à la valeur propre 1 qui définit une distribution de probabilité.*

Remarque 1.1.2

1. *une chaine de markov homogène "saute" aléatoirement d'état en état,et la probabilité de chaque saut est donnée par matrice* P
2. *La loi de*Z_0 *est appelée la loi initiale de la chaine de markov on l'écrira :*
   $\pi_0 = (Pr(Z_0 = 1), Pr(Z_0 = 2), ..., Pr(Z_0 = \mathbb{N}))$ *si* $\mathrm{E} = \{1, 2, ..., \mathbb{N}\}$
3. *La loi d'une chaine de markov* $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est entièrement caracterisé par sa matrice de transition* P*,et la loi de*Z_0,π_0.
   de plus on a pour tous $i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i_n \in \mathrm{E}$*;*
   $Pr(Z_0 = i_0; Z_1 = i_1; ....; Z_n = i_n) = Pr(Z_0 = i_0).Pr(Z_1 = i_1/Z_0 = i_0)......$
   $Pr(Z_n = i_n/Z_{n-1} = i_{n-1}) = Pr(Z_0 = i_0).Pr_{i_0 i_1}.....Pr_{i_{n-1} i_n}$

Proposition 1.1.2
Toute matrice de transition $P = (p_{ij})_{ij}$ *avec* $(i, j \in \mathrm{E})$ *vérifier les propirétes suivantes :*

$p_{ij} \geq 0, \qquad \forall((i, j) \in \mathrm{E} * \mathrm{E})$

$\forall i \in \mathrm{E}$ *on à* $\sum_{j \in \mathrm{E}} p_{ij} = 1$
une matrice qui vérifier les deux conditions 1/,2/ est appelée matrice stochastique

Définition 1.1.5
(Graphe de transition)
le graphe de transition d'une chaine de markov homogène est le graphe orienté ,dont les sommets sont les états (i,j,......) joints 2 à 2 par l'arc orienté (i vers j) ssi $p_{ij} > 0$

1.2 Propriètés fondamentales

1.2.1 Probabilités de transition en n étapes

la matrice de transition en n pas pour tout $n \geq 1$ est la matrice $P^{(n)}$.soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité que la chaine de markov passe de l'état i à l'état j en n transition (étapes) .cette probabilité est donnée par :

$p_{ij}^{(n)} = Pr(Z_n = j/Z_0 = i)$
$\quad = Pr(Z_{n+k} = j/Z_k = i) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$. (par stationnarité)
on pose égalité :$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j} \qquad avec \qquad ((i,j) \in \mathrm{E})$.

1.2.2 Equations de Chapman Kolmagorov

Les probabilités de transition en n pas sont vraiements déterminées par les probabilités de transition en un pas c'est à dire par la matrice transition .ceci est expliqué par la probabilité par les équations de Chapman Kolmagorov ,que nous allons aborder de ce qui suit.

Proposition 1.2.1
Pour tous i,j et pour tout $0 \leq k \leq n$ *,nous avons*

$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathrm{E}} p_{ik}^{(1)} * p_{kj}^{(n-1)}$

Démonstration
$p_{ij}^{(n)} = Pr(Z_n = j/Z_0 = i)$

$= \sum_{k \in \mathrm{E}} Pr(Z_n = j, Z_{n-1} = k/Z_0 = i)(n \geq 2)$

$= \sum_{k \in \mathrm{E}} Pr(Z_n = j/Z_{n-1} = k).Pr(Z_{n-1} = k/Z_0 = i)$

$= \sum_{k \in \mathrm{E}} p_{kj}^{(1)}.p_{ik}^{(n-1)}$.

En d'autre termes cette relation peut exprimer sous la formule de multiplication matricielle suivante $P^{(n)} = P^{(1)}P^{(n-1)}$ *pour tout* $0 \leq k \leq n$ *.*

la proposition suivante nous donne l'équation de Chapman-Kolmogorov et puisque la matrice de transition en un pas c'est la matrice elle même. □

Proposition 1.2.2
$P^{(n)} = P^n$ *, pour tout* $n \geq 0$

Démonstration
Pour n = 0 ,nous avons $P^{(0)} = P^0 = I$ (matrice identité).

supposons que $P^{(n)} = P^n$; ce qui implique :

$p_{ij}^{(n+1)} = Pr(Z_{n+1} = j/Z_0 = i)$

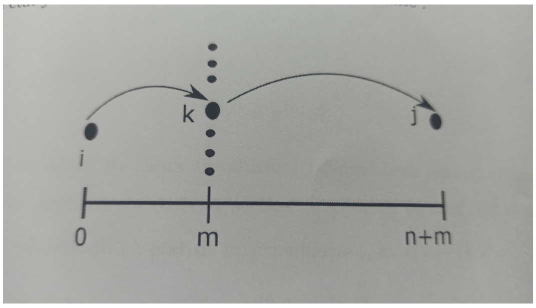

FIGURE 1.3 – Relation de Chapman-Kolmogorov

= $\sum_{k\in \mathrm{E}} Pr(Z_{n+1}=j, Z_n=k/Z_0=i)$

=$\sum_{k\in \mathrm{E}} Pr(Z_{n+1}=j, Z_n=k).Pr(Z_n=k/Z_0=i)$

=$\sum_{k\in \mathrm{E}} Pr(Z_{ij}^{(1)}.P_{ij}^{(n)})$

ce qui signifie :

$P^{(n+1)}=P^{(1)}P^{(n)}=P.P^n=P^{n+1}$ □

Corollaire 1.2.1
Pour tout $(i,j)\in \mathrm{E}^2$ et tout couple (m,n) d'entiers positifs , on a la relation suivante :

$Pr(Z_{n+m}=j/Z_0=i)=\sum_{k\in \mathrm{E}} Pr(Z_m=k/Z_0=i).Pr(Z_n=j/Z_0=k)$.

ou encore
$p_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k\in \mathrm{E}} p_{KJ}^{(n)}.p_{ik}^{(m)}$.

