

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Centre Universitaire Salhi Ahmed-Naama-
Institut des sciences & Technologies
Département de Mathématiques et Informatiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et EDP

Thème

*Problème elliptique non linéaire
faisant intervenir l'opérateur le bilaplacien*

Présenté par :

Brahimi Nouredine

Membres du jury :

M ^r B.KHALDI	M.C.B, C.U.N,	Université de Naama	Président.
M ^r K.TAHRI	M.C.A, E.S.M,	Ecole Supérieure de Management Tlemcen	Encadreur.
M ^r A.ZOUAOUI	M.C.B, U.M.S,	Université de Mascara	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

"Les bienfaits que nous avons reçus
de nos parents sont les plusgrands de
tous."

Socrate : "Le monde grec-Ve s.av.J.-C

À mon Père et à ma Mère...

À ma famille

À mes Soeurs

Et à mes Frères

*À mes proches
et A mes amis.*

Remerciement

"Certains auteurs parlent de leurs ouvrages disent :
« Mon livre, mon commentaire, mon histoire, etc.»

Ils feraient mieux de dire : « Notre livre,
notre commentaire, notre histoire, etc. »
vu que d'ordinaire il y a plus en cela
du bien d'autrui que du leur.

Blaise Pascal Pensée 64

Tout d'abord je remercie **DIEU** le tout puissant qui m'a donné la force,
le courage et la patience pour accomplir ce travail.

Monsieur **KAMEL TAHRI** m'a initié à la recherche. Sa disponibilité,
son enthousiasme naturel, ses conseils et ses encouragements
m'ont été d'un précieux secours dans la réalisation de ce travail.

Je suis heureux de lui exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

Je remercie chaleureusement monsieur **BRAHIM KHALDI** pour le grand honneur
qu'il me fait aujourd'hui en acceptant de présider ce jury.

Je suis particulièrement honoré que monsieur **ALI ZOUAOUI** se soit intéressé à mon
travail et accepté de faire partie du jury. Je le remercie infiniment.

A [issue de ce travail, mes pensées se tournent d'abord vers ma famille
pour tout le sacrifice qu'elles ont su consentir tout au long de ma scolarité, sans
oublier mes amis et proches qui m'ont soutenu jusqu'à l'aboutissement de ce travail.

❖ *Noureddine brahimi* ❖

Table des matières

1	Introduction générale et Présentation	8
1	Résultat d'existence et d'unicité pour un problème biharmonic de type Kirchhoff	13
1.1	Introduction	13
1.2	Résultats auxiliaires	16
1.3	Quelques lemmes essentielles	21
1.4	Théorème fondamental	28
2	Problèmes elliptique non linéaire avec des conditions de Navier-Stokes	37
2.1	Introduction	37
2.2	Présentation du problème et hypothèses	38
2.3	Notations et cadre fonctionnel	39
2.4	Étude variationnelle	41
2.5	Principaux résultats	47
2.6	Principal resultat	55
3	Annexe	60
3.1	Les espaces $L^p(\Omega)$	60
3.2	Les espaces de Sobelev	62
3.3	Quelques critères de convergence	67
3.4	Un petit aperçu de la théorie des points critiques	69
3.5	Quelques Formules et Inégalités utilisés	73
	Conclusion générale	77
	Bibliographie	78

Table des figures

1.1	Graphe de $J_\lambda(u)$	24
2.1	Graphe de $I_\lambda(u)$	51

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

Nous avons jugé utile de consigner ici quelques symboles couramment utilisés.

- ▶ \mathbb{R}^N : Un espace Euclidien de dimension N , ($n \geq 5$).
- ▶ la lettre Ω désigne toujours un ouvert de \mathbb{R}^n .
- ▶ $\bar{\Omega}$: fermeture de Ω (i.e. le plus petit fermé de \mathbb{R}^n contenant Ω).
- ▶ $\partial\Omega$: la frontière de Ω (soit ici $\bar{\Omega} \setminus \Omega$).
- ▶ $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$: vecteur unitaire de la normale extérieure à Ω .
- ▶ $\Gamma = \partial\Omega$, Γ le bord de Ω .
- ▶ ■ Signale la fin d'un passage formant une suite logique (preuve).
- ▶ $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ est le gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ $\operatorname{div} u$: la divergence d'un vecteur u est $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.
- ▶ Δu est le laplacien de la fonction $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, c-à-d : $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$.
- ▶ 2^\sharp l'exposant critique de Sobolev tel que : $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$.
- ▶ q conjugué de Hölder de p , $q = \frac{p-1}{p}, p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$
- ▶ \hookrightarrow pour signifier l'injection.
- ▶ p.p est l'abrégié de presque partout.

Principaux espaces fonctionnels utilisés

- ▶ $\mathcal{D}(\Omega)$ espaces des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω , à support compact dans Ω .

- ▶ $L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty\}$.
- ▶ $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}$.
- ▶ $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \exists c > 0; |u(x)| \leq c.p.p \text{ sur } \Omega\}$.
- ▶ $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), (\nabla u \in L^2(\Omega))\}$.
- ▶ $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) : \|u_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0\}$
- ▶ L'espace H_0^1 peut être défini comme suit :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$
- ▶ $H^2(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } : \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq n\right\}$.
- ▶ $W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega), \exists g_i (i = 1, \dots, n) \text{ tel que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\right\}$.

Introduction Générale

"The unified character of mathematics lies in its very nature; indeed, mathematics is the foundation of all exact natural sciences.."

David Hilbert (1862-1943).

1 Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles font partie importante des modèles mathématiques pour interpréter les phénomènes physique, biologiques et statistique, par exemple, dans l'étude des fluides non Newtoniens et dans les phénomènes de couche limite pour des fluides visqueux

Les équations aux dérivées partielles est aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et sont d'une grande utilité dans la modélisation pour des nombreux problèmes de la physique mathématique comme la théorie d'élasticité non linéaire, la diffusion de la chaleur, Parmi ce genre de problèmes, on trouve les problèmes de type Kirchhoff, qui se connaissent par la présence du terme : $M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \Delta u$, avec M une fonction numérique donnée.

Pour résoudre ce genre de problèmes il'ya généralement plusieurs méthodes ont été proposées pour l'étude de l'existence d'une solution positive :

- Les méthodes numériques (la méthode des éléments finis, la méthode des différences finis).
- Les méthodes topologiques (degré topologique, point fixe, transversalité topologique).
- Les méthodes variationnelles (methodes de Ritz et Galerkin, methode de Petrov-Galerkin, la Théorie des Points Critiques).
- La théorie du genre combinée avec les méthodes variationnelles, semi groupe.

Dans ce cadre, on va étudier dans ce mémoire l'existence d'une solution positive de certains types de problèmes elliptiques non linéaires contenant l'opérateur le bilaplacien de type Kirchhoff $\Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \cdot \Delta u$ avec des seconds membres différents et des conditions aux limites de Navier-Stokes.

Historiquement, des développements importants ont été réalisés concernant l'existence de solutions de problèmes elliptiques biharmoniques critiques. On rappelons brièvement quelques-uns.

Dans [SL]^①, en utilisant les méthodes de sous et sur solution et les méthodes itératives monotones. Wang a prouvé l'existence d'une solution non triviale du problème elliptique du quatrième ordre :

$$\begin{cases} \Delta^2 u + a(x)\Delta u + c(x)u = f(x, u, \nabla u, \Delta u) & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_1)$$

où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n .

Le problème \mathcal{P}_{λ_2} est dit non local à cause de la présence de l'intégrale sur tout le domaine Ω , ce qui implique que l'équation en \mathcal{P}_{λ_2} n'est pas une identité ponctuelle. L'équation originale de Kirchhoff à une dimension a été introduite par Kirchhoff lui-même [KI] en 1883. Son modèle prend en compte les changements de longueur des cordes produites par des vibrations transversales. Ce problème \mathcal{P}_{λ_2} est lié à l'analogie stationnaire de l'équation d'évolution de type Kirchhoff :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \lambda \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b \right) \Delta u = h(x, u) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = v(x), u_t(x, 0) = w(x) \end{cases} \quad (\mathcal{P}_2)$$

où T est une constante positive, v et w sont des fonctions données.

Les dimensions un et deux sont pertinentes du point de vue de la physique et de l'ingénierie parce que dans ces situations, le modèle est considéré comme une bonne approximation pour décrire les vibrations non linéaires de poutres ou de plaques.

Les problèmes non locaux découlent non seulement des domaines mathématiques et physiques, mais également de plusieurs autres branches, aussi ils apparaissent dans

①. Les lettres entre les deux accolades dans l'introduction renvoient à bibliographie à la fin de ce mémoire.

les systèmes biologiques, u décrit un processus dépendant de la moyenne de lui-même en tant que densité de population. Leur étude théorique a attiré beaucoup d'intérêt de la part des mathématiciens depuis longtemps et de nombreux travaux ont été réalisés. Nous citons notamment le célèbre article de Lions [JL]. Cependant, dans la plupart des articles, l'approche utilisée repose sur les méthodes topologiques.

De plus, au cours des deux dernières décennies, l'équation non locale du quatrième ordre :

$$\begin{cases} \Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \cdot \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_3)$$

a également été étudiée par de nombreux auteurs, dans de nombreux domaines comme les systèmes micro-electro-mécaniques, diffusion surfacique sur solides, théorie des couches minces. Nous référons le lecteur à [[AS],[CT],[MK],[JP],[KI],[VK]-[KP]]. En particulier, dans [MY]. Wang a étudié l'équation du quatrième ordre de type Kirchhoff suivante :

$$\begin{cases} \Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \cdot \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_4)$$

où λ est un paramètre positif, les auteurs ont montré qu'il existe λ^* telle que l'équation elliptique du quatrième ordre a une solution non triviale pour $0 < \lambda < \lambda^*$.

En utilisant les techniques itératives de théorème du col et la méthode de troncature. Massar et Al. [MT] utilise une version lisse du principe variationnel de Ricceri. [RC], les auteurs ont assuré l'existence d'une infinité de solutions pour des problèmes elliptiques de type Kirchhoff du quatrième ordre.

Dans [FS], en utilisant des méthodes variationnelles et la théorie des points critiques, les auteurs établissent la multiplicité des résultats de solutions non triviales et non négatives pour un quatrième ordre problème elliptique de type Kirchhoff, en combinant une condition algébrique sur le terme non linéaire avec la condition classique d'Ambrosetti-Rabinowitz.

Après cela, de nombreux auteurs ont étudié le problème suivant elliptique non local avec condition au bord

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \cdot \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_5)$$

Des problèmes comme \mathcal{P}_5 peuvent être utilisés pour modéliser plusieurs systèmes où u décrit un processus qui dépend de la moyenne de lui-même, comme la densité de population, voir [CT].

Motivés par ces travaux dans [GA], pour étudier le problème \mathcal{P}_{λ_2} , nous combinons le terme dominant de bi-Laplacien avec le coefficient de Kirchhoff.

2 Présentation

Notre travail dans ce mémoire consiste à l'étude d'une classe des problèmes elliptique d'ordre quatre du type Kirchhoff associés à l'opérateur le bi-laplacien dans un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 5$).

La forme générale de notre problème est :

$$\Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \cdot \Delta u = f(x, u) \quad \text{in } \Omega,$$

soumises aux conditions suivantes :

$$\Delta u = u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution positive. En ce qui concerne l'existence et la positivité nous utilisons une méthode basée sur la théorie des points critiques. Cette méthode a été initiée par (Otared Kavian). La majorité des travaux traités par cette méthode, basée sur la recherche des points critiques de la fonction d'énergie associée au problème. Et pour obtenir l'unicité de solution en utilisant une technique basée sur l'absurde qui a permis d'arriver à l'unicité de solution.

La rédaction de ce mémoire est structurée comme suit :

Chapitre I : intitulé "**Résultat d'existence et d'unicité pour un problème biharmonique de type Kirchhoff**"

On s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité du problème elliptique non linéaire de type Kirchhoff suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 u - (a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b) \Delta u + cu = f(x)|u|^{-\gamma} - \lambda|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda_1})$$

Le chapitre I se divise en quatre sections.

Dans la première section, nous donnons la position de notre problème, la seconde et la troisième section nous présenterons quelques résultats techniques utiles pour la démonstrations de notre théorème fondamental qui sera prouvé dans la dernière section.

Chapitre II : intitulé "**Problèmes elliptique non linéaire avec des conditions de Navier-Stokes**"

Dans le deuxième chapitre nous étudions un autre problème différent de précédent problème. Ce problème est une généralisation au premier problème, le nouveau problème est le suivant.

$$\begin{cases} (a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b)^{\theta-1} \Delta^2 u = f(x)|u|^{-\gamma} - \lambda|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda_2})$$

Remarque :

Sans perte de généralité si on prend $\theta = 2$, on revient au premier problème.

Ce chapitre se divise en quatre parties.

La première section nous posons notre problème et nous établissons le cadre fonctionnel de ce problème, et la deuxième et troisième section nous prouvons quelques résultats et lemmes techniques qui seront utiles dans la preuve de résultat principal, et nous terminons ce chapitre par la démonstration du fameux théorème.

L'approche utilisée pour l'étude de l'existence et l'unicité de la solution positive de \mathcal{P}_{λ_1} et \mathcal{P}_{λ_2} est variationnelle, elle est basée sur la minimisation des fonctionnelles associées aux problèmes.

Chapitre III : intitulé "**Annexe**"

Cet annexe est achevé notre travail, nous rappelons quelques notions de base dans le cadre d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre étude aussi nous citons les principaux théorèmes qui nous permettent de trouver nos résultats.

Nous achevons par une **conclusion et perspectives** où nous présentons deux nouveaux problèmes.

Préparation de mémoire

On a utiliser les outils suivants pour la réalisation de ce mémoire.

L^AT_EX : pour la production de ce mémoire.

Geogebra : pour réaliser les graphes.

RÉSULTAT D'EXISTANCE ET D'UNICITÉ POUR UN PROBLÈME BIHARMONIC DE TYPE KIRCHHOFF

Sommaire

1.1	Introduction	13
1.2	Résultats auxiliaires	16
1.3	Quelques lemmes essentielles	21
1.4	Théorème fondamental	28

1.1 Introduction

Dans ce travail^①, on est intéressé par une classe des problèmes elliptiques, qui contient l'opérateur le bilaplacien est un terme singulier, de type Kirchhoff^②

$$\begin{cases} \Delta^2 u - (a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b) \Delta u + cu = f(x)|u|^{-\gamma} - \lambda|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda})$$

où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 5$), et Δ^2 l'opérateur le bilaplacain, et ∇u le gradient de u et $0 < \gamma < 1$, $\lambda > 0$, $0 < p \leq 2^{\sharp}$ et a, b, c , trois constantes positives avec $a + b > 0$ et $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = \frac{2^{\sharp}}{2^{\sharp} + \gamma - 1}$, satisfaisant $f(x) > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$, et $2^{\sharp} = \frac{2n}{n-4}$ est appelé l'exposant critique de Sobolev^③ pour l'injection $H^2 \hookrightarrow L^{2^{\sharp}}(\Omega)$.

