

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE
pour obtenir le diplôme de
MASTER EN MATHÉMATIQUES

Sur une équation elliptique de type
de Kirchhoff avec un terme qui
change de signe

Présenté par :
Bouabane SORYA

Encadré par :
Dr. Khaldi BRAHIM

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

AA	Prof	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma -	Président
BB	MAA	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma -	Encadreur
CC	MCB	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma -	Examineur

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma mère , à ma soeur, à mes frères et très particulièrement, pour le soutien et l'aide qu'ils m'ont apportés durant mes études et sans qui ce travail n'aurait pas pu avoir lieu. A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai passé ces cinq années agréable , pleine de joie et de bonheur. A tous mes enseignants.

Remerciement

Au nom de dieu le tout puissant, clément et miséricordieux.

je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de manière directe ou indirecte à l'aboutissement de ce travail. En premier lieu, je remercie vivement monsieur Khaldi Brahim qui m'a fait l'honneur d'effectuer ce mémoire sous sa direction. j'ai apprécié son enthousiasme, sa disponibilité, son sens critique et ces pertinents conseils.

je tiens à remercier monsieur, qui nous a fait l'honneur de présider le jury.

je tiens aussi à remercier les membres de jury monsieur et monsieur qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.

je remercie tous nos enseignants, sans qui ce travail n'aurait pas pu avoir lieu.

Notations

Symbole	Signification
Ω	$\cdot$ Ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	Le bord de Ω .
$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$	Elément de $\mathbb{R}^N$.
$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_N)$	Mesure de Lebesgue sur Ω .
Δu	Laplacien de la fonction u .
∇u	Gradient de u .
u^+	Partie positive de la fonction u , $u^+ = \max(u; 0)$.
u^-	Partie negative de la fonction u , $u^- = \max(-u; 0)$.
$u_n \rightarrow u$	Convergence forte de u_n vers u .
$u_n \rightharpoonup u$	Convergence faible de u_n vers u .
$ u _p$	La norme de l'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
$\ u\ $	La norme de l'espace $H_0^1(\Omega)$.
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	Exposant critique de Sobolev.
q	Exposant conjugué de p .i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $(1 \leq p < \infty)$.
E'	Espace dual de E .
$p.p$	Presque partout.
$\langle, \rangle_{E, E'}$	Crochet de dualité entre E et son dual .
$(. .)$	Le produit scalaire
$o(1)$	Désigne toute quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infni.
λ_1	La première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Résumé

Dans ce mémoire on étudie l'existence de solutions positives du problème de type Kirchhof suivant :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2) \Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

En premier lieu on étudie l'existence et la non existence d'une solution positive de ce problème quand la fonction M est croissante .

En second lieu notre étude domine sur l'existence d'une solution positive où la fonction M est décroissante et f est une fonction continue qui change de signe.

Pour prouver ces résultats en utilisant la méthode de Galerkin, un argument variationnel et la technique de sous et sur solutions.

Mots Clés : Problème elliptiques de type Kirchhoff, méthode variationnelle, la méthode de Galerkin, solution positive, la technique sous et sur solutions.

Introduction

Les études des vibrations des corps solides ne purent se développer que avec la mise au point de la théorie mathématique des vibrations élastiques entreprise par Robert Hooke entre 1660 et 1676.

En 1876, Kirchhoff [6] proposa ce type de problèmes comme étant une généralisation aux cordes vibrantes de l'équation classique des ondes de D'Alembert. Le modèle initialement étudié fût,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left\{ p_0 + p_1 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (0.1)$$

où p_0 dépend de la tension initiale, p_1 est une caractéristique du matériau du fil, $u(x, t)$ dénote le déplacement vertical du point x du fil à l'instant t . De tels problèmes sont souvent appelés non locaux car l'équation contient une intégrale sur Ω .

Dans ce mémoire on étudie l'existence de solutions positives du problème de type Kirchhof suivant :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2) \Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 2$) à frontière régulière $\partial\Omega$, λ est un paramètre réel positif, M et f sont deux fonctions satisfaisant les hypothèses suivantes :

(M_0) M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$M(s) \geq m_0, \forall s \geq 0$$

pour un certain $m_0 > 0$.