Démonstration (Voir [3])

Remarque 1.2.1
Le résultat de ce corollaire peut se explique sous la forme matricielle suivante :

$P^{(n+m)}=P^{n+m}=P^n.P^m=P^{(n)}.P^{(m)}$.

pour la démonstration de cette relation,il suffit d'utiliser l'associativité du produit matriciel. cette équation s'appelle équation de Chapman-Kolmogorov,ce qui se explicite comme suivante : aller de l'état i à l'état j en (n+m) pas,c'est aller de l'état i à un certain état k en m pas et de l'état j en n pas , comme le montre la figure suivante :

1.2.3 Loi de probabilité de Z_n

L'analyse généralement du régime d'une chaine de markov consiste à déterminer le vecteur $\pi^{(n)}$ des probabilités d'états qu'on note $\pi_i^{(n)} = Pr(Z_n = i)$ pour que la chaine $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ se trouve dans l'état i apres n pas
la distribution de Z_n peut être décrire sous la forme du vecteur ligne :
$\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, ...)$,donc la somme des terme vaut 1.
Pour calculer le vecteur π^n , il faut connaitre soit la valeur prise par Z_0, c'est-à-dire l'état initiale du processus , soit sa distribution $\pi^0 = (\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, ...\pi_i^{(0)}...)$.
D'aprés le théorème des probabilités totales , on a

$Pr(Z_n = i) = \sum_{i \in \mathrm{E}} Pr(Z_0 = j).Pr(Z_n = i/Z_0 = j)$.

$\pi_i^{(n)} = \sum_{J \in \mathrm{E}} \pi_j^{(0)}.p_{ji}^{(n)}$.

Nous avons aussi la notation matricielle de la relation qui est donnée comme suit :

$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}.P^{(n)} = \pi^{(0)}.P^n$.
De façon analogue , on obtient

$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)}.P$.
Exemple : 1.3 (Disponibilité de deux machines)
Nous allons repondre l'exemple de la disponibilité des deux machines vu dans la section présédente et nous supposons que les machines se trouvent à la première instant en état de fonctionnement ,ie, $\pi^0 = (1, 2)$ *La distribution de* Z_1 *est donnée par :* $\pi^1 = \pi^0.P = (p.(2-p), (1-p)^2)$. *La distribution de* Z_2 *est donnée par :* $\pi^2.P = \pi^0.P^2 = (p(1+2p-3p^2+p^3), (1-p)^2(1+p-1))$

1.2.4 Chaine de markov à deux états

généralement d'une chaine de markov à deux états , repésentés par 0 et 1 , la matrice de transition est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

où $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ on pose ici $0 < \alpha, \beta < 1$ de telle sorte que toutes les probabilités de transition sont strictement positives .

Pour le calcul de la matrice de transition en n pas , on a le résultat suivant :
Proposition 1.2.3
Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n & \alpha(1-(1-\alpha-\beta)^n) \\ \beta(1-(1-\alpha-\beta)^n) & \alpha+\beta(1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}$$

Démonstration :
Pour montrer ce résultat , il suffit de diagonaliser la matrice P. On a $(1,1)^t$et $(-\alpha,\beta)^t)$ les vecteurs propores correspondant respectivement aux valeurs $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-\alpha-\beta$ de la matrice P . D'$où$

$$P = \mathrm{M.D.M}^{-1}$$

. Alors la relation (1) devient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \alpha\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{-1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

d'où $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
comme conséquence de la relation (1) , nous avons

$$\begin{aligned} P^n &= (\mathrm{M.D.M}^{-1})^n \\ &= (\mathrm{M.D.M}^{-1})...(\mathrm{M.D.M}^{-1}) \\ &= \mathrm{M.D...D.M}^{-1} \\ &= \mathrm{M.D}^n.\mathrm{M}^{-1}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

, $n \in \mathbb{N}$ d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{-1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \frac{\lambda_2^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} .$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha\lambda_2^n & \alpha(1-\lambda_2^n) \\ \beta(1-\lambda_2^n) & \alpha+\beta\lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$\square$

1.2.5 Distribution stationnaire et limites pour les chaines de Markov homogènes

On constate que la distribution $\pi^{(n)}$ s'approche .vers une distribution limite lorsque $n \to \infty$ .Dans ce cas ,on dit que cette dernière définit le régime permanent de la chaine de Markov .En pratique admet généralement que le régime permanent d'une chaine de Markov est atteint en un nombre fini de déplacement.

Définition 1.2.1 (Distribution limite)
On dit qu'une chaine de Markov s'approche vers π ou possède une distribution limite π si

$$\lim_{n \to \infty} \pi^{(n)} = \pi$$

et,cela indépendemment de la distribution initiale $\pi^{(0)}$.

Définition 1.2.2 (chaine de Markov stationnaire)
Une chaine de Markov est dite stationnaire si la distribution $\pi^{(n)}$ est indépendante du temps n. En d'autres termes si la distribution initiale $\pi^{(0)}$ est une distribution stationnaire de la chaine Markov en question.

Définition 1.2.3 (Distribution stationnaire)
Une distribution de probabilité discrète $\pi = (\pi_0, \pi_1, ...\pi_n)$ est appelée distribution stationnaire par rapport à une matrice de transition P si

$$\pi.P = \pi$$

où π est un vecteur propore à qauche de la matrice P associé à la valeur propre 1 , avec

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1, \pi_j \geq 0, \forall j;$$

où bien

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathrm{E}} \pi_j.p_{ij}$$

Définition 1.2.4 (Distribution ergodique)
Une distribution stationnaire est appelée distribution ergodique si

$$\pi_j > 0\,, \quad \forall j$$

Existence et unicité des distributions stationnaires Dans le résultat que nous allons declarer ci-dessous, nous allons répondre aux questions suivantes : une chaine de Markov a toujours une distribution stationnaire ? peut elle en avoir plusieurs ?

Théorème 1.2.1
Pour une chaine de Markov finie, l'existence d'une distribution stationnaire est toujours au moin.Mais une chaine de Markov finie n'admet pas toujours une unique distribution stationnaire . nous allons déclarer le critère d'unicité d'une distribution stationnaire.

Théorème 1.2.2
Une chaine de Markov finie elle comprend une seul classe récurrente si et seulement si admet une unique distribution stationnaire.

Exemple : 1.4
On prend la chaine de Markov de matrice de transition suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaine de Markov admet une infinité de distributions stationnaires définies par

$$(0, 1-2\alpha, \alpha, \alpha), avec 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

Remarque 1.2.2
Une chaine de Markov infinie n'admet pas toujours de distribution . Par exemple, la chaine de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ *qui à i associe* $i+1$ *avec probabilité 1,ie., qui possède la matrice de transition*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

n'admet pas de loi stationnaire.