①. Ce travail est l'objet de l'article publié à Korean Mathematical Society, par M^r K.TAHRI [TY]

②. Gustav Robert Kirchhoff né le 12 mars 1824 à Königsber et et décédé le 17oct à berlin .

③. Sergueï Lvovitch Sobolev 6 octobre 1908 - 3 janvier 1989 est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique .

Dans ce chapitre, on donne tout d'abord la position de notre problème, après on cite la fonctionnelle d'énergie et la formulation variationnelle correspondent, ensuite on donnera quelques résultats techniques qui vont nous servir pour démontrer le grand théorème qui montre l'existence et l'unicité de la solution du problème.

Hypothèses 1.1.

Pour exposer nos résultats, on rappelle en premier lieu les hypothèses dont on va faire l'usage dans ce chapitre.

(H¹). $0 < \gamma < 1$ et $0 < p \leq 2^\# := \frac{2n}{n-4}$.

(H²). $f \in L^q(\Omega)$ avec $q := \frac{2^\#}{2^\# + \gamma - 1}$, et $f(x) > 0$ presque partout sur $x \in X$.

(H³). pour tout $x \in X$:

$$\|u\|_X^2 := \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + a|\nabla u|^2 + cu^2 dx.$$

Définition 1. Soient $H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ deux espaces de Sobolev, nous définissons la norme dans l'espace $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ par :

$$\|u\|_X^2 := \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + b|\nabla u|^2 + cu^2 dx.$$

Preuve 1.

On a :

$$\begin{aligned} \|u\|_x^2 &:= \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + b|\nabla u|^2 + c|u|^2 dx. \\ \|u\|_x^2 &= \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + b\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

$\|u\|_X^2$ est une norme, en effet :

N1) l'identité : $\forall u \in X. \|u\|_x = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} u = 0.$

$$\|u\|_x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, & \begin{cases} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = 0, & (1) \\ b\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0, & (2) \\ c\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0. & (3) \end{cases} \end{cases}$$

2) $\|\nabla u\| = 0 \Rightarrow u = 0.$

Par l'inégalité de Poincaré^④ on a :

$$0 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad c > 0.$$

Par conséquent :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

④. Henri Poincaré : un mathématicien, physicien théoricien et philosophe né le 1854 et mort le 1912.

3) $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow u = 0$ (car $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme dans $L^2(\Omega)$)

D'après l'équation (2) et (3) on en déduit que l'équation (1) donne

$$\|\Delta u\| = 0 \Rightarrow u = 0,$$

D'ou :

$$\|u\|_X = 0 \Rightarrow u = 0.$$

N2) l'homogénéité : $\forall u \in \mathbb{K}, \|\lambda u\|_X \stackrel{?}{=} |\lambda| \|u\|_X.$

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_X^2 &= \int_{\Omega} |\Delta(\lambda u)|^2 + b \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u)|^2 + c \int_{\Omega} (\lambda u)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\lambda|^2 |\Delta u|^2 + b \int_{\Omega} |\lambda|^2 |\nabla u|^2 + c \int_{\Omega} |\lambda|^2 |u|^2 dx. \\ \|\lambda u\|_X^2 &= \int_{\Omega} |\Delta(\lambda u)|^2 + b \int_{\Omega} |\nabla(\lambda u)|^2 + c \int_{\Omega} (\lambda u)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\lambda|^2 |\Delta u|^2 + b \int_{\Omega} |\lambda|^2 |\nabla u|^2 + c \int_{\Omega} |\lambda|^2 |u|^2 dx \\ &= |\lambda|^2 \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + b |\lambda|^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + c |\lambda|^2 \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= |\lambda|^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

D'ou :

$$\|\lambda u\|_X = |\lambda| \|u\|_X.$$

N3) Inégalité triangulaire : $\forall u, v \in X, \|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X.$

$$\begin{aligned} \|u + v\|_X^2 &= \int_{\Omega} |\Delta(u + v)|^2 + b \int_{\Omega} |\nabla(u + v)|^2 + c \int_{\Omega} |u + v|^2 dx \\ &= \|\Delta(u + v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \|\nabla(u + v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \|u + v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

comme $\|\Delta(u + v)\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla(u + v)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u + v\|_{L^2(\Omega)}$ sont des normes dans l'espace $L^2(\Omega)$

alors :

$$\begin{aligned} \|\Delta(u + v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|\nabla(u + v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|u + v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u + v\|_X^2 &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 + b \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + c \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \|u\|_X^2 + \|v\|_X^2. \end{aligned}$$

D'ou :

$$\|u + v\|_X^2 \leq \|u\|_X^2 + \|v\|_X^2.$$

$$\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X.$$

Finalement d'après N1, N2 et N3, ondduitque $\|u\|_X$ est une norme dans X .

1.2 Résultats auxiliaires

Dans cette section, on donne deux résultats essentiels qui nous aiderons dans l'étude du problème cité précédemment.

1.2.1 Fonctionnelle d'énergie du problème (\mathcal{P}_λ)

La Fonctionnelle d'énergie associée au problème \mathcal{P}_{λ_2} est :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{a}{4} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x)|u|^{1-\gamma} dx$$

Preuve 2. Soit u une fonction test. Nous multiplions chaque membre de la première ligne de \mathcal{P}_{λ_2} par u et intégrant ensuit sur Ω ,

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta^2 u \cdot u dx - \int_\Omega \left(a \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b \right) \Delta u \cdot u dx + \int_\Omega cu \cdot u dx \\ = \int_\Omega f(x)|u|^{-\gamma} \cdot u dx - \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} u \cdot u dx. \end{aligned} \quad (1.1)$$

l'équation (1.1) devient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta \Delta u \cdot u dx - \left(a \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b \right) \int_\Omega \Delta u \cdot u dx + c \int_\Omega u^2 dx \\ = \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx - \int_\Omega \lambda |u|^p dx. \end{aligned} \quad (1.2)$$

En appliquant la formule de Green ^⑤ dans l'équation (1.2) on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_\Omega \nabla \Delta u \cdot \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u ds + \left(a \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + b \right) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u ds + c \int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx - \int_\Omega \lambda |u|^p dx. \end{aligned} \quad (1.3)$$

⑤. George Green (1793-1841), physicien britannique, qui travailla sur les applications de l'analyse à l'électricité et au magnétisme

Grâce à la condition au bord ($\Delta u = u = 0$) l'équation (1.3) devient :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla u \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u \, ds}_{=0} + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx \\
 & + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u \, ds}_{=0} + c \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-\gamma} \, dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^p \, dx.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

En appliquant la formule de Stokes[®] pour le premier terme on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta u \, dx + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + c \int_{\Omega} u^2 \, dx \\
 & = \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-\gamma} \, dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^p \, dx.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Etablissant maintenant les termes suivants :

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} I_1(u) &= \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx. & \textcircled{4} I_4(u) &= c \int_{\Omega} |u|^2 \, dx. \\
 \textcircled{2} I_2(u) &= a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx. & \textcircled{5} I_5(u) &= \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-\gamma} \, dx. \\
 \textcircled{3} I_3(u) &= b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.
 \end{aligned}$$

Pour arriver à la fonctionnelle d'énergie on dérivie $I_i(u)$ pour ($i = 1, \dots, 5$) au sens de Gateaux-différentiable

On note le calcul suivant par (☆☆) pour que les étapes facile à comprendre,

- $I_1(u) = \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx.$

$$\langle I_1(u), u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + tu) - I_1(u)}{t} = 2 \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx.$$

- $I_2(u) = a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$

$$\langle I_2(u), u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2(u + tu) - I_2(u)}{t} = 2a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

®. George Gabriel Stokes (1819-1903), 1er baron, A. Ses principales contributions concernent la mécanique des fluides .

- $I_3(u) = b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$

$$\langle I_3(u), u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_3(u + tu) - I_3(u)}{t} = 2b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

- $I_4(u) = c \int_{\Omega} |u^2| dx.$

$$\langle I_4(u), u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_4(u + tu) - I_4(u)}{t} = 2c \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

- $I_5(u) = \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx.$

$$\begin{aligned} \langle I_5(u), u \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_5(u + tu) - I_5(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} f(x)|u + tu|^{1-\gamma} dx - \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) dx |u|^{1-\gamma} \left[\frac{(1+t)^{1-\gamma} - 1}{t} \right] \\ &= \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} \cdot (1-\gamma) dx. \\ \text{car } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{1-\gamma} - 1}{t} &= h'(0) = (1-\gamma) \text{ avec } h(t) = (1+t)^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

- $I_6(u) = \int_{\Omega} \lambda |u|^p dx$

$$\begin{aligned} \langle I_6(u), u \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_6(u + tu) - I_6(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} \lambda |u + tu|^p dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^p dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \lambda |u|^p \left[\frac{(1+t)^p - 1}{t} \right] \\ &= \int_{\Omega} \lambda |u|^p \cdot p dx. \\ \text{car } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^p - 1}{t} &= h'(0) = p \text{ avec } h(t) = (1+t)^p. \end{aligned}$$

Ce calcul a été effectué lorsqu'on va remplacer dans l'équation 1.5 on divise chaque terme dans la relation

(☆☆) par le coefficient qui lui correspond, pour obtenir l'équation suivant

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + \frac{a}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^2 + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + c \int_{\Omega} u^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx. \end{aligned}$$

Finalemment on obtient la fonctionnelle d'énergie recherchée

$$\frac{1}{2} \left(\|u\|_X^2 + \frac{a}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \right) = \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

■

1.2.2 Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_{λ})

Définition 2. Soit $u \in X$ est une solution faible de \mathcal{P}_{λ_2} si $\forall v \in X$.

La Formulation variationnelle associée au problème \mathcal{P}_{λ_2} est :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta v + c \cdot u \cdot v) dx + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ = \int_{\Omega} f(x)|u|^{-\gamma} \cdot v dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} \cdot u \cdot v dx. \end{aligned}$$

Preuve 3. On multiplie chaque membre de la première équation de \mathcal{P}_{λ_2} par v (une fonction test) et puis en intégrant sur Ω , il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v dx - \int_{\Omega} \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b \right) \Delta u \cdot v dx + \int_{\Omega} cu \cdot v dx \\ = \int_{\Omega} f(x)|u|^{-\gamma} \cdot v dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot v dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \Delta u \cdot v dx - \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b \right) \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + c \int_{\Omega} u \cdot v dx \\ = \int_{\Omega} f(x)|u|^{-\gamma} \cdot v dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} \cdot u \cdot v dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En appliquant la formule de Green dans l'équation (1.7) on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v ds + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v ds + c \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f(x)|u|^{-\gamma} \cdot v dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} \cdot u \cdot v dx. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Grâce à la condition au bord ($\Delta u = u = 0$) l'équation (1.8) devient :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla v \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, ds}_{=0} + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \\
 & \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, ds}_{=0} + c \int_{\Omega} u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} \cdot u \cdot v \, dx.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

En appliquant la formule de Stokes pour le premier terme on arrive à :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + c \int_{\Omega} u \cdot v \, dx \\
 & = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot v \, dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} \cdot u \cdot v \, dx.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Après une simplification on aura :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta v + c \cdot u \cdot v) \, dx + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\
 & = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot v \, dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} \cdot u \cdot v \, dx.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

On introduit une forme bilinéaire $a(.,.)$ telle que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta v + c \cdot u \cdot v) \, dx + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

et une forme linéaire $\mathcal{L}(v)$ telle que

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot v \, dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} \cdot u \cdot v \, dx.$$

On a donc obtenu le résultat suivant :

Si u est une solution de \mathcal{P}_{λ_2} , alors u doit aussi satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a(u, v) = \mathcal{L}(v) & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{\mathcal{P}_F}$$

On dit que \mathcal{P}_F est la formulation variationnelle de \mathcal{P}_{λ_2} .

1.3 Quelques lemmes essentielles

Dans cette section, on cite quelques résultats techniques qu'on va utiliser dans la démonstration de notre théorème.

Avant d'entamer cette section on a l'injection suivante $X \hookrightarrow L^{2^\#}(\Omega)$ est compact pour tout $1 \leq p < 2^\#$.

Fortement sollicitées et surtout incontournables dans l'étude variationnelle, cet injection avantageuse vont prendre part dans notre travail, dans le cadre de cette section, on se limite au résultat d'injection ci-dessus. Pour plus de détail sur les injections de Sobolev, on pourra se reporter à un ouvrage de référence sur le sujet, par exemple [[Bre], Chapitre IX, et l'annexe].

Lemme 1.1. *La fonctionnelle d'énergie J_λ est coercive et bornée inférieurement dans X .*

- i) J_λ est coercive i.e : $\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} J_\lambda(u) = +\infty$.
- ii) J_λ est bornée inférieurement i.e : $\forall u \in X, \exists c > 0$ tel que $J_\lambda(u) \geq c$.

Preuve 4.

- i) Pour la coercivité, montre que : $\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} J_\lambda(u) = +\infty$.

on a :

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{a}{4} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx.$$

puisque $0 < \gamma < 1$, $\lambda > 0$, et en utilisant l'inégalité de Hölder^⑦ avec $f = f(x)$ et $g = |u|^{1-\gamma}$,
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p = \frac{2^\#}{1-\gamma}$, $q = \frac{2^\#}{2^\# + \gamma - 1}$

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx \right| &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{\frac{2^\#}{2^\# + \gamma - 1}} dx \right)^{\frac{2^\# + \gamma - 1}{2^\#}} \times \left(\int_\Omega |u|^{(1-\gamma)\frac{2^\#}{1-\gamma}} dx \right)^{\frac{1-\gamma}{2^\#}} \\ &= \|f\|_{L^q(\Omega)} \times \|u\|_{L^{2^\#}(\Omega)}^{1-\gamma} \quad \text{avec } q = \frac{2^\#}{2^\# + \gamma - 1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

De plus on a :

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^\#}(\Omega), \quad \text{et } X \hookrightarrow H^2(\Omega).$$

Donc $X \hookrightarrow L^{2^\#}(\Omega)$, s'il existe $\Lambda > 0$ telle que $\forall u \in X$:

$$\|u\|_{L^{2^\#}(\Omega)}^{1-\gamma} \leq (1-\gamma)\Lambda \|u\|_X^{1-\gamma}.$$

⑦. Otto Hölder : mathématicien allemand, né le 22 décembre 1859 à Stuttgart, mort le 29 août 1937 à Leipzig.

D'ou :

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{a}{4} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} f(x)|u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma}$$

$$J_{\lambda}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{a}{4} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^2 - \Lambda \|u\|_X^{(1-\gamma)}.$$

car (2 le plus haut degré que $(1 - \gamma)$).