(f_1) $f \in C^1(\bar{\Omega})$

(f_2) f change de signe sur $\bar{\Omega}$

(f_3) le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution non négative.

En tenant compte de la monotonie de la fonction M et suivant les valeurs de l'exposant p des résultats d'existence ont été donnés.

Ce Mémoire comporte trois chapitres :

Chapitre1 : On rappelle quelques outils de base de l'analyse fonctionnelle , des théorèmes fondamentaux et nous citons quelques définitions et résultats connus utilisé dans ce mémoire .

Chapitre2 : Nous abordons la question de l'existence de solutions positives pour le problème (0.2). Plus exactement on a démontré les résultats suivants :

Théorème 0.1

On suppose que $f \in C^1(\bar{\Omega})$ et (M_0) est satisfaite alors :

- 1) *si $0 < p < 1$ problème (0.2) admet une solution pour tout $\lambda > 0$*
- 2) *si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (0.2) admet une solution pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$*

La preuve de ce théorème repose sur la méthode de Galerkin.

Chapitre3 : L'objet de ce chapitre est l'étude du problème (0.2), c'est-à-dire établir les résultats d'existence et non existence de solutions positives dans le cas où la fonction M est non croissante.

Dans la plupart des travaux concernant le problème (0.2) on suppose que M est décroissante, notamment quand il s'agit d'une étude par la méthode variationnelle. L'intérêt la deuxième partie de ce chapitre réside dans le fait que la fonction M est croissante, chose qui est, de point de vue physique, justifiée puisque dans le problème initialement abordé par Kirchhoff en 1876, M est une fonction affine croissante. En utilisant la méthode de sous et sur solutions, des résultats d'existence dans le cas où M est croissante sont prouvés. Plus précisément les résultats de ce chapitre sont donnés par les théorèmes suivants :

Théorème 0.2

On suppose que les hypothèses (f_1) à (f_3) sont vérifiées, $p > 1$ et la fonction M est non croissante satisfaisant (M_0) . On suppose de plus que la fonction $H(t) := tM(t^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors il existe λ_ et λ^* , $0 < \lambda_* < \lambda^*$ tels que le problème (0.2) admet au moins une solution positive pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$ et aucune solution positive pour $\lambda > \lambda^*$.*

Théorème 0.3

Si les hypothèses (f_1) et (f_2) sont satisfaites, $0 < p < 1$ et la fonction M est non décroissante satisfaisant (M_0) , alors le problème (0.2) admet une solution à énergie négative.

Table des matières

Notations	4
Résumé	5
Introduction	6
1 Résultats préliminaires	11
1.1 L'équation de Kirchhoff	11
1.2 Espaces fonctionnels	11
1.2.1 Les Espaces L^p	11
1.2.2 Espace de sobolev	12
1.2.3 Espace $H^1(\Omega)$	13
1.2.4 Espace $H_0^1(\Omega)$	14
1.3 Quelques définitions et théorèmes	15
1.3.1 Quelques inégalités fonctionnelles	15
1.3.2 Quelques théorèmes de base de l'analyse fonctionnelle . .	16
1.3.3 Convergence forte et Convergence faible	17
1.3.4 La topologie faible $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$	17
1.3.5 La topologie faible* $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$	18
1.4 Approche variationnelle	19
1.4.1 Formules de Green	19
1.4.2 Formulation variationnelle	20
1.4.3 Théorie de Lax-Milgram	21
2 Résultat d'existence par la méthode de Galerkin	23
2.1 Introduction	23
2.1.1 La Méthode de Galerkin	23
2.1.2 Postion du problème	23
2.2 Résultat d'existence	24
2.2.1 Théorème 2.1	24
2.2.2 Démonstration du théorème 2.1	24

3	Problème elliptique de type de Kirchhoff avec un terme qui change de signe	28
3.1	Introduction	28
3.2	La fonction M est non croissante	29
3.2.1	Résultats d'existence	29
3.2.2	Démonstration du théorème 3.1	29
3.3	La fonction M est non décroissante	33
3.3.1	Résultat d'existence	33
3.3.2	Démonstration du théorème 3.2	33
	Bibliographie	35
	Bibliographie	36