Recherche des distributions stationnaires Pour calculer les composantes du vecteur $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n)$ d'une chaine de Markov finie ,on résoudre le système d'équation linéaire suivante : $\begin{cases} \pi = \pi.P \\ \sum_{k \in \mathrm{E}} \pi_k \quad = 1 \end{cases}$

1.3 Classification des états d'une chaine de Markov

1.3.1 Relation de communication entre états

Définition 1.3.1 (Etat accessible)
Un état j est dit accessible à partir de l'etat i s'il existe un entier $n \geq 0$ *tel que* $p_{ij}^{(n)} > 0$, *et l'on not* $i \to j$.

Proposition 1.3.1
La relation d'accessibilité où bien attend entre états est réflexive et transitive.
Démonstration :

1. *Réfexivité : Comme*$p_{ii}^{(0)} = Pr(Z_0 = i/Z_0 = i) = 1$*, pour tout état i , on a bien* $i \to i$.
2. *Transivité : supposons que pour tout états i,j et k on ait :*$i \to j$ *et* $j \to k$*.alors , il existe m et n ,entiers positifs ,tels que :* $p_{ij}^{(m)} > 0$ *et* $p_{jk}^{(n)} > 0$*.D'où , on aura*

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{i \in \mathrm{E}} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0.$$

Ce qui montre bien que l'on a :$i \to k \; une \, relation \; transitive.$ □

Définition 1.3.2 (Etats communiquants)
On dit que deux états i et j d'une chaine de Markov communiquant , si $i \to j$ *et* $j \to i$ *.On note* $i \to j$.

Proposition 1.3.2
La relation de communication entre les états d'une chaine de Markov est une relation d'équivalence.
Démonstration :

1. *Réflexivité : Tout état i de la chaine de Markov communique avec lui même ie.*$i \to i$.
2. *Symetrie : Si un état i communique avec un état j, alors la réciproque est vraie, ie,* $i \to j \Leftrightarrow j \to i$.
3. *Transitivité : Si un état i communique avec un état j qui communique lui même avec un état k,alors l'état i communique avec l'état k , ie ,si* $i \to j$ *et* $j \to k$ *alors* $i \to k$□

Chapitre 2

Processus aléatoires

Introduction : Les processus aléatoires ce sont des variables aléatoires dépend du temps Il existe plusières applications des processus aléatoires pratiquée en science physique, l'informatique, statistique ,biologie et en médecine et bien au première les sciences de l'ingénieur.

2.1 Processus stochastiques

2.1.1 Filtration

On va voir à des phénomènes dépendant du temps .puisque la date t est connue ce qui nous ramene dans une tribu de $\mathcal{F}_t$, c'est l'information à la date t.

Définition 2.1.1
Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que :
$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$

On demande souvent que les ensembles négligables soient continus dans $\mathcal{F}_0$. On parle d'hypothèse habituelles si

— les ensembles négligables sont continus dans $\mathcal{F}_0$,

— la filtration est continue à droite au sens $où$ $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. Une filtration $\mathbf{G}$ est dite plus grosse que **F** si $\mathcal{F}_t \subset \varphi_t, \forall t$.

2.1.2 Processus

Un processus stochastique (où fonction aléatoire)est une famille de variables aléatoires $(Z_t, t \in [0, \infty])$. définies sur le même espace de probabilité .

Définition 2.1.2

On sais que un processus stochastique comme étant une famille $(Z_t)_{t\in T}$ de variables aléatoire inséré par facteur du temps t.Les mots processus et stochastique désingent respectivement fonction et aléatoire. Alors qu'une variable aléatoire Z à pour chaque $\omega \in \Omega$ une réalisation $Z(\omega)$ un processus stochastique $(Z_{t\in T})$ associe à chaque une fonction (où trajectoire) $(Z_t(\omega)_{t\in T})$

$$\mathrm{T} \to \mathrm{E}$$

$$t \to Z_t(\omega)$$

E est l'espace d'arrivée des variables aléatoires Z_t .Passer des variables aléatoires aux processus stochastiques nous indique $\acute{a}$ passer en analyse des points aux fonctions . Lorsque l'ensemble des temps T est au plus dénombrable (par exemple T=N),on parle de processus stochastiques à temps discret .Lorsqu'il est continu $(i.e.T = [0, t_0]$ où $T = \mathbb{R})$, on parle de processus stochastiques $\acute{a}$ temps continu. Dans ce travail,on résumé les expressions "variable aléatoire" en v.a et "indépendantes et identiquement distribuées" en i.i.d. Les situations réelles pouvent être modélisées par des processus stochastiques sont nombreuses

Définition 2.1.3

On appelle processus stochastique une famille $Z_t, t \in T$ de variable aléatoire définies dans le même espace de probabilité $(\Omega; \mathrm{F}; \mathrm{P})$ et $\acute{a}$ valeur dans l'espace mesurable $(E; \xi), t \in T$ représente une date Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus $\acute{a}$ temps discret (suite stochastique) on notée $(Z_n, n \in \mathbb{N})$
lorsque T est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus $\acute{a}$ temps continu [2] .

Définition 2.1.4

Un processus (aléatoire où stochastique) rend compte de l'évolution, d'un phénomène aléatoire; au cours du temps ,La réalisation d'un processus est appelée trajectoire. On note $Z(t)$ l'état du phénomène au temps t .$Z(t)$ est une variable aléatoire.

- *La Loi Z(t) dépend en général de t*
- *Pour deux dates t_1 et t_2 quelconques, $Z(t_1)$ et $Z(t_2)$ ne sont , en général, pas indépendantes.*

Un processus prend ses valeurs dans un espace des états et évolue dans un espace des temps [5].

Exemple : 2.1 (de processus aléatoires)

1. ***Signal télégraphique** :*
   Ce processus utilisé en théorie de la communication , rend compte de l'état d'occupation d'une ligne

A_k :instant du début de de la k^{ieme} communication ;
D_k :instant du la fin de la K^{ieme} communication ;

$$T = \mathbb{R}_+ ; E = \{-1, 1\}$$

$Z_t = 1$ si la ligne est libre , c'est -à-dire s'il exite k tel que $D_k \leq t < A_{k+1}$
Z_t si la ligne est occupée ,cest-à-dire s'il existe k tel que $A_k \leq t < D_k$
On a là,un processus (dit à créneaux),markovien , à accroissement indépendants homogène, dans le temps.