Par passage à la limite :

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \lambda \|u\|_X^{1-\gamma} = \lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} \|u\|_X^2$$

$$= +\infty.$$

Finalement

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} J_{\lambda}(u) = +\infty.$$

D'ou la coercivité de $J_{\lambda}(u)$.

ii) Montrons maintenant que $J_{\lambda}(u)$ est borné inférieurement dans X il y a deux cas :

•**1^{ere} cas :** Si $\|u\|_X \geq 1$ et $0 < \gamma < 1$.

On a :

$$J_{\lambda}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \Lambda \|u\|_X^{1-\gamma}$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|_X^{1-\gamma} - \Lambda \|u\|_X^{1-\gamma} \text{ car } \|u\|_X^2 \geq \|u\|_X^{1-\gamma}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \Lambda \right) \|u\|_X^{1-\gamma}.$$

•**2^{eme} cas :** Si $\|u\|_X \leq 1$ et $0 < \gamma < 1$.

On a :

$$\|u\|_X \leq 1$$

$$\|u\|_X^{1-\gamma} \leq 1^{1-\gamma} = 1$$

$$-\Lambda \|u\|_X^{1-\gamma} \geq -\Lambda$$

$$J_{\lambda}(u) \geq -\Lambda \|u\|_X^{1-\gamma} \geq -\Lambda$$

$$J_{\lambda}(u) \geq -\Lambda.$$

Donc J_{λ} est bornée inférieurement.

Finalement on obtient le résultat de ce lemme (1.1). ■

1.3. QUELQUES LEMMES ESSENTIELLES

Lemme 1.2. *La fonctionnelle d'énergie J_λ admet un minimum m_λ dans X avec $m_\lambda < 0$.*

Preuve 5. *D'après le lemme(1.1) J_λ est coercive et bornée inférieurement dans X , alors*

$$m_\lambda := \inf_{u \in X} J_\lambda(u).$$

puisque $0 < \gamma < 1$ et $f(x) > 0$, par tout $x \in \Omega$, on a $J_\lambda(t\rho) < 0$ et pour tout $\rho \neq 0$, et $t > 0$ très petit

$$J_\lambda(t\rho) = \frac{1}{2} \|t\rho\|_X^2 + \frac{a}{4} \left(\int_\Omega |\Delta t\rho|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{\rho} \int_\Omega f(x) |t\rho|^p dx \\ + \frac{1}{\gamma - 1} \int_\Omega f(x) |t\rho|^{1-\gamma} dx.$$

Il vient :

$$J_\lambda(t\rho) = \frac{t^2}{2} \|\rho\|_X^2 + \frac{at^4}{4} \left(\int_\Omega |\Delta t\rho|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{\rho} \int_\Omega f(x) |t\rho|^p dx \\ + \frac{1}{\gamma - 1} \int_\Omega f(x) |t\rho|^{1-\gamma} dx.$$

En remarquant que (le dernier terme est négative et les degrés des trois premiers termes est supérieure que le degré du dernier terme) i.e. le dernier terme est supérieure que les autres termes.

Si on tendre t vers 0, le terme négative donne la contribution principale.

Finalement on obtient :

$$J_\lambda(t\rho) < 0.$$

D'où

$$m_\lambda := \inf_{u \in X} J_\lambda(u) < 0.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme (1.2) ■

(Voir la Figure2.1 pour la construction géométrique)

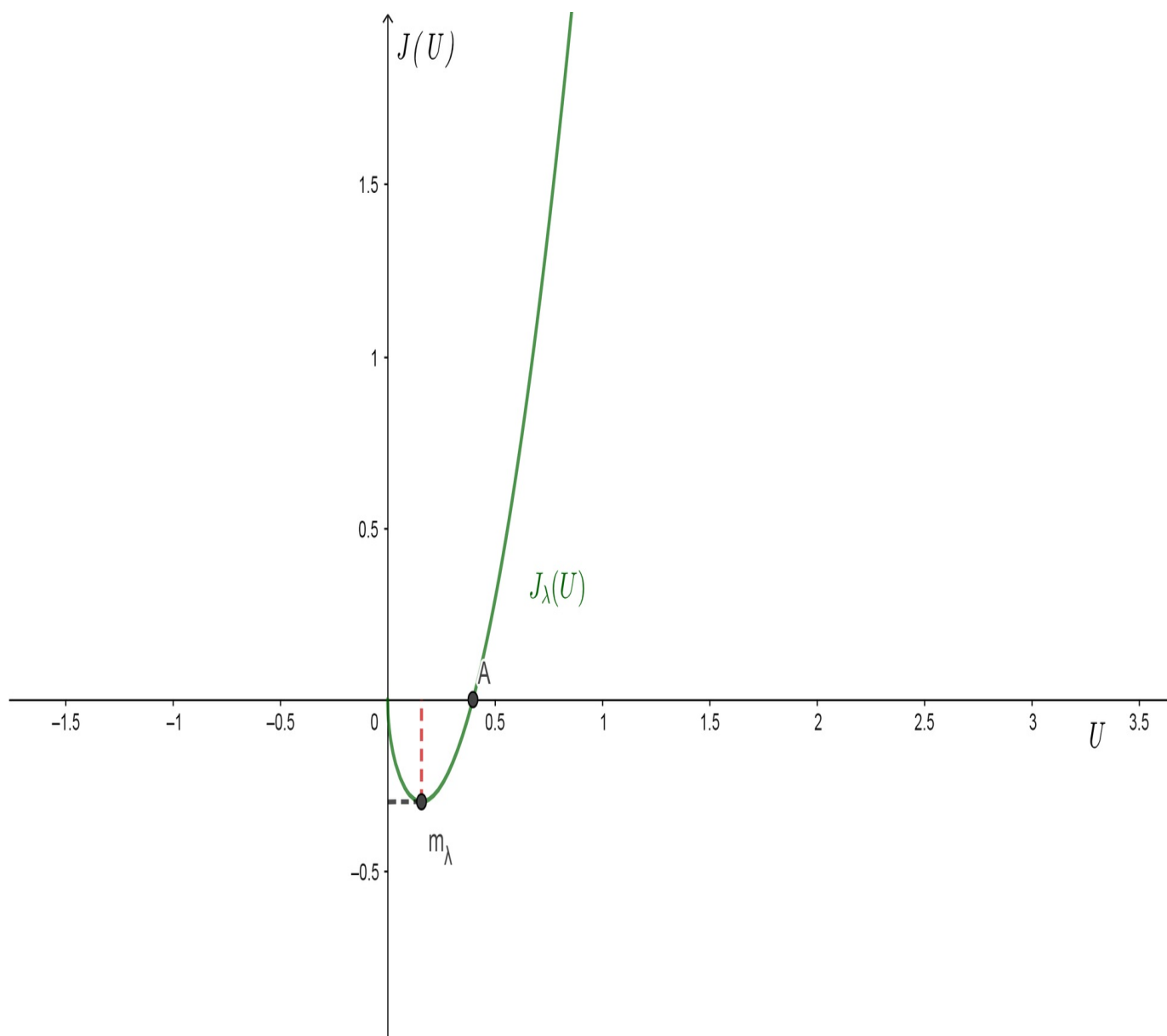


FIGURE 1.1 – Graphe de $J_\lambda(u)$.

Définition 3. (Suite minimisante)

Une suite minimisante pour une fonctionnelle $J_\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une suite $(u_n)_n$ telle que $J_\lambda(u_n) \rightarrow \inf J_\lambda$ quand $n \rightarrow \infty$.

R1 L'existence d'une suite minimisante est assurée en particulier quand J_λ est coercive et borné inférieurement .

R2 Un outil essentiel dans le calcul de la variation est la compacité des suites minimisantes.

Lemme 1.3. Sous les hypothèses $(H^1), (H^2)$ et (H^3) la fonctionnelle J_λ atteint son minimum global dans X , au point $u^* \in X$ avec,

$$m_\lambda := J_\lambda(u^*) < 0.$$

Preuve 6. Pour prouver que l'infimum global m_λ est atteint considérons une suite minimisante

D'après le lemme (1.1) J_λ est coercive et borné inférieurement dans X , on conclut qu'il existe une suite minimisante $(u_m)_m$ dans X telle que :

$$J_\lambda(u_m) \longrightarrow m_\lambda := \inf_{u \in X} J_\lambda(u), \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

D'après le lemme (1.1) la suite $(u_m)_m$ est bornée dans X .

Pour suivre la preuve, montrons dans un premier temps que $(u_m)_m$ est bornée dans X .

En effet : supposons par l'absurde que $(u_m)_m$ n'est pas bornée, c'est-à-dire :

$$\|u_m\| \rightarrow +\infty, \quad \text{pour } m \rightarrow +\infty.$$

Puisque J_λ est coercive on a :

$$\lim_{\|u_m\| \rightarrow +\infty} J_\lambda(u_m) = +\infty.$$

On obtient une contradiction avec $(u_m)_m$ une suite minimisante, alors $(u_m)_m$ est bornée dans X .

1.3. QUELQUES LEMMES ESSENTIELLES

Comme X est réflexif alors on peut extraire une sous-suite notée $(u_m)_m$ qui converge faiblement vers un point $u^* \in X$.

Sachant que l'injection de Sobolev $X \hookrightarrow L^{2^\#}(\Omega)$ est compact pour tout $1 \leq p < 2^\#$ alors toutes suites converge faiblement on peut donc extraire une sous-suite (toujours notée $(u_m)_m$) converge fortement vers un point $u^* \in L^{2^\#}(\Omega)$.

D'autre part on a $(u_m)_m$ converge fortement dans $L^{2^\#}(\Omega)$ et comme Ω est un domaine borné on en déduit que $(u_m)_m$ converge vers u^* presque partout sur Ω .

D'après ce qui précède on arrive à :

- (1) $u_m \rightharpoonup u^*$ faiblement dans X .
- (2) $u_m \rightarrow u^*$ fortement dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < 2^\#$.
- (3) $u_m(x) \rightarrow u^*(x)$ presque partout sur Ω .

Après ces préliminaires, on peut montrer que $w_m = u_m - u^*$ converge vers 0 fortement dans X .

En utilisant le théorème de Vitali^⑧ on obtient :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x)|u_m|^{1-\gamma} dx = \int_{\Omega} f(x)|u^*|^{1-\gamma} dx.$$

Et en vertu du Lemme de Brézis^⑨ - Lieb^⑩ on aura :

$$\|u_m\|_X^2 - \|w_m\|_X^2 = \|u^*\|_X^2 + o(1)$$

et

$$\int_{\Omega} h(x)|u_m|^{2^\#} dx = \int_{\Omega} h(x)|w_m|^{2^\#} dx + \int_{\Omega} h(x)|u^*|^{2^\#} dx + o(1).$$

D'où $o(1)$ est un infinitésimal quand $m \rightarrow +\infty$.

⑧. Giuseppe Vitali(1875-1932) était un mathématicien italien qui a travaillé dans diverses branches de l'analyse, y compris la théorie des mesures.

⑨. Haïm Brezis (1944) est un mathématicien français, de renommée internationale, spécialisé dans l'analyse fonctionnelle et les équations aux dérivées partielles.

⑩. Elliott H. Lieb 1932 est un physicien américain, professeur de mathématiques et physique. Ses spécialités sont la mécanique statistique, la théorie de la matière condensée et l'analyse fonctionnelle. .

1.3. QUELQUES LEMMES ESSENTIELLES

On doit ici traiter différemment les deux cas suivants : $0 < p < 2^\#$ et $p = 2^\#$.

•**Première cas :** Pour $0 < p < 2^\#$.

Nous avons

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \lim_{m \rightarrow +\infty} J_\lambda(u_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \|u_m\|_X^2 + \frac{a}{4} \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega h(x) |u_m|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int_\Omega f(x) |u_m|^{1-\gamma} dx \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\|w_m\|_X^2 + \|u^*\|_X^2) + \frac{a}{4} \left(\int_\Omega |\nabla u^*|^2 dx \right)^2 + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega h(x) |u^*|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int_\Omega f(x) |u^*|^{1-\gamma} dx \\ & \qquad \qquad \qquad m_\lambda = J_\lambda(u^*) + \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow +\infty} \|w_m\|_X^2. \end{aligned}$$

D'autre part nous avons :

$$m_\lambda = J_\lambda(u^*) + \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow +\infty} \|w_m\|_X^2 \geq J_\lambda(u^*) \geq \inf_{u \in X} J_\lambda(u_m) = m_\lambda.$$

Par suite,

$$m_\lambda = J_\lambda(u^*).$$

Ce qui implique

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} w_m = 0.$$

•**Deuxième cas :** Dans l'autre cas, $p = 2^\#$.

De même façons, nous avons

$$m_\lambda = J_\lambda(u^*) + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \|w_m\|_X^2 + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega h(x) |w_m|^p dx \right).$$

D'autre part on a :

$$m_\lambda \geq J_\lambda(u^*) \geq m_\lambda$$

Par suite,

$$m_\lambda = J_\lambda(u^*).$$

Ce qui donne

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} w_m = 0.$$

Pour résumer, nous avons montré que $m_\lambda = J_\lambda(u^*)$, pour les deux cas $0 < p < 2^\#$ et $p = 2^\#$,

Nous en déduisons aisément que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|w_m\|_X = 0.$$

Donc, on conclut que l'infimum m_λ est bien atteint.

$$\inf_{u_m \in X} J_\lambda(u_m) = J_\lambda(u^*).$$

■

1.4 Théorème fondamental

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{P}_{λ_2} introduit dans la section (1.1) de ce chapitre. Cette étude est résumée dans le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Sous (H^1) , (H^2) et (H^3) . Le problème (J_λ) admet une solution positive et unique. De plus cette solution est le minimum global.*

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin d'énoncer quelques propriétés de la théorie spectrale des opérateurs.

1.5.1 Valeur propre de l'opérateur le bilaplacien

Dans cette sous-section on définit la valeur et la fonction propre associées à l'opérateur le bilaplacien.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda_1 u, \\ \Delta u = u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda_1})$$

Définition 4. *Une solution faible du problème \mathcal{P}_{λ_1} est une fonction non nulle $u \in X$, telle que pour tout $v \in X$.*

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \lambda_1 \int_{\Omega} u v dx. \quad (1.13)$$

Existence de la première valeur propre

Définition 5. *On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur bilaplacien, si le problème \mathcal{P}_{λ_1} admet une solution faible $u \in X$ non-nulle.*

La fonction u est appelée fonction propre. On dit aussi que (u, λ) est une solution propre de 1.13

Si on remplace v par $u \in X$ dans 1.13, on obtient λ comme le quotient fonctionnel suivant :

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}. \quad (1.14)$$

Ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh ^❶

Définition 6. La première valeur propre de l'opérateur bilaplacien notée λ_1 est définie par :

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X} \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}. \quad (1.15)$$

et la fonction u associée à cette valeur propre s'appelle première fonction propre.