2. ***Processus de ramification** :*
Ce processus est utilisé pour suivre l'evolution de certaines populations animales où celulaires, où bien d'un nom chez les humains [2]. Chaque individu génère, indépendemment des autres, un nombre aléatoire de descendants,Z_n est le nombre d'individus total à la n^{ieme} génération

$$\mathrm{E} = \mathbb{N} ; \mathrm{T} = \mathbb{N}$$

le processus est markovien

3. ***Files d'attente** :*
Ces processus sont utilisés en recherche opérationnelle. Des clients se présentent à des guichets à des temps aléatoires , pour y recevoir des services de durée aléatoire (ex : banque,magasin, péage d'autoroute...) Z_t est le nombre de clients en attente à l'instant t.

$$\mathbf{E} = \mathbb{N} ; \mathbf{T} = \mathbb{R}.$$

Définition 2.1.5
Un processus stochastique $X = (Z_t, t \geq 0)$ est dite adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t) si Z_t est \mathcal{F}_t$-mesurable,pour tout t.

On dit que le processus est à trajectoires continues (où est continu) si les applications $t \to Z_t(w)$ sont continues pour presque tout w.

A un processus stochastique Z on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^Z$, c'est à dire la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\{Z_s, s \leq t\}$.

On dit que deux processus Z et Y sont égaux à la modification prés si $Z_t = Y_t$ p.s. $\forall t$.

Deux processus sont égaux en loi $Z ==^{loi} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ en pour tout n on a $(Z_{t_1}, Z_{t_2}, ..., Z_{t_n}) =^{loi} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$.

2.1.3 Processus croissant

Un processus $A = (A_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \to A_t$ est une fonction croissante. c'est-à-dire

$$A_t(w) \leq A_s(w), \forall t \leq s, p.s.$$

Sauf mention du contraire ,les processus croissants sont pris continus à droite.
Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0, t]$si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| \leq K$$

Le $\sup$ étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$. Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie sur $[0, t]$si

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| \leq \infty,$$

Le $\sup$ étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$. Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie s'il est à variation finie sur $[0, t]$ pour tout t. Il est alors la différence de deux processus croissants (et réciproquement).

2.1.4 Processus Gaussiens

Un processus Z est dit gaussien si pour toute combinaison linéaire finie de $(Z_t, t \geq 0) \geq)$ est une variable aléatoire gaussienne si :

$$\forall n, \forall t_i \ , 1 \leq i \leq n \ , \sum_{i=1}^{n} a_i Z_{t_i} \text{ est une v.a.r gaussienne.}$$

L'espérance et la covariance qui carectérice un processus gaussien .
Un espace gaussien est un sous-espace (vectoriel fermé) de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ formé de v.a.r gaussiennes centrées. L'espace gaussien engendré par un processus gaussien est le sous espace de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ engendré par les v.a.r centrées $(Z_t - \mathrm{E}(Z_t), t \geq 0)$, c'est-à-dire le sous-espace fermé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique.

2.2 Martingales

2.2.1 Cas discret

On se donne une filtration ,c'est-à-dire une famille de sous tribus $\mathcal{F}_n$ croissante (telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). La tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligables.

Définition 2.2.1
Une suite de v.a.r $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est $\mathcal{F}_n$-martingle si

i) Z_n *est intégrable ,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Z_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) $\mathrm{E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)} = Z_n$,$\forall n \in \mathbb{N}$.

Propriété 2.2.1
$\mathrm{E}(Z_{n+p}|\mathcal{F}_n) = Z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$.

Exemple :
Si $Z_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ où les Y_i sont indépendantes équidistribuées centrées, Z_n est une martingle

2.2.2 Cas continu

On se donne une filtration, c'est -à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ croissante (telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$.)

Définition 2.2.2
Une famille de variables aléatoires $(Z_t, t \in [0, \infty])$ *est une martingle par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

1. Z_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t.
2. $\mathrm{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) = Z_s$, $\forall s \leq t$.

Propriété 2.2.2
Si Z *est une martingle, alors*

1. $\mathrm{E}(Z_t) = \mathrm{E}(Z_0), \forall t$
2. *le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale :* $Z_t = \mathrm{E}(Z_T|\mathcal{F}_t)$*.Cette dernière propriété est d'un usage trés fréquent finance.*

Définition 2.2.3
Une famille de variables aléatoires $(Z_t, t \in [0, \infty])$ *est une surmartingle (resp.sous-martingle) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

1. $Z_t est \mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t
2. $\mathrm{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) \leq Z_s, \forall s \leq t$. *(resp.*$\mathrm{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) \geq Z_s$)

Exemple : 2.2
Si Z *est une martingle ,alors* Z^2 *est une sous martingle.Si* Z *est une martingle et* A *un processus croissant,* $Z + A$ *est une sous martingle.*

Proposition 2.2.1
(Inégalité de Doob) Si Z *est une martingle continue :*

$$\mathrm{E}(\sup_{s \leq T} Z_s^2) \leq 4\mathrm{E}(Z_T^2).$$

2.3 Temps d'arrêt

Soit un espace probabilisé muni d'une flitration $(\mathcal{F}_t)$. On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition 2.3.1
Un temps d'arrêt est une variable τ à valeur dans $\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$, telle que

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \, \forall t \in \mathbb{R}$$

Une constante positive est un temps d'arrêt.
On associe à un temps d'arrêt τ la tribu $\mathcal{F}_\tau$ dite des événements antérieurs à τ, définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty | A \bigcap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 2.3.1

1. *Si τ est un temps d'arrêt, τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*
2. *Si s et t sont des temps d'arrê, $s \wedge t$ est un temps d'arrêt.*
3. *Si s et t sont des temps d'arrêt tel que $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*
4. *Soit $(Z_t, t \geq 0)$ un processus et τ un temps d'arrêt fini.On définit $Z_\tau par Z_\tau(w) = Z_{\tau(w)}(w)$.*
5. *Si un processus Z est continu et adapté , Z_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.*

2.3.1 Théorème d'arrêt

Si τ est un temps d'arrêt et M une $(\mathcal{F}_t)$-martingle, le processus X défini par $X_t =^{def} M_{t\wedge T}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingle. En particulier, $E(M_{t\wedge T}) = E(M_0)$.

Théorème 2.3.1
(Théorème d'arrêt de Doob) Si M est une $(\mathcal{F}_t$-martingle continue et si s et t sont deux temps d'arrêt tel que $s \leq t \leq k$. k étant une constant finie, M_t est intégrable et

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$$

2.4 Processus de Markov

2.4.1 Généralités

Le processus de Markov sert à modéliser facilement les classes particulier d'un système à espace d'états discret, Le role de chaine de markov est de prédure [7]

Définition 2.4.1
Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est dit de Markov, si

1. ***Axiome de Markov :***
   Pour tous $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$ *,pour tous* $z_1, ..., z_{n+1}$ *:*
   $Pr([Z_{t_{n+1}} = z_{n+1}]/[Z_{t_1}] \bigcap ... \bigcap [Z_{t_n}]) = Pr([Z_{t_{n+1}}]) = z_{n+1}]/[Z_{t_n} = z_n])$
2. ***Axiome d'homogénéité :***
   Pour tous s *et* t*, pour tous* $z, y \in E$*,* $Pr([Z_{t+s} = y]/[Z_s = z])$ *ne dépend que de* t *(et non des instants* s *et* $s + t$*)*
   L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur,le présent étant connu , n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé.

Notations
On pose $P_{z,y}(t) = Pr([Z_{s+t} = y]/[Z_s = z]) = Pr([Z_t = y]/[Z_0 = z])$ et
$P(t) = (Pr_{z,y}(t))_{z,y \in E}$
On pose aussi $\overrightarrow{\pi}(t) = Pr_{Z_t}$ (vecteur ligne de composantes $\pi_z(t) = Pr([Z_t = z])$).

Propriété 2.4.1

1. *P(t) est une matrice stochastique ,i.e.*$P_{z,y}(t) \geq 0$ *et* $\sum_y P_{z,y}(t) = 1$ *pour tout* z*.*
2. *Pour tout s et pour tout t ,* $P(s + t) = P(s)P(t)$*.*
3. *Pour tout s et pour tout t ,* $\overrightarrow{\pi}(s + t) = \overrightarrow{\pi}(s)P(t)$*.*

2.4.2 Types de processus de Markov

On peut également déduire deux types d'espaces états ,selon qu'il est discret où continu comme respectivement dans 1 et 3 et les types 2 et 4. On appelle espace des états (phases) l'ensemble E où les variables Z_n prennent leurs valeures [1]. L'ensemble E peut être discret où continu. par conséquent,on distingue quatre types de processus :

1. Processus Un espace des temps T discret
2. Processus Un espace des temps T continu
3. Processus Un espace des états E discret
4. Processus Un espace des états E non discret

La matrice des probabilités de transition aprés temps t.
Des processus de Markov homogènes est déduire par les" chaines de Markov" en temps discret et à espace d'états fini où dénombrable .Le prochaine exemple en ordre de deficulté est celui de processus de sauts en temps continu [3]. En principe, toute la discussion précédente s'étend au processus trés compliqués , sur des espaces d'états ε arbitraires, en remplaçant comme d'abitude les événemets "ponctuels" ci dessus par des événements mesurables arbitraires,..

2.5 Les semi-groupes (des matrices de transition) Markov en temps continu

En temps discret ,à cause de l'équation de Chapman-Kolmogorov ,les probabilités du matrice de transition aprés temps n avait une structure de semigroup P^n , qui était engendré par la matrice P de transition aprés temps 1.
On a la même structure dans le cas continu :

Théorème 2.5.1

On prend une suite de chaine de Markov $(Z_t)_{t\geq 0}$ homogène à temps continu.Alors $(Pr_t)_{t\geq 0}$ est un semi-group stochastique ,signifie que :

1. *- $Pr_0 = I_d$*
2. *- $\forall s,t \geq 0$, $Pr_{s+t} = Pr_s Pr_t$ (Equations de Chapman-Kolmogorov)*
3. *- $\forall t \geq 0$, Pr_t est une matrice stochastique (ie, $\forall i,j \in I$, $P_{ij}(t) \geq 0$ et $\forall i \in I$, $\sum_{j\in I} P_{ij}(t) = 1$.*

Démonstration :(Voir [4])

Définition 2.5.1

*Une famille des opérateurs est appelée **semi-groupe**s'il est les propriétés (1)et (2) du théorème 2.5.1.Une famille satisfaisant aussi la propriété (3) est appelée : **semi-group stochastique**.*

***Démonstration** : pour (1) :on a pour tout i,j de I on a :*
$P_{ij}(0) = Pr([Z_0 = e_j])|[Z_0 = e_i]) = \delta_{ij}$ *donc* $Pr_0 = I_d$

pour (2) : on a pour tous i,j, pour tous $s,t \geq 0$, on a :
$P_{ij}(s+t) = Pr([Z_{t+s} = e_j]|[Z_0 = e_i]) = \sum_{k\in I} Pr([Z_{t+s} = ej]\bigcap[Z_t = e_k]|[Z_0 = e_t])$

On rappelle que $Pr(A\bigcap B|C) = Pr(A|B\bigcap C)Pr(B|C)$

d'où : $p_{ij}(t+s) = \sum_{k\in I} Pr([Z_{t+s} = e_j]|[Z_t = e_k]\bigcap[Z_0 = z_i])Pr([Z_t = e_k|[Z_0 = e_i])$

= $\sum_{k\in I} Pr([Z_{t+s} = e_j]|[Z_t = e_k][Pr([Z_t = e_k|[Z_0 = e_i])$

d'apres la propriété de Markov
=$\sum_{k\in I} Pr([Z_s = e_j]|[Z_0 = e_k][Pr([Z_t = e_k|[Z_0 = e_i])$

car $(Z_t)_{t\geq 0}$ est homogène
=$\sum_{k\in I} p_{ik}(t)p_{kj}(s) = (Pr_t Pr_s)_{ij}$ *donc* $Pr_{t+s} = Pr_t Pr_S$

(3) clair. □

Pour caractériser les processus de Markov en temps continu , nous désirons avoir une réprésentation des familles de matrices stochastiques de transition
$Pr(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$, qui satisfont l'equation de Chapman Kolmogorov
$Pr(t+s) = Pr(t)Pr(s), \forall t, s \in \mathbb{R}_+$

Dans le cas des semi-groupes discrètes de matrices stochastiques indicés par t $\mathbb{N}$, ca se faisait par la formule $Pr(t) = [Pr(1)]^n$.