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant

Théorème 1.2. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et régulier alors λ_1 définie par 1.15, existe et strictement positive, de plus il existe une fonction $u \in X \setminus \{0\}$ telle que

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X} \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}. \quad (1.16)$$

La fonction u peut être choisit positive et satisfait l'équation 1.13, u appelée la première fonction propre.

Pour une étude complète et détaillée, nous renvoyons le lecteur à B. Kawohl ([KP]) et P. Lindqvist ([PL]).

❶. John William Strutt Rayleigh troisième baron Rayleigh, plus connu sous son titre lord Rayleigh (12 novembre 1842 à Landford Grove, Essex, Angleterre - 30 juin 1919 à Witham, Essex, Angleterre) était un physicien anglais. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1904.

Après avoir citer les résultats importants, maintenant on peut donner une démonstration du fameux théorème (1.1).

Preuve de Théorème 1.1.

Nous utiliserons une approche variationnelle basée sur la Théorie des Points Critique pour prouver l'existence d'une solution positive et pour l'unicité on utilise une technique d'analyse standard basée sur l'absurde.

Nous procédons en deux étapes.

• **La Première étape :** il suffit de prouver que u^* est une solution positive du problème (J_λ) dans Ω .

D'après le lemme (1.2) on a :

$$m_\lambda := J_\lambda(u^*) < 0.$$

Ainsi que $u_*(x) \not\equiv 0$ dans Ω .

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \phi \geq 0, \text{ et } t > 0, t \in \mathbb{R}, \text{ tel que } (u_* + t\phi) \in H_0^1(\Omega).$$

On a :

$$\min J_\lambda(u_* + t\phi) = J_\lambda(u_* + t\phi)|_{t=0} = J_\lambda(u_*), \forall \phi \in X.$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta u^* \Delta \phi + cu^* \phi) dx + (a \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dx + b) \times \int_{\Omega} (\nabla u^* \nabla \phi) dx \\ &= -\lambda \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* \phi dx + \int_{\Omega} \frac{f(x)}{|u^*|^\gamma} \phi dx. \\ & 0 \leq \frac{J_\lambda(u_* + t\phi) - J_\lambda(u^*)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\|u^* + t\phi\|_X^2 - \|u^*\|_X^2}{t} \right) \\ &+ \frac{a}{4t} \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u^* + t\phi|^2 dx \right)^2 - \left(\int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dx \right)^2 \right] \\ &- \frac{1}{\gamma-1} \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^{1-\gamma} - |u^*|^{1-\gamma}}{t} \right) dx \\ &+ \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right) dx. \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.4. THÉORÈME FONDAMENTAL

Pour calculer cette limite, on va appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue^② et le théorème de la convergence monotone pour les deux derniers termes.

Concernant le dernier terme On va commencer tous d'abord par la vérification des hypothèses de théorème de la convergence dominée

On pose :

$$f_t(x) = h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right).$$

• Pour la première hypothèse :

$f_t(x)$ converge vers une fonction $f(x)$ mesurable :

1ère méthode

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right) = h(x)k'(0) = h(x) |u^*|^{p-2} u^* \phi$$

avec, $k(t) = \frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t}$.

D'où :

$$f_t(x) \longrightarrow f(x).$$

2ème méthode

On sait que : **la limite d'une fonction mesurable est une fonction mesurable.**

on a :

$$f_t(x) = h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right)$$
$$h(x) \in L^q(\Omega) \implies h(x) \text{ est mesurable}$$
$$|u^* + t\phi|^p \in H_0^1(\Omega) \implies |u^* + t\phi|^p \text{ est mesurable.}$$

Alors le produit de deux fonctions mesurables est mesurable.

②. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) :est l'un des grands mathématiciens français Il est reconnu pour sa théorie d'intégration .

1.4. THÉORÈME FONDAMENTAL

Par conséquence :

la fonction $f_t(x)$ est mesurable , alors sa limite est une fonction mesurable

D'ou :

$$f_t(x) \longrightarrow f(x).$$

•Pour l'hypothèse de domination :

on a :

$$|u + tv|^p = |u + t\phi|^p |u + t\phi|^{p-1}.$$

D'après l'inégalité triangulaire on a :

$$|u + t\phi| < |u| + |t\phi| \leq |u| + |\phi|.$$

De plus :

$$\begin{aligned} |u + t\phi| (u + t\phi)^{p-1} &\leq |u| + |\phi| (u + t\phi)^{p-1} \\ |u + t\phi|^p &= |u + t\phi|. |u + t\phi|. |u + t\phi| \dots \dots p \text{ fois} \\ &< (|u| + |\phi|). (|u| + |\phi|). (|u| + |\phi|) \dots \dots p \text{ fois} \\ &= (|u| + |\phi|)^p. \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$|u + t\phi|^p < (|u| + |\phi|)^p$$

D'autre part on a :

$$0 < t < 1.$$

On pose $\exists a$ telque :

$$\begin{aligned} a < t < 1 &\Rightarrow 1 < \frac{t}{a} < \frac{1}{a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Par ailleurs on déduit que :

$$\begin{aligned} |u + t\phi|^p &\leq (|u| + |\phi|)^p \\ \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} &\leq \frac{(|u| + |\phi|)^p}{a} \\ h(x) \frac{|u + t\phi|^p - |u|^p}{t} &\leq h(x) \frac{(|u| + |\phi|)^p}{a} \\ f_t(x) &\leq g(x) = h(x) \frac{(|u| + |\phi|)^p}{a}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$g(x) = h(x) \frac{(|u| + |\phi|)^p}{a} \in L^1(\Omega).$$

• Les hypothèses de théorème de la convergence dominée sont vérifiées donc il est applicable.

D'où :

$$\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right) dx = \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* \phi dx. \quad (1.18)$$

Concernant l'avant dernier terme commençons tous d'abord pour la vérification des hypothèses de théorème de la convergence monotone.

Soit $f_t(x)$ une suite croissante des fonctions mesurables positives.

En notant $f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_t = \sup_{t \geq 1} f_t$. Pour tout $x \in \Omega$, on pose :

$$g(t) := f(x) \left(\frac{|u^*(x) + t\phi(x)|^{1-\gamma} - |u^*(x)|^{1-\gamma}}{(\gamma - 1)t} \right).$$

Alors

$$g'(t) := f(x) \left(\frac{(u^*(x))^{1-\gamma} - (\gamma t \phi(x) + u^*(x)) |u^*(x) + t\phi(x)|^{-\gamma}}{(1 - \gamma)t^2} \right) \leq 0, \quad \text{car (si } a \leq b \text{ alors } a - b \leq 0).$$

Ce qui implique que $g(t)$ est décroissante pour $t > 0$. De plus, on a :

$$\sup g_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \left([u^*(x) + t\phi(x)]^{1-\gamma} \right)' \Big|_{t=0} = f(x) (u^*(x))^{-\gamma} \phi(x).$$

• Les hypothèses de théorème de la convergence monotone sont vérifiées donc il est applicable.

1.4. THÉORÈME FONDAMENTAL

Pour tout $x \in \Omega$, qui peut être $+\infty$ quand $u^*(x) = 0$ et $\phi(x) > 0$. Par conséquent, par le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\gamma - 1} \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^{1-\gamma} - |u^*|^{1-\gamma}}{t} \right) dx \right] \\ &= \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

La limite est égale $+\infty$, en combinant cela avec (1.17), pour $t \rightarrow 0^+$, il s'en suit de (1.18) que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} \phi(x) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta \phi(x) dx + (a \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dx + b) \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla \phi(x) dx \\ & + c \int_{\Omega} u^* \phi(x) dx + \lambda \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* \phi(x) dx. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Pour tout $\phi \in X$ avec $\phi > 0$.

Soit $e_1 \in X$ la première fonction propre de l'opérateur Δ^2 avec $e_1 > 0$ et $\|e_1\| = 1$. on pose $= e_1$ dans (1.19), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} e_1 dx \\ & \leq \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta e_1 dx + (a \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dx + b) \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla e_1 dx \\ & + c \int_{\Omega} u^* e_1 dx + \lambda \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* e_1 dx \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $u^* > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$.

• **La Dernière étape** : on va prouver que u^* est la solution unique du problème (J_λ) . Par absurde on suppose w^* une autre solution positive du problème (J_λ) , alors il s'en suit de (1.19) que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta w^* dx + (a \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dx + b) \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla w^* dx + c \int_{\Omega} u^* w^* dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* w^* dx - \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} w^* dx = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta w^* dx + (a \int_{\Omega} |\nabla w^*|^2 dx + b) \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla w^* dx + c \int_{\Omega} u^* w^* dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} h(x) |w^*|^{p-2} u^* w^* dx - \int_{\Omega} f(x) (w^*(x))^{-\gamma} w^* dx = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nous additionnons, membre à membre, les inégalités (1.20) et (1.21), pour avoir :

$$\begin{aligned} & a \int_{\Omega} |\nabla(u^* - w^*)|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla w^* dx + \lambda \int_{\Omega} h(x) (|u^*|^{p-2} - |w^*|^{p-2}) u^* w^* dx \\ & - \int_{\Omega} f(x) ((u^*(x))^{-\gamma} w^* - (w^*(x))^{-\gamma} u^*) dx = 0. \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} H(u^*, w^*) & := a \int_{\Omega} |\nabla(u^* - w^*)|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla w^* dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} h(x) (|u^*|^{p-2} - |w^*|^{p-2}) u^* w^* dx \\ & - \int_{\Omega} f(x) ((u^*(x))^{-\gamma} w^* - (w^*(x))^{-\gamma} u^*) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$H(u^*, w^*) \geq 0.$$

Pour simplifier les étapes on note :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} I_1(u) & = a \int_{\Omega} |\nabla(u^* - w^*)|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u^* \nabla w^* dx. & \textcircled{3} I_3(u) & = \int_{\Omega} f(x) ((u^*(x))^{-\gamma} w^* - (w^*(x))^{-\gamma} u^*) dx. \\ \textcircled{2} I_2(u) & = \lambda \int_{\Omega} h(x) (|u^*|^{p-2} - |w^*|^{p-2}) u^* w^* dx. \end{aligned}$$

L'équation 1.22 devient :

$$I_1(u) + I_2(u) + I_3(u) = 0.$$

Maintenant, on emploie les deux inégalités suivantes :

comme $0 < \gamma < 1$ et $p > 0$, on a :

$$\forall m, n > 0 : \begin{cases} (m^p - n^p)(m - n) \geq 0, \\ (m^{-\gamma} - n^{-\gamma})(m - n) \leq 0. \end{cases}$$

1.4. THÉORÈME FONDAMENTAL

Donc on obtient :

$$I_2(u) = \int_{\Omega} h(x) (|u^*|^{p-2} - |w^*|^{p-2}) u^* w^* dx \leq 0$$

et

$$I_3(u) \int_{\Omega} f(x) [(u^*(x))^{-\gamma} w^* - (w^*(x))^{-\gamma} u^*] dx \geq 0.$$

On a abandonné les termes positifs I_2 et I_3 sur le côté gauche de 1.22 on obtient :

$$\|u^* - w^*\|_X^2 < 0.$$

Alors

$$\|u_* - w_*\|^2 = 0$$

Donc

$$u_* = w_* \text{ dans } \Omega.$$

Par conséquent, u^* est une solution unique de problème (J_λ) .

Ceci termine la démonstration. ■

PROBLÈMES ELLIPTIQUE NON LINÉAIRE

AVEC DES CONDITIONS DE

NAVIER-STOKES

Sommaire

2.1 Introduction	37
2.2 Présentation du problème et hypothèses	38
2.3 Notations et cadre fonctionnel	39
2.4 Étude variationnelle	41
2.5 Principaux résultats	47
2.6 Principal resultat	55

2.1 Introduction

L'objectif, de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solution positive d'un problème elliptique, associé à l'opérateur le bilaplacien avec les conditions de Navier^①-Stokes^② au bord de Ω .

①. Henri Navier ingénieur, mathématicien français du XIXe siècle né le 1785 et mort à Paris 1836.

②. George Gabriel Stokes (1819-1903), 1er baron, A. Ses principales contributions concernent la mécanique des fluides.

2.2 Présentation du problème et hypothèses

Soit Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 5$), on considère le problème elliptique donné par :

$$\begin{cases} (a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b)^{\theta-1} \Delta^2 u = f(x)|u|^{-\gamma} - \lambda|u|^{p-2}u & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda})$$

avec Δ^2 l'opérateur le bilaplacien, et $0 < \gamma < 1$, $1 < \theta < 2$,

$\lambda > 0$, $0 < p \leq 2^{\sharp}$ des paramètres essentiels, et $f \in L^q(\Omega)$ avec, $q = \frac{2^{\sharp}}{2^{\sharp} + \gamma - 1}$, satisfaisant $f(x) > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$, et $2^{\sharp} = \frac{2n}{n-4}$, est appelé l'exposant critique de Sobolev pour l'injection $H^2 \hookrightarrow L^{2^{\sharp}}(\Omega)$.

Soient $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On introduit

→ L'opérateur de Laplace par

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \\ &= \operatorname{div}(\nabla u). \end{aligned} \quad (2.1)$$

→ L'opérateur biharmonique par

$$\Delta^2 = \nabla^4 = \sum_i \frac{\partial^4}{(\partial x_i)^4} + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^4}{(\partial x_i)^2 (\partial x_j)^2}. \quad (2.2)$$

En écrivant les expressions (2.1),(2.2) nous supposons que toutes les dérivées qui y figurent existent-disons-pour le moment, au sens usuel.

Dans le cas $N = 2$, on préfère, comme à l'accoutumée, désigner les deux variables par x et y de sorte que l'opérateur de Laplace (ou laplacien)s'écrite :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

et l'opérateur biharmonique(ou bilaplacien)s'écrit :

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

Ce travail est réparti comme suit : dans la première section on présente la position de notre problème et fournir un cadre fonctionnel à la démarche de notre étude, et dans la seconde section on donne deux résultats très utiles pour l'étude de manière variationnelle, puis dans la troisième section on développera un certain nombre des lemmes interviendront dans la preuve de notre résultat principal. Enfin dans la dernière section on prouve notre résultat principal.

N.b Durant l'intégralité de ce chapitre, Ω désigne un domaine régulier (i.e C^∞).

Hypothèses 2.1.

Dans l'étude de ce problème, on suppose les hypothèses suivantes pour que les étapes techniques soient plus commodes et facile à comprendre :

$$(H^1). \quad 0 < \gamma < 1 \text{ et } 0 < p \leq 2^\# := \frac{2n}{n-4}.$$

$$(H^2). \quad f \in L^q(\Omega), \text{ avec } q = \frac{2^\#}{2^\# + \gamma - 1}, \text{ presque partout sur } x \in W.$$

$$(H^3). \quad \text{pour tout } x \in W :$$

nous définissons la norme dans l'espace $W = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ par :

$$\|u\|_W^2 := \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx.$$

2.3 Notations et cadre fonctionnel

La plupart des résultats énoncés dans cette section sont classiques et peuvent être trouvés dans n'importe quel bon livre d'analyse fonctionnelle (voir par exmples Otared Kavian [Ka] ,Vo-khac-Khoan tome 2[VK], Nous les rappelons pour le confort du lecteur.

L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné , de bord $\partial\Omega = \Gamma$. On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions est associée à une fonction qui appartient également à $L^2(\Omega)$, i.e.

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, avec $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ la dérivée partielle de u au sens des distributions.

• On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \nabla v) dx$$

• La norme associée est donnée par :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 2.1. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert^③ séparable^④.*

L'espace $H_0^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$

Définition 8. *On désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega) : \|u_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0 \right\}$$

• L'espace H_0^1 peut être défini comme suit :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

Définition 9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On note H^2 l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées premières et secondes (au sens des distributions) sont dans $L^2(\Omega)$.*

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } : \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

③. David Hilbert, né en 1862 à KönigsbergH 1 et mort en 1943 à Göttingen, est un mathématicien allemand. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du xxe siècle.

④. On rappelle qu'un espace topologique est dit séparable s'il contient un ensemble dénombrable et dense .

2.4 Étude variationnelle

Comme d'habitude, dans les études variationnelle on cite la fonctionnelle d'énergie et la formulation variationnelle associée à notre problème, et c'est ça l'objectif de cette section.

2.4.1 Fonctionnelle d'énergie du problème (\mathcal{P}_λ)

On définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème \mathcal{P}_λ par

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2a\theta} (a\|u\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x)|u|^{1-\gamma} dx$$

Preuve 7. Soit u une fonction test. Multipliant les deux membres de la première equation de \mathcal{P}_λ par u et intégrant sur Ω , il vient :

$$\left(a \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \Delta^2 u \cdot u = \int_\Omega f(x)|u|^{-\gamma} \cdot u dx - \int_\Omega \lambda |u|^{p-2} u \cdot u dx, \quad (2.3)$$

l'équation (2.3) devient

$$\left(a \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_\Omega \Delta \Delta u \cdot u dx = \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx - \int_\Omega \lambda |u|^p dx. \quad (2.4)$$

En appliquant la formule de Green dans l'équation (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \left(a \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_\Omega \nabla \Delta u \cdot \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u ds &= \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx \\ &- \int_\Omega \lambda |u|^p dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Compte tenu de la condition aux limites de (\mathcal{P}_λ) l'équation (2.5) devient :

$$\begin{aligned} \left(a \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_\Omega \nabla \Delta u \cdot \nabla u dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u ds}_{=0} &= \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx \\ &- \int_\Omega \lambda |u|^p dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

la formule de Stokes dans l'equation 2.6 permet alors d'obtenir l'equation suivante :

$$\left(a \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta u dx = \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx - \int_\Omega \lambda |u|^p dx. \quad (2.7)$$

2.4. ÉTUDE VARIATIONNELLE

On pose maintenant :

$$\bullet I_1(u) = (a \int |\Delta u|^2 dx + b)^\theta dx. \quad \bullet I_2(u) = \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx.$$

$$\bullet I_3(u) = \int_{\Omega} \lambda |u|^p dx.$$

Pour arriver à la fonctionnelle d'énergie on dérivie $I_i(u)$ pour $(i = 1, \dots, 3)$ au sens de Gateaux-Differentiable

On note le calcul suivant par (★) pour que les étapes soit facile à comprendre,

On dérivie maintenant les termes $I_1(u), I_2(u)$ et $I_3(u)$ au sens de Gateaux differentiable terme par terme :

- $I_1(u) = (a \int |\Delta u|^2 dx + b)^\theta dx.$

$$\langle I_1(u), u \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + tu) - I_1(u)}{t}$$

On pose :

$$h(t) = J(u + tv) = (a \int |\Delta u + t\Delta v|^2 dx + b)^\theta$$

Alors :

$$h(0) = J(u) = (a \int |\Delta u|^2 dx + b)^\theta$$

On utilise la formule de développement limité de Taylor^⑤ pour la fonction $h(t)$ à l'ordre 2 au point "0" .

$$h(t) = h(0) + \frac{t}{1!} h'(0) + \frac{t^2}{2!} h''(0) + (t)^n \varepsilon(t), \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$\begin{aligned} J'(u, v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(0) + \frac{t}{1!} h'(0) + \frac{t^2}{2!} h''(0) - h(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t h'(0) + \frac{t^2}{2} h''(0)}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(h'(0) + \frac{t}{2} h''(0) \right) \\ &= h'(0) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} h''(0) \xrightarrow{0} \\ &= h'(0). \end{aligned}$$

⑤. Brook Taylor (1685-1731), mathématicien et scientifique anglais. D'une famille aisée, il a des précepteurs qui lui dispensent un enseignement qui inclut la musique et les arts graphiques.

D'où :

$$h'(0) = 2a\theta \left(\int |\Delta u| |\Delta v| dx \right) (a \int |\Delta u|^2 dx + b)^{\theta-1}.$$

En prend $u = v$ on obtient :

$$h'(0) = 2a\theta \left(\int |\Delta u|^2 dx \right) (a \int |\Delta u|^2 dx + b)^{\theta-1}$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1(u + tu) - I_1(u)}{t} = 2a\theta \left(\int |\Delta u|^2 dx \right) (a \int |\Delta u|^2 dx + b)^{\theta-1}.$$

- $I_2(u) = \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-\gamma} dx.$

$$\begin{aligned} \langle I_2(u), u \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_5(u + tu) - I_5(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} f(x) |u + tu|^{1-\gamma} dx - \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-\gamma} dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x) dx |u|^{1-\gamma} \left[\frac{(1+t)^{1-\gamma} - 1}{t} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{1-\gamma} - 1}{t} = h'(0) = (1-\gamma) \quad \text{avec} \quad h(t) = (1+t)^{1-\gamma}$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2(u + tu) - I_2(u)}{t} = \int_{\Omega} f(x) |u|^{1-\gamma} \cdot (1-\gamma) dx.$$

- $I_3(u) = \int_{\Omega} \lambda |u|^p dx.$

$$\begin{aligned} \langle I_3(u), u \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_6(u + tu) - I_6(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} \lambda |u + tu|^p dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^p dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \lambda |u|^p \left[\frac{(1+t)^p - 1}{t} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^p - 1}{t} = h'(0) = p \quad \text{avec} \quad h(t) = (1+t)^p.$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_3(u + tu) - I_3(u)}{t} = \int_{\Omega} \lambda |u|^p \cdot p dx.$$

2.4. ÉTUDE VARIATIONNELLE

Ce calcul a été effectué lorsqu'on va remplacer dans l'équation 2.7 on divise chaque terme dans la relation (★) par le coefficient qui lui correspond, pour obtenir l'équation suivante

$$\frac{1}{2a\theta} \left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x) |u|^{1-\gamma} dx.$$

Finalement on obtient la fonctionnelle d'énergie recherchée

$$\frac{1}{2a\theta} (a \|u\|_W^2 + b)^{\theta-1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x) |u|^{1-\gamma} dx.$$

■

2.4.2 Formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_λ)

Définition 10. Soit $u \in X$ est une solution faible de \mathcal{P}_λ si $\forall v \in X$.

On définit la formulation variationnelle associée au problème \mathcal{P}_λ par

$$\left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot \varphi dx$$

Preuve 8. Multipliant la première équation de \mathcal{P}_λ par $\varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ et intégrons membre à membre sur Ω , il vient :

$$\left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \Delta^2 u \cdot \varphi = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot \varphi dx, \quad (2.8)$$

l'équation (2.8) devient

$$\left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta \Delta u \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot \varphi dx, \quad (2.9)$$

Appliquons ensuite la formule de Green dans l'équation (2.9) pour avoir :

$$\begin{aligned} \left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi ds &= \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot \varphi dx \\ &- \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot \varphi dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Comme $(\Delta u = u = 0)$ sur $\partial \Omega$, nous déduisons :

$$\begin{aligned} \left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla \varphi dx + \underbrace{\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi ds}_{=0} &= \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot \varphi dx \\ &- \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot \varphi dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De nouveau par la formule de Stokes dans l'équation 2.11 on obtient :

$$\left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta \varphi dx = \int_{\Omega} f(x) |u|^{-\gamma} \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} \lambda |u|^{p-2} u \cdot \varphi dx, \quad (2.12)$$

Finalemment nous obtenons un problème variationnel

$$a(u, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in D(\Omega),$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \left(a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dx \\ & + \left(a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b \right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\Omega} f(x)|u|^{-\gamma} \cdot v dx - \int_{\Omega} \lambda|u|^{p-2}u \cdot v dx.$$

2.5 Principaux résultats

Dans cette section, nous énonçons trois lemmes importants que nous aurons utilisés dans la démonstration du résultat principal.

Avant d'entamer cette section, signalons qu'il est bien connu que l'injection $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ est compact, et que la meilleure constante de Sobolev S est

$$S := \inf_{\{u \in H^2 \text{ et } \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx = 1\}} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx.$$

S est atteinte dans \mathbb{R}^n , avec $n \geq 5$ par les fonctions

$$u_{\epsilon}(x) := \alpha_n \left(\frac{\epsilon}{|x - x_0|^2 + \epsilon^2} \right)^{\frac{n-4}{2}}$$

avec

$$\alpha_n := (n(n-4)(n^2-4))^{\frac{n-4}{8}}$$

Lemme 2.1. *La fonctionnelle d'énergie I_{λ} est coercive et bornée inférieurement dans W .*

- i) I_{λ} est coercive i.e : $\lim_{\|u\|_W \rightarrow +\infty} I_{\lambda}(u) = +\infty$.
- ii) I_{λ} est bornée inférieurement i.e : $\exists c > 0, \forall u \in W$ tel que $I_{\lambda}(u) \geq c$.

Preuve 9.

- i) Pour la coercivité, montre que : $\lim_{\|u\|_W \rightarrow +\infty} I_{\lambda}(u) = +\infty$.

on a :

$$I_{\lambda}(u) = \frac{1}{2a\theta} (a\|u\|_W^2 + b)^{\theta} + \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx.$$

puisque $0 < \gamma < 1$, $\lambda > 0$, et en utilisant l'inégalité de Hölder avec $f = f(x)$ et $g = |u|^{1-\gamma}$,
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

on a :

$$p = \frac{2^{\#}}{1-\gamma},$$

Donc nécessairement,

$$q = \frac{2^{\#}}{2^{\#} + \gamma - 1}.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x)|u|^{1-\gamma} dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{\frac{2^{\#}}{2^{\#} + \gamma - 1}} \right)^{\frac{2^{\#} + \gamma - 1}{2^{\#}}} \times \left(\int_{\Omega} |u|^{(1-\gamma)\frac{2^{\#}}{1-\gamma}} \right)^{\frac{1-\gamma}{2^{\#}}} \\ &= \|f\|_{L^q(\Omega)} \times \|u\|_{L^{2^{\#}}(\Omega)}^{1-\gamma} \text{ avec } q = \frac{2^{\#}}{2^{\#} + \gamma - 1}. \end{aligned}$$

De plus on a :

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^\#}(\Omega) \text{ et } W \hookrightarrow H^2(\Omega).$$

Donc

$W \hookrightarrow L^{2^\#}(\Omega)$, Alors s'il existe $\beta > 0$, telle que $\forall u \in W$:

$$\|u\|_{L^{2^\#}(\Omega)}^{1-\gamma} \leq (1-\gamma)\beta \|u\|_W^{1-\gamma}.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2a\theta} (a\|u\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int_\Omega f(x)|u|^{1-\gamma} dx \\ I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2a\theta} \left(a^\theta \|u\|_W^{2\theta} \right) - \beta \|u\|_W^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{\|U\|_W \rightarrow \infty} \left(a^\theta \|u\|_W^{2\theta} - \|U\|_W^{1-\gamma} \right) = \lim_{\|U\|_W \rightarrow \infty} \left(a^\theta \|u\|_W^{2\theta} \right) = +\infty, \text{ car } 2\theta \text{ le plus haut degré que } (1-\gamma)$$

Donc on conclut que :

$$\boxed{\lim_{\|U\|_W \rightarrow \infty} I_\lambda(u) = +\infty}$$

Donc $I_\lambda(u)$ est coercive .

ii) Maintenant prouvons que I_λ est borné inférieurement.

La preuve de ce point s'établira en deux cas :

Premier cas :

Si $\|u\|_W \geq 1$ et $0 < \gamma < 1, 1 < \theta < 2$.

On a :

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2a\theta} (a\|u\|_W^2 + b)^\theta - \beta \|u\|_W^{1-\gamma} \\ &\geq \frac{1}{2a\theta} \left(a^\theta \|u\|_W^{2\theta} \right) - \beta \|u\|_W^{1-\gamma} \\ &\geq \frac{1}{2a\theta} \left(a^\theta \|u\|_W^{1-\gamma} \right) - \beta \|u\|_W^{1-\gamma} \quad \text{car } \|u\|_W^{2\theta} \geq \|u\|_W^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

D' où :

$$I_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2a\theta} - \beta \right) \|u\|_W^{1-\gamma}.$$

Deuxième cas :

Si $0 < \zeta \leq \|u\|_W \leq 1$ et $0 < \gamma < 1, 1 < \theta < 2$.

On a :

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2a\theta} (a\|u\|_W^2 + b)^\theta - \beta\|u\|_W^{1-\gamma} \\ &\geq \frac{1}{2a\theta} (a^\theta\|u\|_W^{2\theta}) - \beta\|u\|_W^{2\theta} \\ &\geq \left(\frac{a^\theta}{2a\theta} - \beta\right) \|u\|_W^{2\theta} \\ &\geq \left(\frac{a^\theta}{2a\theta} - \beta\right) \zeta^{2\theta}. \end{aligned}$$

Donc $I_\lambda(u)$ est bornée inférieurement sur W .

Finalement on obtient le résultat voulu, et on conclut que l'infimum de $I_\lambda(u)$ existe et bien défini et on note :

$$m_\lambda = \inf_{u \in W} I_\lambda(u).$$

■

Lemme 2.2. La fonctionnelle d'énergie I_λ admet un minimum m_λ dans W avec $m_\lambda < 0$.