Pour les processus de Markoven temps continu , il n'existe plus "temps minimal" d'observation (comme le t=1 du cas discrète) ; il est donc clair comment générer le semi-group des matrices de transition. Nous verrons que la réprésentation cherchée est

$$Pr(t) = \exp(tG)$$

Où la matrice G ,appellée **générateur** [4], est liée à la matrice de transition infinitesimale Pr_h, avec $h \to 0^2$

Définition 2.5.2
On appelle générateur d'un semi-groupe de Markov sur un espace d'états fini où denombrable la matrice

$$\mathrm{G} = (g_{ij})_{i,i \in I} ==^{def} \lim_{t \to 0^+} \frac{Pr_t - I_d}{t}$$

Plus précisement , la matrice G de "taux de transition" infintesimales , où "générateur" , et portant d'un état initial arbitraire $Z_0 = i$, est définie par :
$g_{ij} = \lim_{t\to 0^+} \frac{P_{ij}(t)}{t} quand, i \neq j \Leftrightarrow p_{ij}(t) = g_{ij}t + 0(t) quand, i \neq j$
$-g_{ii} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} quand, i = j \Leftrightarrow p_{ii}(t) = 1 + g_{ii}t + 0(t)$

Ainsi ,pour $j \neq i$ alors $g_{ii} = \lim_{t\to 0^+} \frac{P_{ij}(t)}{t} \geq 0$ est le taux de passage de l'état z_i, à l'état z_j ,et si $i \neq j$ on a $g_{ij} \geq 0$
pour $j = i$, $-g_{ii} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\mathcal{P}_{\rangle\rangle}(\sqcup)}{t} \geq 0$ est le **taux de sortie** de l'état z_i, pour $t \to 0$.
Note : En utilisant $P_t 1 = 1$, on vérifie que $G1 = 0$, i.e. $g_{i,i} = -\sum_{j\neq i} g_{i,j}$.

Définition 2.5.3
*Une matrice G satisfaisant $g_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$, $g_{ii} \leq 0$ et $g_{i,i} = -\sum_{j\neq i} g_{i,j}$ sera s'appellée **matrice génératrice**.*

Exemple : 2.3
Pour une matrice stochastique arbitraire , la matrice $G = P - I$ est une matrice génératrice.
On verra que chaque matrice génératrice G défini un processus de Markov de sauts Z_t (qui choisi son prochaine état $j \neq i$ à partir de $Z_t = i$ avec probabilités proportionelles à $g_{i,j}$, $j \neq i$, aprés un temps exponentiel de paramètre $\lambda_i = \sum_{j \neq i} g_{i,j}$).

2.6 Les équations différentielles de Chapman-Kolmogorov

Dans le cas des processus au temps continu , on a aussi deux façons alternatives **différentielles** de l'équation de Chapman-Kolmogorov.différentielle de l'équation de semi-groupe Chapman-Kolmogorov.

Théorème 2.6.1 (Equations de Kolmogorov)
Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov homogéne à temps continu à valeurs dans $\mathrm{E} = \{e_i\,; i \in I\}$*, de générateur G et de semi-groupe standard* $(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$*. Si* E *est fini ou si* $\sup_{i\in I}(-g_{ii}) < +\infty$ *alors [4] on a :*
$\mathrm{P}' = \mathrm{P}_t\mathrm{G}$ *(équation directe)*
$\mathrm{P}' = \mathrm{G}\mathrm{P}_t$ *(équation inverse ou rétrograde)*
De plus ,pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{P}_t = \exp^{tG}$

Remarque 2.6.1
Ces équation permettent de calculer, au moins numériquement ,les matrices P_t.
Pour la démonstration , il suffit de remarquer qu'on a :

$$\mathrm{P}_{t+h} - \mathrm{P}_t = \mathrm{P}_t(\mathrm{P}_h - I_d) = (\mathrm{P}_h - I_d)\mathrm{P}_t$$

. Le resultat est obtenu en divisant par h et en passant à la limite .

Notes

1. Comme la matrice $\mathrm{P}(t)$ doit être stochastique pour chaque t , il découle que la partie réelle des valeurs propres de G doit être nonpositives .
2. Pour les processus à espace d'état infini , on parvient trés rarement à obtenir des solutions analytiques pour les équations de Kolmogorov.
   Deux exceptions admettent résolution explicite sont les processus de Markov à deux états et le processus de poisson.

2.6.1 Résolution des équations Chapman Kolmogorov pour le processus de Markov à deux états

,

On suppose que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une Chaine de Markov homogène à valeurs dans $\mathrm{E} = \{e_1, e_2\}$, de générateur

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \geq 0$. On est bien dans les conditions d'application du théorème (quand Eest fini). la Chaine étant simple, ona a deux méthodes pour la résolution des équations de Kolmogorov [4].

Première méthode :

On calcule $\exp^{tG}$ pour tout $t \geq 0$ .Pour cela , on va essayer de diagonaliser G .

le polynôme caractéristique P_G de G est donnée par :

$\mathrm{P}_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_2) = \lambda(\alpha + \beta + \lambda)$.

$\rightarrow 1^{er}$ cas : $\alpha = \beta = 0$

On a $G = 0$ donc $\exp^{tG} = I_2$ pour tout $t \geq 0$.

$\rightarrow 2^{ime}$ cas : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

La matrice G admet 2 valeurs propres distinctes donc est diagonalisables.

les valeurs propres sont 0 (avec $\overrightarrow{v_1} = \binom{1}{1}$ comme vecteur propre associé)

et $-(\alpha + \beta)$(avec $\overrightarrow{v_2} = \binom{\alpha}{-\beta}$ pour vecteur propre associe).

En posant $P = \begin{pmatrix} ,1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$G = PDP^{-1}$ ou $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$

On a alors :

$P_t = \exp^{tG} = P \exp^{tG} P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha \exp^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha \exp^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta \exp^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta \exp^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}$

car $\exp^{tG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}$

(On peut remarque P_t est bien une matrice stochastique)

Deuxième méthode :

(toujours pour $(\alpha+\beta) \neq (0,0)$)

On a : $P_t = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$

On a $P_t' = P_t G$ d'où :

1. $p_{11}' = -\alpha p_{11}(t) + \beta p_{12}(t)$.....(a)
2. $p_{12}' = \alpha p_{11}(t) - \beta p_{12}(t)$.....(b)
3. $p_{21}' = -\alpha p_{21}(t) + \beta p_{22}(t)$.....(c)
4. $p_{22}' = \alpha p_{21}(t) - \beta p_{22}(t)$.....(d)

Comme on a P_t est une matrice stochastique :
5. $p_{11}(t) + p_{12}(t) = 1$ .....(e)
6. $p_{21}(t) + p_{22}(t) = 1$ .....(f)
Les équations (a) et (e) donnent : $p_{11}'(t) = -\alpha p_{11}(t) + \beta(1 - p_{11}(t))$ i.e.