Preuve 10. On sait que d'après le lemme 2.1 I_λ est coercive et bornée inférieurement dans W , alors

$m_\lambda = \inf_{u \in W} I_\lambda(u)$ existe, montrons maintenant $m_\lambda < 0$.

comme $0 < \gamma < 1, 1 < \theta < 2$, et $f(x) > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$.

on a :

$I_\lambda(t\rho) < 0$, et pour tout $\rho \neq 0$ et $t > 0$ assez petit

$$\begin{aligned} I_\lambda(t\rho) &= \frac{1}{2a\theta} (a\|t\rho\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |t\rho|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x)|t\rho|^{1-\gamma} dx \\ &= \frac{1}{2a\theta} (at^2\|\rho\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda t^p}{p} \int_\Omega |\rho|^p dx + \frac{t^{\gamma-1}}{\gamma-1} \int f(x)|\rho|^{1-\gamma} dx. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} h(t) &= at^2 + \frac{\lambda t^p}{p} - \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ h'(t) &= 2at + \lambda t^{p-1} - t^{-\gamma} \\ &= t^{-\gamma}(2at^{1+\gamma} + \lambda t^{p-1+\gamma} - 1). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2at^{1+\gamma} + \lambda t^{p-1+\gamma}) = 0$$

alors pour t assez petit

$$(2at^{1+\gamma} + \lambda t^{p-1+\gamma} - 1) < 0$$

$$\implies h(t) < 0 \text{ car } t^{-\gamma} > 0 \text{ pour tout } t \text{ positif.}$$

Finalement on obtient

$$I_\lambda(t\rho) < 0.$$

D'où :

$$m_\lambda := \inf_{u \in W} I_\lambda(u) < 0.$$

■

La Figure 2.1 au dessous représenter la graphique et le comportement de $I_\lambda(u)$.

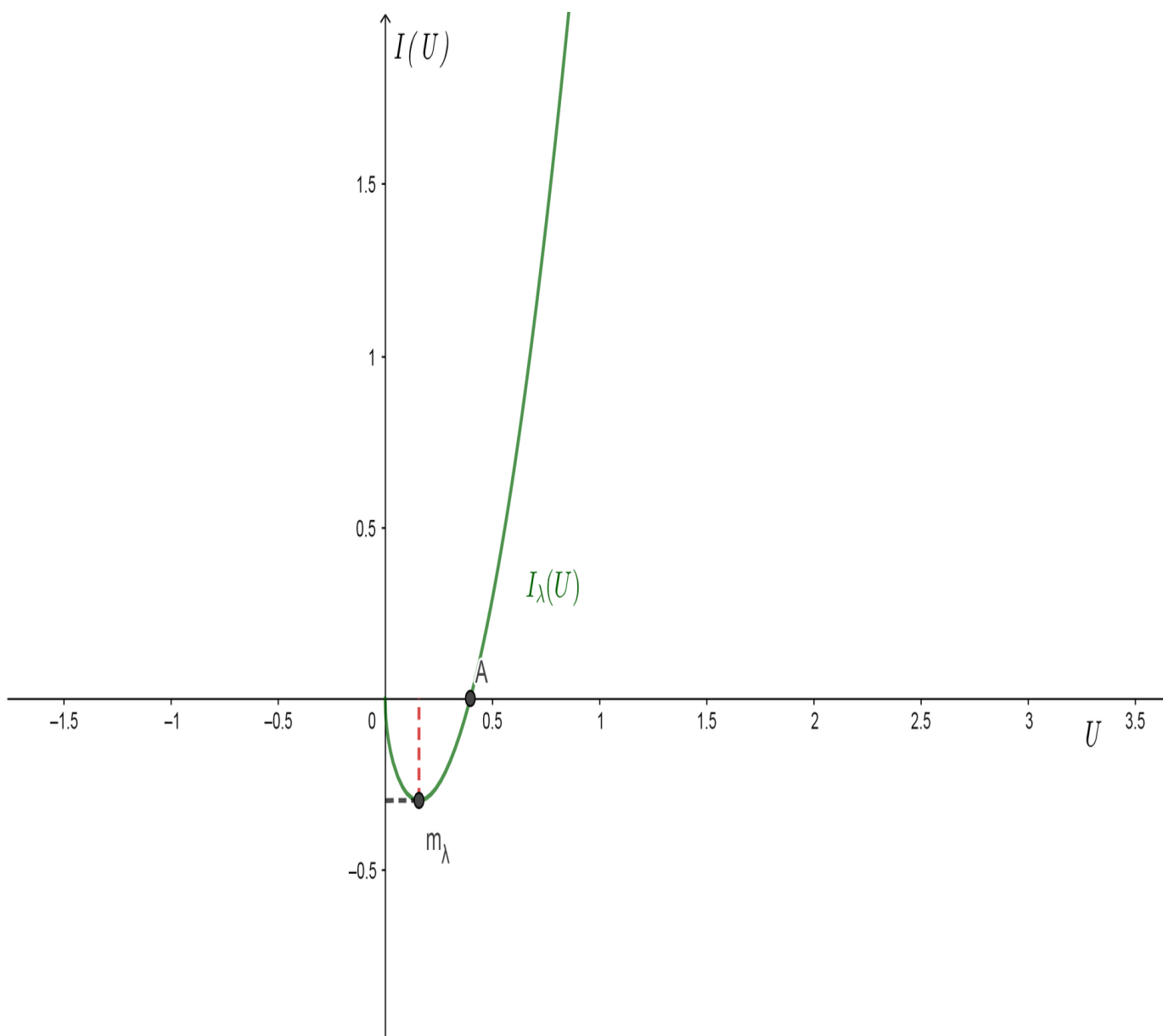


FIGURE 2.1 – Graphe de $I_\lambda(u)$

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses (H^1) , (H^2) et (H^3) la fonctionnelle I_λ atteint son minimum global dans W , au point $u^* \in W$ avec*

$$m_\lambda := I_\lambda(u^*) < 0.$$

Preuve 11. *Pour prouver que l'infimum global m_λ est atteint considérons une suite minimisante .*

D'après le lemme 2.1, I_λ est coercive et bornée inferieurement dans W , on conclut qu'il existe une suite minimisante $(u_m)_m$ dans W telle que :

$$I_\lambda(u_m) \longrightarrow m_\lambda := \inf_{u \in W} I_\lambda(u), \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

D'après le lemme 2.2, la suite $(u_m)_m$ est bornée dans W .

Ce dernier étant un espace réflexif, et sachant que l'injection de sobolev $W \hookrightarrow L^p(\Omega)$, est compact pour tout $1 \leq p < 2^\#$, et après l'extraction éventuelle d'une sous suite encore notée $(u_m)_m$ on obtient les résultats suivants :

- (1) $u_m \longrightarrow u^*$ faiblement dans W .
- (2) $u_m \longrightarrow u^*$ fortement dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < 2^\#$.
- (3) $u_m(x) \longrightarrow u^*(x)$ presque partout sur Ω .

Notre principale préoccupation maintenant est de montrer que $w_m = u_m - u^$, converge vers 0 fortement dans W .*

En utilisant le théorème de Vitali

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x)|u_m|^{1-\gamma} dx = \int_{\Omega} f(x)|u^*|^{1-\gamma} dx.$$

D'autre part, d'après le lemme de Brézis-Lieb on obtient :

$$\|u_m\|_W^2 - \|w_m\|_W^2 = \|u^*\|_W^2 + o(1)$$

et

$$\int_{\Omega} h(x)|u_m|^{2^\#} dx = \int_{\Omega} h(x)|w_m|^{2^\#} dx + \int_{\Omega} h(x)|u^*|^{2^\#} dx + o(1).$$

D'où $o(1)$ est un infinitésimal quand $m \rightarrow +\infty$.

2.5. PRINCIPAUX RÉSULTATS

On doit ici traiter différemment les deux cas suivants : $1 < p < 2^\#$, et $p = 2^\#$.

Premier cas : Nous considérons d'abord le cas $0 < p < 2^\#$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 m_\lambda &= \lim_{m \rightarrow +\infty} I_\lambda(u_m) \\
 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|u_m\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u_m|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x) |u_m|^{1-\gamma} dx \right] \\
 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|w_m\|_W^2 + \|u^*\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u^*|^p dx + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x) |u^*|^{1-\gamma} dx \right] \\
 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|w_m\|_W^2 + \|u^*\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u^*|^p dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\gamma-1} \int f(x) |u^*|^{1-\gamma} dx + \frac{1}{2a\theta} (a\|u^*\|_W^2 + b)^\theta - \frac{1}{2a\theta} (a\|u^*\|_W^2 + b)^\theta \right] \\
 m_\lambda &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|w_m\|_W^2 + \|u^*\|_W^2 + b)^\theta - \frac{1}{2a\theta} (a\|u^*\|_W^2 + b)^\theta \right] + I_\lambda(u^*).
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$m_\lambda = \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|w_m\|_W^2 + \|u^*\|_W^2 + b)^\theta - \frac{1}{2a\theta} (a\|u^*\|_W^2 + b)^\theta \right] + I_\lambda(u^*) \geq I_\lambda(u^*) \geq \inf_{u \in X} I_\lambda(u_m) = m_\lambda.$$

Ce qui entraîne

$$m_\lambda = I_\lambda(u^*).$$

Alors :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|w_m\|_W^2 + \|u^*\|_W^2 + b)^\theta - \frac{1}{2a\theta} (a\|u^*\|_W^2 + b)^\theta \right] = 0$$

delà nous concluons que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|w_m\|_W = 0.$$

D'où le résultat pour le cas $0 < p < 2^\#$.

Deuxième cas : Nous revenons ensuite à $p = 2^\#$,

Nous avons

$$m_\lambda = I_\lambda(u^*) + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2a\theta} (a\|w_m\|_W^2 + \|u^*\|_W^2 + b)^\theta - \frac{1}{2a\theta} (a\|u^*\|_W^2 + b)^\theta + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega h(x) |w_m|^p dx \right]$$

D'autre part

$$m_\lambda \geq I_\lambda(u^*) \geq \inf_{u \in X} I_\lambda(u_m) = m_\lambda,$$

Ce qui donne :

$$m_\lambda = I_\lambda(u^*),$$

D'où :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|w_m\|_W = 0.$$

Ce qui donne le résultat recherché pour tout $0 < p \leq 2^\#$, donc on conclut que l'infimum m_λ est bien atteint

$$\inf_{u_m \in W} I_\lambda(u_m) = I_\lambda(u^*).$$

■

2.6 Principal resultat

Le théorème suivant illustre le résultat principal de cette section

Théorème 2.1. *Sous (H^1) , (H^2) et (H^3) . Le problème (I_λ) admet une solution positive et unique. De plus, cette solution est le minimum global*

Dans cette sous-section, nous établissons quelques résultats qui vont nous aider pour démontrer le résultat principal.

Valeur propre de l'opérateur le bilaplacien

Dans cette sous-section on définit la valeur et la fonction propre associée à l'opérateur le bilaplacien

$$(\mathcal{P}_{\lambda_1}) \begin{cases} \Delta^2 u = \lambda_1 u \\ \Delta u = u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Définition 11. *Une solution faible du problème \mathcal{P}_λ est une fonction non nulle $u \in W$ telle que pour tout $v \in W$*

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \lambda_1 \int_{\Omega} u v dx. \quad (2.13)$$

Existence de la première valeur propre

Définition 12. *On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur bilaplacien, si le problème \mathcal{P}_λ admet une solution faible $u \in W$*

La fonction u est appelée fonction propre. On dit aussi que (u, λ) est une solution propre de 2.13

Si on remplace v par $u \in W$ dans 2.13, on obtient λ comme le quotient fonctionnel suivant :

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx} \quad (2.14)$$

Ce quotient est appelé le quotient de Rayleigh

Définition 13. *La première valeur propre de l'opérateur bilaplacien notée λ_1 est définie par :*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W} \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx} \quad (2.15)$$

et la fonction u associé à cette valeur propre s'appelle première fonction propre.

Le résultat d'existence de la première valeur propre est donné par le théorème suivant

Théorème 2.2. *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et régulier alors λ_1 définie par 2.15, existe et strictement positive, de plus il existe une fonction $u \in W \setminus \{0\}$ telle que*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W} \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx} \quad (2.16)$$

La fonction u peut être choisit positive et satisfait l'équation 2.13, u appelée la première fonction propre.

Maintenant nous sommes en mesure de prouver notre résultat principal.

Plusieurs preuves sont possibles pour l'existence et l'unicité de solution. On propose ici une preuve basée sur la théorie des points critique.

Preuve de Théorème 2.1 Elle consiste en deux étapes

• **La Première étape :** il suffit de prouver que u^* est une solution positive de problème (I_λ) dans Ω .

D'après le lemme 2.2 on a :

$$m_\lambda := I_\lambda(u^*) < 0.$$

Ainsi que $u_*(x) \not\equiv 0$ dans Ω .

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \phi \geq 0, \text{ et } t > 0, t \in \mathbb{R}, \text{ tel que } (u_* + t\phi) \in H_0^1(\Omega),$$

on a :

$$\min I_\lambda(u^* + t\phi) = I_\lambda(u^* + t\phi)|_{t=0} = I_\lambda(u^*), \forall \phi \in W.$$

Ce que implique :

$$\begin{aligned} & \left(a \int_{\Omega} |\Delta u^*|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u^* \cdot \Delta \phi dx = \int_{\Omega} f(x) |u^*|^{-\gamma} \cdot \phi dx - \int_{\Omega} \lambda |u^*|^{p-2} u^* \cdot \phi dx. \\ 0 & \leq \frac{I_\lambda(u^* + t\phi) - I_\lambda(u^*)}{t} \\ & = \frac{1}{2a\theta} \left[\frac{(a \int_{\Omega} \|u + t\phi\|_W^2 + b)^\theta - (a \|u^*\|_W^2 + b)^\theta}{t} \right] + \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right) dx \quad (2.17) \\ & - \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^{1-\gamma} - |u^*|^{1-\gamma}}{t} \right) dx. \end{aligned}$$

Pour éviter les détails du calcul, nous appliquons TCD et TCM directement sans vérification des hypothèses .

N b :TCD en abrégé le théorème de la convergence dominée et aussi TCM en abrégé le théorème de la convergence monotone.

A l'aide du théorème de la convergence dominée, nous pouvons passer à la limite, dans l'avant dernier terme. Nous obtenons

$$\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} h(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^p - |u^*|^p}{t} \right) dx = \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* \phi dx. \quad (2.18)$$

Une nouvelle fois le théorème de convergence monotone nous permet de déduire :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{|u^* + t\phi|^{1-\gamma} - |u^*|^{1-\gamma}}{t} \right) dx \right] = \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} \phi(x) dx. \quad (2.19)$$

La limite est égale à $+\infty$, en combinant cela avec 2.17, pour $t \rightarrow 0^+$, il s'en suit de 2.18 que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} \phi(x) dx \\ & \leq \left(a \int_{\Omega} |\Delta u^*|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u^* \cdot \Delta \phi(x) dx + \lambda \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pour tout $\phi \in W$ avec $\phi > 0$.

Soit $e_1 \in W$ la première fonction propre de l'opérateur Δ^2 avec $e_1 > 0$ et $\|e_1\| = 1$. On pose $\phi = e_1$ dans 2.20, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x) (u^*(x))^{-\gamma} e_1 dx \\ & \leq \left(a \int_{\Omega} |\Delta u^*|^2 dx + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u^* \cdot \Delta e_1 dx \\ & \quad + \lambda \int_{\Omega} h(x) |u^*|^{p-2} u^* e_1 dx \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $u^* > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$.