$p_{11}'(t) + (\alpha+\beta)p_{11}(t) = \beta$ donc $p_{11}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + C\exp^{-(\alpha+\beta)t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Or , on sait que $p_{11}(0) = 1$ donc $C = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $d'où$: $p_{11}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta + \alpha\exp^{-(\alpha+\beta)t})$

Avec (e) , on a alors : $p_{12}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha - \alpha\exp^{-(\alpha+\beta)t})$ En procédant de $même$,les équations (c)et (f) donnent :
$p_{21}'(t) = -\alpha p_{21}(t) + \beta(1 - p_{21}(t))$i.e, $p_{21}(t) + (\alpha+\beta)p_{21}(t) = \beta$
$d'où$ $p_{21}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + C'\exp^{-(\alpha+\beta)t}$ avec $C' \in \mathbb{R}$

Comme $p_{21}(0) = 0$ on obtient $C' = -\frac{1}{\alpha+\beta}$ $d'où$ $p_{21}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta + \alpha\exp^{-(\alpha+\beta)t})$

Et avec (f) , on a : $p_{22}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha + \beta\exp^{-(\alpha+\beta)t})$,et on retrouve P_t.

Chapitre 3

Prédiction

Code R

```
Meteo<-c("soleil","nuage","pluie")
byRow=TRUE
Matricemeteo<-matrix(data=c(0.7,0.2,0.1,0.3,0.4,0.3,0.2,0.45,0.35),
+ byrow=byRow,nrow=3,dimnames=list(meteo=meteo))
Matricemeteo
cmMeteo<-new("markovchain",states=Meteo,byrow=byRow,
+ transitionMatrix=Matricemeteo,name="Weather")
cmMeteo
etatinitial<-c(0,1,0)
etatinitial
apres2jours<-etatinitial*(cmMeteo*cmMeteo)
apres2jours
apres7jours<-etatinitial*(cmMeteow)
apres7jours
etatinitial<-c(0,1,0)
cmMeteoTranspose<-t(cmMeteo)
apres2jours<-(cmMeteoTranspose*cmMeteoTranspose)*etatinitial
apres2jours
apres7jours<-(cmMeteow)*etatinitial
apres7jours
states(cmMeteo)
dim(cmMeteo)
transitionProbability(cmMeteo,"neiage","pluie")
cmMeteo[2,3]
print(cmMeteo)
show(cmMeteo)
mcDf<-as(cmMeteo,"data.frame")
```

mcNew<-as(mcDf,"markovchain")
mcDf
plot(cmMeteo)
conditionalDistribution(cmMeteo,"soleil")
summary(cmMeteo)
steadyStates(mcWeather)
meteodesjours<-rmarkovchain(n=365,object=cmMeteo,t0="soleil")
meteodesjours[1 :30]
weatherFittedMLE<-markovchainFit(data=meteodesjours,method="mle",name="Weather MLE")
weatherFittedMLE$estimate$
$predict(object = weatherFittedMLE$estimat,newdata=c("pluie","soleil"),n.ahead=3)

Affichage

> Meteo<-c("soleil","nuage","pluie")

> byRow=TRUE

> Matricemeteo<-matrix(data=c(0.7,0.2,0.1,0.3,0.4,0.3,0.2,0.45,0.35), byrow=byRow,nrow=3,dimnames=list(meteo=meteo))

> Matricemeteo

$meteo$	$[,1]$	$[,2]$	$[,3]$
$soleil$	0.7	0.20	0.10
$nuage$	0.3	$.40$	0.30
$pluie$	0.2	0.45	0.35

> cmMeteo<-new("markovchain",states=Meteo,byrow=byRow, transitionMatrix=Matricemeteo,name="Weather")

> cmMeteo

Weather

A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states :

soleil, nuage, pluie

The transition matrix (by rows) is defined as follows :

$meteo$	$soleil$	$nuage$	$pluie$
$soleil$	0.7	0.20	0.10
$nuage$	0.3	$.40$	0.30
$pluie$	0.2	0.45	0.35

> etatinitial<-c(0,1,0)

> etatinitial

$[1]$ 0 1 0

> apres2jours<-etatinitial*(cmMeteo*cmMeteo)

> apres2jours

	$soleil$	$nuage$	$pluie$
[1,]	0.39	0.355	0.255

> apres7jours<-etatinitial*(cmMeteo^7)

> apres7jours

	$soleil$	$nuage$	$pluie$
[1,]	0.4622776	0.3188612	0.2188612

> etatinitial<-$c(0,1,0)$

> cmMeteoTranspose<-t(cmMeteo)

> apres2jours<-(cmMeteoTranspose*cmMeteoTranspose)*etatinitial

> apres2jours

	$[,1]$
$soleil$	0.390
$nuage$	0.355
$pluie$	0.255

> apres7jours<-(cmMeteo^7)*etatinitial

> apres7jours

$meteo$	$[,1]$
$soleil$	0.3172005
$nuage$	0.3188612
$pluie$	0.3192764

> states(cmMeteo)

[1] "soleil" "nuage" "pluie"

> dim(cmMeteo)

[1] 3

> transitionProbability(cmMeteo,"neiage","pluie")

[1] NA

> cmMeteo[2,3]

[1] 0.3

> print(cmMeteo)

$meteo$	$soleil$	$nuage$	$pluie$
$soleil$	0.7	0.20	0.10
$nuage$	0.3	$.40$	0.30
$pluie$	0.2	0.45	0.35

> show(cmMeteo)

Weather

A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states :

soleil, nuage, pluie

The transition matrix (by rows) is defined as follows :

$meteo$	$soleil$	$nuage$	$pluie$
$soleil$	0.7	0.20	0.10
$nuage$	0.3	$.40$	0.30
$pluie$	0.2	0.45	0.35

> mcDf<-as(cmMeteo,"data.frame")

> mcNew<-as(mcDf,"markovchain")

> mcDf

	$t0$	$t1$	prob
1	$soleil$	$soleil$	0.70
2	$soleil$	$nuage$	0.20
3	$soleil$	$pluie$	0.10
4	$nuage$	$soleil$	0.30
5	$nuage$	$nuage$	0.40
6	$nuage$	$pluie$	0.30
7	$pluie$	$soleil$	0.20
8	$pluie$	$nuage$	0.45
9	$pluie$	$pluie$	0.35

> plot(cmMeteo) > conditionalDistribution(cmMeteo,"soleil")