• **Seconde étape** : on va prouver que u^* est la solution unique du problème (I_λ) . Par absurde on suppose v^* une autre solution positive du problème (I_λ) , alors il s'en suit de 2.20 que

$$\begin{aligned} & \left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta (u^* - v^*) dx - \int_{\Omega} f(x) |u^*|^{-\gamma} (u^* - v^*) dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} |u^*|^{p-2} u^* (u^* - v^*) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

et

$$\begin{aligned} & \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \int_{\Omega} \Delta v^* \Delta (u^* - v^*) dx - \int_{\Omega} f(x) |v^*|^{-\gamma} (u^* - v^*) dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} |v^*|^{p-2} v^* (u^* - v^*) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous soustrayons, membre à membre, ces deux identités(2.21) et (2.22), pour avoir

$$\begin{aligned} & \left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \left[\|u^*\|_W^2 - \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta v^* dx \right] \\ & + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \left[\|v^*\|_W^2 - \int_{\Omega} \Delta v^* \Delta u^* dx \right] \\ & - \int_{\Omega} f(x) (|u^*|^{-\gamma} - |v^*|^{-\gamma}) (u^* - v^*) dx + \lambda \int_{\Omega} (|u^*|^{p-2} u^* - |v^*|^{p-2} v^*) (u^* - v^*) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ensuite

$$\begin{aligned} & \left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \|u^*\|_W^2 + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \|v^*\|_W^2 \\ & - \left[\left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \right] \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta v^* dx \\ & - \int_{\Omega} f(x) (|u^*|^{-\gamma} - |v^*|^{-\gamma}) (u^* - v^*) dx + \lambda \int_{\Omega} (|u^*|^{p-2} u^* - |v^*|^{p-2} v^*) (u^* - v^*) dx = 0. \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} g(u^*, v^*) & := \left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \|u^*\|_W^2 + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \|v^*\|_W^2 \\ & - \left[\left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \right] \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta v^* dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} & \left[\left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \right] \int_{\Omega} \Delta u^* \Delta v^* dx \leq \\ & \left[\left(a \|u^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} + \left(a \|v^*\|_W^2 + b \right)^{\theta-1} \right] \|u^*\|_W \times \|v^*\|_W. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} g(u^*, v^*) &\geq \left(a \|u^*\|_W^2 + b\right)^{\theta-1} \|u^*\|_W^2 + \left(a \|v^*\|_W^2 + b\right)^{\theta-1} \|v^*\|_W^2 \\ &\quad - \left[\left(a \|u^*\|_W^2 + b\right)^{\theta-1} + \left(a \|v^*\|_W^2 + b\right)^{\theta-1} \right] \|u^*\|_W \times \|v^*\|_W \\ &= \left[\|u^*\|_W \left(a \|u^*\|_W^2 + b\right)^{\theta-1} - \|v^*\|_W \left(a \|v^*\|_W^2 + b\right)^{\theta-1} \right] (\|u^*\|_W - \|v^*\|_W). \end{aligned}$$

On distingue trois cas :

(i). Cas : si $\|u^*\|_W = \|v^*\|_W$, alors

$$g(u^*, v^*) \geq 0.$$

(ii). Cas : si $\|u^*\|_W > \|v^*\|_W$, alors

$$g(u^*, v^*) > 0.$$

(iii). Cas : si $\|u^*\|_W < \|v^*\|_W$, alors

$$g(u^*, v^*) > 0.$$

Comme $0 < \gamma < 1$ et $p > 0$, on a les deux inégalités élémentaires suivantes :

$$(m^{-\gamma} - n^{-\gamma})(m - n) \leq 0, \quad (m^p - n^p)(m - n) \geq 0, \quad \forall m, n > 0.$$

Donc on a

$$\int_{\Omega} f(x) (|u^*|^{-\gamma} - |v^*|^{-\gamma}) (u^* - v^*) dx \leq 0, \quad \int_{\Omega} (|u^*|^{p-2} u^* - |v^*|^{p-2} v^*) (u^* - v^*) dx \geq 0.$$

Par conséquent on obtient une contradiction avec 2.23.

Finalement u^* est une solution unique de problème \mathcal{P}_{λ_2} .

Ceci achève la preuve du résultat principal. ■

ANNEXE

Sommaire

3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$	60
3.2 Les espaces de Sobolev	62
3.3 Quelques critères de convergence	67
3.4 Un petit aperçu de la théorie des points critiques	69
3.5 Quelques Formules et Inégalités utilisés	73

Pour la commodité du lecteur, nous regroupons dans cette annexe les principaux des espaces fonctionnels que nous utiliserons et quelques résultats classiques concernant les problèmes elliptiques non linéaire. Nous donnons aussi un aperçu concis sur la théorie des points critiques que nous utilisons tout le long de ce mémoire.

3.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Nous donnons une brève introduction de les espaces L^p , Pour une étude complète et détaillée, nous renvoyons le lecteur à [Mal] et [Bre]

Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Définition 14. Soit $p \in \mathbf{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$,

① $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach^① muni la norme :

①. Stefan Banach né le 30 mars 1892 à Cracovie-1945 et mort le 31 août 1945 à Lwów, est un mathématicien polonais.

3.1. LES ESPACES $L^p(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

② $p = 2$,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

③ $p = \infty$.

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \exists c > 0; |u(x)| \leq c \text{ pp sur } \Omega \right\}$$

$L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach muni la norme :

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \sup \text{ess}(u) = \inf \{ C : |u(x)| \leq C \text{ p.p.} \}$$

Dans le théorème qui suit, nous rassemblons les propriétés topologiques des espaces L^p .

Théorème 3.1. (Voir [LM] et [Mal])

1. L'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,
2. L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,
3. L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Pour compléter les résultats de ce sous-paragraphe, nous invitons le lecteur à consulter H. Brézis ([Bre]) et Evans ([Ev]).

Voici une série d'inégalités très utiles.

Notation Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est à dire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ où } q = \frac{p}{p-1}.$$

Lemme 3.1. (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Lemme 3.2. (Inégalité de Hölder généralisé)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ et soit $r > 0$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, on a

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

✓ Dans le cas particulier, ($p = q = 2$) on obtient l'inégalité intégrale de Cauchy^②-Schwarz^③ :

$$\|fg\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

✓ Dans le cas ($p = q$) on obtient l'inégalité intégrale de Minkovsky^④.

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

Les preuves des résultats de ce sous-paragraphe se trouvent dans n'importe quel ouvrage traitant de l'intégration au sens de Lebesgue (voir par exemple P. Malliavin [Mal] ou W. Rudin [LM]).

3.2 Les espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus détaillé de ces espaces, on réfère l'ouvrage de H. Brezis [Bre] ou R. Adams [RA]. Soit p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact dans Ω .

Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, avec $p \in [1, +\infty[$, et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 15. L'espace de sobolev d'ordre 1, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble suivante :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i (i = 1, \dots, n) \text{ tel que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\}$$

②. 1Auguste Louis Cauchy : mathématicien français, né le 21 août 1789 à Paris, mort le 23 mai 1857 à Sceaux.

③. 2Hermann Amandus Schwarz : mathématicien allemand, né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, mort le 30 novembre 1921 à Berlin.

④. 4Hermann Minkovski (ou Minkowski) : Mathématicien et physicien Allemand né en 1864 en Russie et mort en 1909 en Allemagne.

3.2. LES ESPACES DE SOBELEV

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, quand on muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

En particulier $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

et par suite, on a :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Espaces $H^1(\Omega)$

Définition 16. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées (au sens des distributions) sont dans $L^2(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d \right\}$$

$H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

c'est un espace de Hilbert. Sa norme est notée $\|\cdot\|_{H^1}$:

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

En particulier, $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$ et $\|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$.

Espaces $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière $\partial\Omega$.

Définition 17. Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

R L'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 . De plus l'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré :

Théorème 3.2 (2). Soit Ω un borné, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (3.1)$$

Lemme 3.3.

* L'inégalité 3.1 est vraie seulement que Ω est borné.

* Sur $H_0^1(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$.

R L'inégalité de Poincaré (du nom du mathématicien français Henri Poincaré) est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition. Ces estimations sont d'une grande importance pour la méthode du calcul des variations.

Espaces $H^2(\Omega)$

Définition 18. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On note $H^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées premières et secondes (au sens des distributions) sont dans $L^2(\Omega)$:

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq d \right\}$$

$H^2(\Omega)$ est un espace vectoriel. Muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$$

$H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Sa norme est notée $\|\cdot\|_{H^2}$:

$$\|u\|_{H^2} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla^2 u|^2 \right)^{1/2}$$

Pour une étude détaillée et systématique des espaces de Sobolev, nous renvoyons le lecteur H. Brézis, [Bre] et Evans [Ev] .

Injection de Sobolev

Dans section nous donnons quelques notions et résultats de injections continues et compactes injections continues et compactes.

Notation

1. E s'injecte d'une manière **continue** dans F , signifie que l'injection canonique $j : E \rightarrow F$ est continue et on le note par $E \hookrightarrow F$.
2. E s'injecte d'une manière **compacte** dans F , signifie que l'injection $j : E \rightarrow F$ est compacte et on le note par $E \hookrightarrow_c F$.

Si $1 \leq p \leq N$, l'exposant de Sobolev de p est définie par :

$$p^* = \frac{NP}{N - P},$$

ou

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{P} - \frac{1}{N}.$$

Les principales propriétés des injections sont collectées dans les deux théorèmes classiques suivantes :

Théorème 3.3. (Voir [GT])

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 , borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:

1. Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 3.4. (Rellich^a-Kondrachov^b) (Voir [GT])

On suppose que Ω borné de classe C^1 . On a

1. Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$,
2. Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,
3. Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega})$.

a. Franz Rellich ne le (14 septembre 1906-25 septembre 1955) était un autrichien-Allemand mathématicien.

b. Vladimir Iosifovich Kondrashov était mathématicien Russ le plus connu ne le 1909 et mort le 1971.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat de compacité ,

Théorème 3.5. (Voir [Bre])

Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

Les démonstrations des Théorèmes 1.3 et 1.4 peuvent être consultées dans D. Gilbarg et N. S. Trudinger [GT]. En ce qui concerne le Théorème 1.5 nous renvoyons à [Bre].

Terminons ce sous-paragraphe par les deux remarques suivantes :

R1 Les injections de Sobolev sont très utilisées, elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

R2 L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte

3.3 Quelques critères de convergence

Nous désignons par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω et nous rappelons quelques théorèmes fondamentaux de la théorie de l'intégration.

Théorème 3.6. (Convergence dominée de Lebesgue)(Voir [Bo],[Mal])

Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$, On suppose que :

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ,
2. il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω^a ,

Alors,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

a. On dit que $g(x)$ est une majorante intégrable (fonction dominante) des fonctions $f_n(x)$.

Théorème 3.7. (Convergence dominée de Lebesgue inverse)(Voir [Bo],[Mal])

Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$, tels que : $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :

- i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω ,
- ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

Pour la définition de la topologie faible sur un espace vectoriel normé, nous renvoyons à [Bre].

Nous nous limiterons ici à la seule notion de convergence faible.

Définition 19. (la convergence faible et forte) (Voir[1])

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ et soit E' son dual topologique^⑤. On dit que (x_n) converge faiblement dans E s'il existe un élément $x \in E$ tel que :

$$\forall f \in E', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x) \text{ ou } (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle).$$

Notation On notera $x_n \rightarrow x$ ou $x_n \xrightarrow{E} x$ pour être précis, la convergence faible dans E . On notera de même $x_n \longrightarrow x$ ou $x_n \xrightarrow{E} x$ pour être précis, la convergence forte dans E (c'est à dire la convergence en norme).

Lemme 3.4. (lemme de Fatou)(Voir [Bo],[Mal])

Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

⑤. l'espace des formes linéaire et continues sur E , $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

3.3. QUELQUES CRITÈRES DE CONVERGENCE

1. Pour chaque n , $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω ,

2. $\sup \int_{\Omega} f_n(x) dx < +\infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Théorème 3.8. (Théorème de Vitali)(Voir [Bo],[Mal])

Soient $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ converge p.p vers une fonction f , alors :

$$f_n \rightarrow f \text{ fortement dans } L^p(\Omega) \iff f \text{ est equi-intégrable.}$$

R Le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans $L^1(\Omega)$ pour une suite convergeant presque partout (p.p. en abrégé).

Lemme 3.5. (Brezis-Lieb)(Voir [Bo],[Mal])

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p vers f , alors $f \in L^p(\Omega)$ et :

$$\|f\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p \right).$$

3.4 Un petit aperçu de la théorie des points critiques

3.4.1 Différentiabilité des fonctionnelles

Dans le calcul différentiel, il existe plusieurs notions de dérivées pour des fonctions définies sur des espaces de Banach. Nous introduisons celle de la dérivée directionnelle.

Définition 20. Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $F : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \omega$ et $z \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit, on ait $u + tz \in \omega$, On dit que F admet au point u une dérivée dans la direction z si la limite existe,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t},$$

On notera cette limite $F'_z(u)$.

R Une fonction F peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $z \in X$, sans être pour autant continue. Lorsque la dérivée directionnelle de F existe pour certains $z \in X$, on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

3.4.1.1 Dérivé au sens de Gâteaux

Définition 21. On dit que $F : C \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux (G -différentiable) en $u \in C$, s'il existe $l \in E^*$ unique, tel que dans chaque direction $v \in E$ où $F(u + tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle DFu existe et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = \langle l, v \rangle,$$

on note $DFu := l$.

R Une Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soit Gateaux différentiable en x_0 et que la fonction $v \mapsto f'_d(x_0, v)$ soit linéaire. Si f est Gateaux différentiable en x_0 , alors f n'est pas nécessairement continue en x_0 . Une fonction G -dérivable n'est pas nécessairement continue.

3.4.1.2 Dérivé au sens de Fréchet

Définition 22. (Voir [Ka]) Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert, et $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Fréchet^⑥ en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E'$ tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0,$$

ou

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

Si I est différentiable, alors A est unique et on note $I' = A$. L'ensemble des fonctions différentiables sera noté $C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Lemme 3.6. Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable dans un voisinage de $u \in \Omega$, alors s'il l'application $u \mapsto I'_G(u)$ est continue au voisinage de u . Alors I est Fréchet différentiable et on a :

$$I'_G(u) = I'(u).$$

R L'importance de le lemme 3.6 réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continue, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet. La gâteaux différentiabilité est plus faible que la Fréchet différentiabilité, car l'approche de la direction v se fait uniquement le long de demi-droites dans le premier cas, et selon un chemin quelconque dans le second cas ce qui est plus exigeant en terme d'existence de limite.