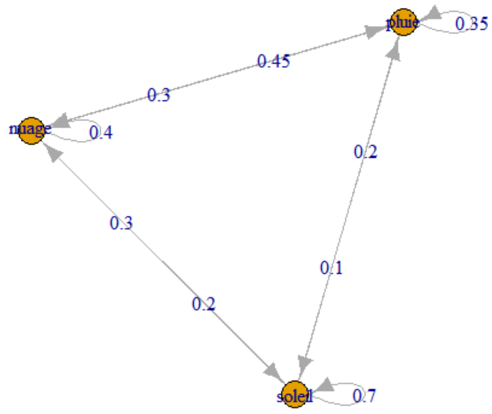

FIGURE 3.1 – Graphe de transition

$soleil$	$nuage$	$pluie$
0.7	0.2	0.1

> summary(cmMeteo)

Weather Markov chain that is composed by :

Closed classes :

soleil nuage pluie

Recurrent classes :

soleil,nuage,pluie

Transient classes :

NONE

The Markov chain is irreducible

The absorbing states are : NONE

> steadyStates(mcWeather)

	soleil	*nuage*	*pluie*
[1,]	0.4636364	0.3181818	0.2181818

> meteodesjours<-rmarkovchain(n=365,object=cmMeteo,t0="soleil")

> meteodesjours[1 :30]

[1] "soleil" "soleil" "soleil" "soleil" "soleil" "soleil" "soleil" "nuage" "pluie" "soleil"

[11]"soleil" "nuage" "nuage" "pluie" "pluie" "nuage" "pluie" "pluie" "pluie" "nuage"

[21] "pluie" "pluie" "soleil" "soleil" "soleil" "soleil" "pluie" "soleil" "nuage" "nuage"

> weatherFittedMLE<-markovchainFit(data=meteodesjours,method="mle",name="Weather MLE")

> weatherFittedMLE$estimate

Weather MLE

A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states :

nuage, pluie, soleil

The transition matrix (by rows) is defined as follows :

	soleil	*nuage*	*pluie*
soleil	0.3272727	0.4000000	0.2727273
nuage	0.4941176	0.3058824	0.2000000
pluie	0.1952663	0.0887574	0.7159763

> predict(object=weatherFittedMLE$estimat,newdata=c("pluie","soleil"),n.ahead=3)

[1] "soleil" "soleil" "soleil"

Conclusion

Les modèles étudiés dans ce mémoire sont très puissant et possèdent de très bonnes propriétés. Il est clair que les modèles de chaine de Markov utilisé sont trés simples et pratiques pour les prévisions à court terme bien qu'il existe d'autres familles de modèles telle que les modèles des algorithmes en mathématique et statistique. la propirétè de Markov possédent l'information utile pour la prédiction du futur est entièrement continue dans l'état présent du processus et n'est pas dépendant des états antérieurs .

Bibliographie

[1] André, M.(2009)*Processus stochastique estimation filtrg*, Toulous.

[2] Claudie,H.I.(2009)*Processus stochastique modélisation* Thèse de master, Université Toulous.

[3] Edouar, P.(2006)*Processus stochastique modélisation* Thèse de master, Université Toulous.

[4] Florin, A.(2009)*Markov processus and application to queueing/risk/storage theory and mathematical biology*.

[5] Jean, C.B.(2018)*Processus stochastique* , Rannes.

[6] Jean, J.R et Marie, L.(2014)*Chaine de Markov* .

[7] Jean-Yves Dauxios.(2008-2009)*Recherche de mathématiques probabilités*, Fanch-comté.

[8] Monique ,J.B.(2006)*Cours de calcul stochastique* Thèse de master, 2IF EVRY.

[9] Nils, B.(2014)*Processus aléatoires et application*, Université d'orléans.

[10] Omar, B.(2008)*La pénalisation des trajectoires du mouvement brownien* Mémoire de master, Université Tlemcen.

[11] Sabin, L.(2014)*Processus stochastiques cours et exercices corrigés* Ellipses marketing.

[12] Yves, C.(2011)*Probabilités et processus stochastiques* , Toulous.

[13] R.Elliott and P.E KOopp.(1999)*Mathematics of financial market.*Springer,berlin.

[14] M.Belaidi,A Yousefate(2018)*Methode for Estimating and Predicting the General Markov Process on a Banach Space internatinl journal of Mathematics and computation* **713-718**,29-3

Résumé:

Dans ce mémoire nous avons traité le sujet des Chaines de Markov et leurs applications pour la prévision du futur, on a utilisée quelques outils théoriques des probabilités de transition et équation de Chapman-Kolmogorov et des distributions stationnaires pour les Chaine de Markov à temps discret, puis les processus stochastiques et Markoviennes et les semi-groups Markov en temps continu (des matrice de transition), et ensuite on a appelé les équations différentielles de Chapman-Kolmogorov comme deuxième méthode pour chercher la matrice de transition au temps continu.

Finalement on a donné une application réelle en programme R à l'aide de Chaine de Markov pour prédire la météo du trois jours prochains qui vienne pour la prévision climatique

Abstract:

In this memory we have dealt the subject of Markov chains and its applications for forecasting of the future, we used some theoretical tools of transition probabilities and the Chapman-Kolmogorov equation and stationary distributions for discrete-time Markov chains, then stochastic and Markovian processes and continuous-time Markov semi-groups (transition matrices), and then we called the Chapman-Kolmogorov differential equations as a second method to find the continuous-time transition matrix.

Finally we gave a real application in R program by using Markov Chain to predict the weather forecast for the next three days for climate forecasting.

ملخص:

لقد تناولنا في هذه المذكرة موضوع سلاسل ماركوف وتطبيقاتها للتنبؤ بالمستقبل، وقد استخدمنا بعض الأدوات النظرية لاحتمالات الانتقال ومعادلة تشابمان-كولموغوروف والتوزيعات الثابتة لسلاسل ماركوف ذات الوقت المنفصل، ثم العشوائية وماركوفيان و العمليات و شبه-مجموعات ماركوف في الزمن المستمر (مصفوفات الانتقال)، ثم ذكرنا معادلات تشابمان-كولموغوروف التفاضلية كطريقة ثانية للعثور على مصفوفة الانتقال المستمر.

أخيرًا ، قدمنا تطبيقًا حقيقيًا في برنامج R باستخدام سلاسل ماركوف للتنبؤ بتوقعات الطقس للأيام الثلاثة القادمة لتنبؤات المناخ.