⑥. René Maurice Fréchet mathématicien français. Mathématicien prolifique né à Maligny le 2 septembre 1878 et mort à Paris le 4 juin 1973.

3.4.2 Points critiques

La théorie du point critique et les méthodes variationnelles se sont révélées être des outils très efficaces pour déterminer l'existence de solutions pour les équations différentielles d'ordre entier.

L'idée est de trouver des solutions d'un problème aux limites donné en recherchant des points critiques d'une fonctionnelle (fonction d'énergie) appropriée définie sur un espace de Banach. Au cours des 30 dernières années, la théorie des points critiques est devenue un outil de taille pour étudier l'existence de différents types de solutions pour des équations différentielles présentant une structure variationnelle, nous référons le lecteur aux livres P. Rabinowitz [PM], J. Mawhin [MW].

3.4.2.1 Extremas d'une fonctionnelle

Soit E est un espace de Banach et C un ouvert de E .

Définition 23. Soit $J : C \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle. On dit que $u \in C$ est extrémum de J s'il existe un voisinage V_u de u tel que :

$$J(v) \leq J(u), \quad \forall v \in V_u \iff J \text{ est maximal en } u, \quad (3.2)$$

ou

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V_u \iff J \text{ est minimal en } u. \quad (3.3)$$

- Lorsque l'inégalité 3.3 est vraie pour tout $v \in C$, on dit que J admet un minimum global en u .
- Si les inégalités 3.2 et 3.3 sont strictes pour $u \neq v$, on parle de extremum strict.
- Le mot extremum désigne un maximum ou un minimum.

Définition 24. (Voir[Ka],[ME]) Soient C un ouvert de l'espace de Banach E et on suppose que $J \in C^1(C, \mathbb{R})$. On dit que $u \in C$ est **un point critique** de J , si

$$J'(u) = 0.$$

Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J . Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J , sil existe $u \in C$ tel que

$$J(u) = c \quad \text{et} \quad J'(u) = 0.$$

Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur régulière de J .

3.4.3 Fonctions convexes

Définition 25. (Voir[RP])

On dit qu'une partie C de X est convexe si :

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in]0, 1[, \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Lorsque C est convexe et $J : C \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle. On dit que J est convexe si :

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in]0, 1[, \quad J(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y).$$

On dit que J est strictement convexe si :

$$\forall x, y \in C, \text{ avec } x \neq y \quad \forall \lambda \in]0, 1[, \quad J(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y).$$

Définition 26. Une fonctionnelle $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive si :

$$\lim_{\|u\|_E \rightarrow +\infty} \|J(u_k)\| = +\infty.$$

Nous renvoyons le lecteur à [Ka] pour une étude approfondie à la théorie des points critique

3.5 Quelques Formules et Inégalités utilisés

3.5.1 La Formule de Green

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit w une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds$$

où n_i est la i -ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

♣**Première formule de Green**[Formule d'intégration par parties]

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u et v deux fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds .$$

♣**La seconde formule de Green**

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds ,$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i < n}$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.

3.5.2 La formule de Stokes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) \phi(x) ds$$

3.5.3 Inégalités Utilisés

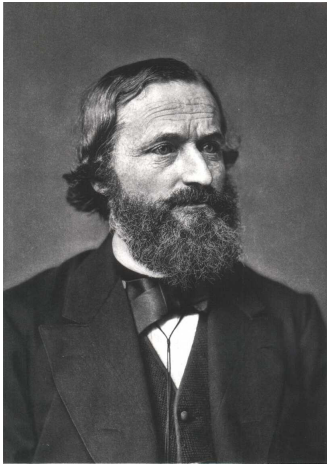
Pour $0 < \gamma < 1$ et $p > 0$, on a les deux inégalités suivantes :

$$\forall m, n > 0 : \begin{cases} (m^p - n^p) (m - n) \geq 0 \\ (m^{-\gamma} - n^{-\gamma}) (m - n) \leq 0 \end{cases}$$

Pour les détails des formules de ce sous-paragraphe, nous référons à P Raviart, M Thomas [RT] et G. ALLAIRE, F. ALOUGES [AF].

Portraits des mathématiciens cités

Le renvoi est fait à la page ou un bref rappel biographique est donné.



Kirchhoff(13)



Sobolev(13)



Poincare(14)



Navier(37)



Stokes(17)



Holder(21)



Vitali(26)



Brezis(26)



Banach(60)



Rellich(66)



Henri Lebesgue

Lebesgue(31)



Schwartz(62)



Hilbert(40)



H. Minkowski

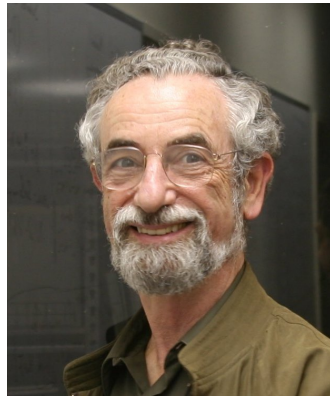
Minkowski(62)



Green(16)



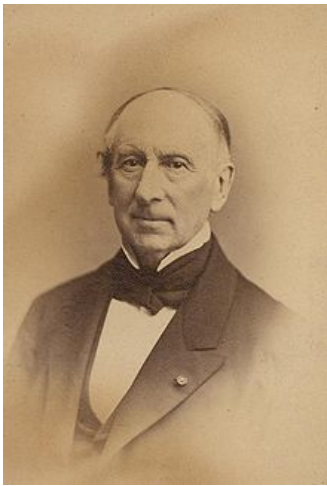
Kondrashov(66)



Lieb(26)



Rayleigh(29)



Cauchy(62)



Taylor(42)



Fréchet(70)

Conclusion générale

Dans ce travail, on s'est intéressé à deux problèmes différents de type de Kirchhoff qui est un sujet très intéressant et riche.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions positives du problème elliptique non linéaire de type Kirchhoff, puis dans le deuxième chapitre on a fait une généralisation au premier problème.

L'approche qui est utilisée dans cette étude est variationnelle, elle est appelé la théorie des points critiques et basée plus précisément sur la minimisation de la fonctionnelle d'énergie.

Les solutions sont obtenues par la minimisation d'une certaine fonctionnelle ou par la recherche des points critiques de cette fonctionnelle.

Les perspectives de ce travail sont multiples, citons à titre deux problèmes proposer pour laisser un débat ouvert pour l'étude de type Kirchhoff :

Problème I :

$$\begin{cases} \Delta^2 u - (a \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + b) \Delta u + cu = \frac{f_1(x)}{|u|^{\gamma_1}} + \frac{f_2(x)}{|u|^{\gamma_2}} & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda_1})$$

où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 5$), et Δ^2 l'opérateur bilaplacain, et ∇u le gradient de u et $0 < \gamma_1 < 1$, $0 < \gamma_2 < 1$, $\lambda > 0$, $0 < p \leq 2^\sharp$ et a, b, c , trois constantes positive avec $a + b > 0$ et $f_1 \in L^q(\Omega)$, $f_2 \in L^q(\Omega)$ avec $q = \frac{2^\sharp}{2^\sharp + \gamma - 1}$, satisfaisant $f(x) > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$, et $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$ est appelé exposant critique de Sobolev pour l'injection $H^2 \hookrightarrow L^{2^\sharp}(\Omega)$.

Problème II :

$$\begin{cases} (a \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + b)^{\theta-1} \Delta^2 u = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(x)}{|u-a_i|^{\gamma_i}} & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{\lambda_2})$$

où Ω est un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n ($n \geq 5$), et Δ^2 l'opérateur bilaplacain, et $0 < \gamma_i < 1$, $a_1, a_2, a_3, \dots \in \Omega$, $\lambda > 0$, $0 < p \leq 2^\sharp$ et a, b, c , trois constantes positive avec $a + b > 0$ et $f_1 \in L^q(\Omega)$, $f_2 \in L^q(\Omega)$ avec $q = \frac{2^\sharp}{2^\sharp + \gamma - 1}$, satisfaisant $f(x) > 0$ presque partout sur $x \in \Omega$, et $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$ est appelé exposant critique de Sobolev pour l'injection $H^2 \hookrightarrow L^{2^\sharp}(\Omega)$.

Remarque : nous avons rédigé un nouveau article sous le titre

K Tahri, and N Brahim, an existence and uniqueness of solution for bilaplacian Kirchhoff type equation with singular term.

Bibliographie

- [TY] K Tahri, and F Yazid, Biharmonic-Kirchhoff type equation involving critical Sobolev exponent with singular term, *Commun Korean Math. Soc.* 0 (0), No.0, pp.1-0
<https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO202116047194038.page>.
- [AS] Adimurthi and S. L. Yadava, An elementary proof of the uniqueness of positive radial solutions of a quasilinear Dirichlet problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* 127 (1994),no.3, 219-229. <https://doi.org/10.1007/BF00381159>.
- [GA] G. Anello, A uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff type and some related open problem, *J. Math. Anal. Appl.* 373 (2011), no. 1, 248-251.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.07.019>.
- [CT] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, and T. F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, *Comput. Math. Appl.* 49 (2005), no. 1, 85-93.
<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008>.
- [MK] M. Benalili and K. Tahri, Nonlinear elliptic fourth order equations existence and multiplicity results, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 18 (2011), no. 5, 539-556.
<https://doi.org/10.1007/s00030-011-0106-5>.
- [FS] M. Ferrara, S. Khademloo, and S. Heidarkhani, Multiplicity results for perturbed fourth- order Kirchhoff type elliptic problems, *Appl. Math. Comput.* 234 (2014), 316-325.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.041>.
- [JP] J. García Azorero and I. Peral Alonso, On limits of solutions of elliptic problems with nearly critical exponent, *Comm. Partial Differential Equations* 17 (1992), no. 11-12,2113-2126. <https://doi.org/10.1080/03605309208820916>.
- [SL] S. Hu and L.Wang, Existence of nontrivial solutions for fourth-order asymptotically linear elliptic equations, *Nonlinear Anal.* 94 (2014), 120-132.
<https://doi.org/10.1016/j.na.2013.08.008>.
- [KI] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

- [JL] J.-L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), 284-346, North-Holland Math. Stud., 30, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [MT] M. Massar, E. M. Hssini, N. Tsouli, and M. Talbi, Ininitely many solutions for a fourth-order Kirchhoff type elliptic problem, J. Math. Comput. Sci. 8 (2014), no. 1, 33-51.
<https://doi.org/10.22436/jmcs.08.01.04>.
- [RC] B. Ricceri, A general variational principle and some of its applications, J. Comput. Appl. Math. 113 (2000), no. 1-2, 401-410.
[https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(99\)00269-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00269-1).
- [JG] ———, On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters, J. Global Optim. 46 (2010), no. 4, 543-549.
<https://doi.org/10.1007/s10898-009-9438-7>.
- [YM] Y.-M. Wang, On fourth-order elliptic boundary value problems with non-monotone nonlinear function, J. Math. Anal. Appl. 307 (2005), no. 1, 1-11.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.063>.
- [FY] F. Wang and Y. An, Existence and multiplicity of solutions for a fourth-order elliptic equation, Bound. Value Probl. 2012 (2012), no. 6, 9 pp.
<https://doi.org/10.1186/1687-2770-2012-6>.
- [MY] F. Wang, M. Avci, and Y. An, Existence of solutions for fourth order elliptic equations of Kirchhoff type, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), no. 1, 140-146.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.003>.
- [KP] B. Kawohl, P. Lindqvist. Positive eigenfunctions for the p-Laplace operator. Revisited; Analysis 19; 331-366; 2001.
- [PL] P. Lindqvist, A nonlinear eigenvalue problem. Norwegian University of Science and Technology N-7491; Trondheim; Norway.
- [VK] Vo-khac, khoan Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles. Tome 2; Vuibert, paris.
- [LM] W. Rudin, Real and complex analysis, 3rd ed; McGraw-Hill.
- [Mal] P. Malliavin, Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale; Masson.

- [Bre] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*; Masson, Paris, 1987.
- [LM] J.- L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol.I*; Dunod, Paris, 1968.
- [GT] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *elliptic partial differential equations of second order*; Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Ev] L. C. Evans, *Partial differential equations, Vol.19*; American Mathematical Society.
- [Ka] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*; Springer-Verlag.
- [Bo] V.I. Bogachev *Measure theory, Vol.I*; Springer.
- [RT] P.A. Raviart, J.M Thomas *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*; Masson, Paris, 1983.
- [RA] Robert A. Adams, John J. F. Fournier *sobolev spaces, Vol.II*; Academic Press.
- [MW] J. Mawhin, M. Willem, *Critical point theory and hamiltonian systems, Appl. Math. Sci*; Springer-Verlag, New York, 1989.
- [PM] P. Rabinowitz, *Minimax method in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Amer. Math. Soc., No 65, 1986*; American Mathematical Society.
- [ME] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear elliptic equations for beginners*; Springer, London, 2011.
- [RP] Robert R. Phelps *Convex Functions, monotone operators and differentiability*; Springer, Vol.II.
- [AF] G. Allaire, F. Alouges *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*; École Polytechnique, année 2015 2016.

المُلخَص:

في هذا العمل قمنا بدراسة إشكالية وجود ووحدانية الحل الضعيف الموجب لصنف من المسائل الحدية للمعادلات الإهليجية الغير خطية من نوع كيرشوف الحاملة للأس الحرج لسوبولاف. وقد تم دراسة نوعين من المسائل ويعتبر الأول حالة خاصة من المسائل التي تطرقنا لها أما الثاني فهو تعميم لهذه الحالة الخاصة. واعتمدنا خلال دراستنا على نظرية النقاط الحرجة التي تركز على وجه التحديد على تدنية (تصغير) الدوال المرتبطة بمسائل ذات حدود لإظهار وجود الحل.

الكلمات المفتاحية: مسائل إهليجية, نقطة حرجة, أساليب التغيرات, تدنية (تصغير), الأس الحرج لسوبولاف

Résumé :

L'objectif de ce memoire est d'étudier l'existence et l'unicité de solution pour deux problemes elliptiques non linéaire avec exposant critique de Sobolev de type Kirchhoff l'un de ces problèmes est généralisation de l'autre. on utilise pour cette étude une méthode variationnelle basée sur la recherche des points critiques et on s'appuie plus précisément sur la minimisation des fonctionnelles associés aux problèmes pour établir des solutions faibles positives.

Mots-clés : *problème elliptique, point critique , méthode variationnelle, minimisation, exposant critique de Sobolev*

Abstract :

The purpose of this thesis is to study the existence and uniqueness of the solution for two nonlinear elliptic problems with a critical exponent of Sobolev with Kirchhoff type. One of these problems is a generalization of the other one. For this study, we use a variational method based on the search for critical points, more precisely we rely on the minimization of the associated functional with boundary problems to establish positive weak solution.

Keywords : *elliptic problems, critical point, variational method, minimization, critical exponent of sobolev*