Chapitre 1

Résultats préliminaires

1.1 L'équation de Kirchhoff

L'équation de type Kirchhoff est de la forme suivante :

$$(P) \begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière $\partial\Omega$, f une fonction de Carathéodory et qui sera spécifiée ultérieurement et M est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$. Le problème (P) est appelé non local en raison de la présence du terme $M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)$ qui implique que l'équation n'est plus une identité ponctuelle. Cela provoque certaines difficultés mathématiques qui rendent l'étude d'un tel problème intéressante. Ce genre de problèmes ont des motivations physiques.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les Espaces L^p

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty \}$$

et

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \exists c \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p.} \}$$

Théorème 1.1 [4]

Muni de la norme $\|\cdot\|_p$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach, avec

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c \text{ p.p.}\} \quad \forall f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

Définition 1.1 [4]

On définit $C_c(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions réelles continues à support compact, i.e :

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est continue et } \text{Supp}(f) \text{ est compact}\},$$

où $\text{Supp}(f)$ est le support de f défini par

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

Théorème 1.2 [4]

L'espace $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tous $p \in [1, +\infty[$, c'est à dire que toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^n)$ on peut l'approximer par une fonction continue à support compact.

1.2.2 Espace de sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrable, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.2 [2]

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que : } \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega), \forall i=1,2,\dots,n \right\}$$

On note $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$

Théorème 1.3 [2]

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |u|_p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p$$

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$. Il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ Il est clair que l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

1.2.3 Espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.3 [5]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v .

En physique ou en mécanique l'espace de Sobolev est souvent appelé espace d'énergie au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (c'est-à-dire de norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ finie). Les fonctions d'énergie finie peuvent éventuellement être "singulières" ce qui a un sens physique possible (concentration ou explosion locale de certaines grandeurs).

Proposition 1.1 [5]

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Lemme 1.1 [5]

Pour toute fonction $v \in H^1(0, 1)$ et pour tout $x, y \in [0, 1]$, on a

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s) ds$$

Plus généralement, pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $v \rightarrow v(x)$, définie de $H^1(0, 1)$ dans $\mathbb{R}$, est une forme linéaire continue sur $H^1(0, 1)$. En particulier, toute fonction $v \in H^1(0, 1)$ est continue sur $[0, 1]$.

Il est très important en pratique de savoir si les fonctions régulières sont denses dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. Cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev qui apparaît ainsi très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complété par les limites de suites de fonctions régulières dans la norme de l'énergie $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Cela permet de démontrer facilement de nombreuses propriétés en les établissant d'abord sur les fonctions régulières puis en utilisant un argument de "densité".

Théorème 1.4 de densité [5]

Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, ou encore si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Rappelons que la notation $\mathbb{R}_+^N$ désigne le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } x_N > 0\}$.

Remarque 1.1 [5]

L'espace $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ qui est dense dans $H^1(\Omega)$ est constitué des fonctions régulières de classe C^∞ à support borné (ou compact) dans le fermé $\bar{\Omega}$. En particulier, si Ω est borné, toutes les fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})$ ont nécessairement un support borné, et donc $C_c^\infty(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$. Précisons que les fonctions de $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ ne s'annulent pas nécessairement sur le bord de l'ouvert Ω , ce qui différencie cet espace de $C_c^\infty(\Omega)$. Par contre, si Ω n'est pas borné, les fonctions de $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ s'annulent "à l'infini".

1.2.4 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.4 [5]

Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω . L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

On sait que $H_0^1(\Omega)$ est en fait le sous espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ puisque tel est le cas des fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. En général, $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$ car $C_c^\infty(\Omega)$ est un sous-espace strict de $C_c^\infty(\bar{\Omega})$. Une exception importante est le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$: en effet, dans ce cas $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^N = \Omega$ et le Théorème 1.4 affirme que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, donc on a $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. Cette exception se comprend aisément puisque l'espace entier $\mathbb{R}^N$ n'a pas de bord.

1.3 Quelques définitions et théorèmes

1.3.1 Quelques inégalités fonctionnelles

1.3.1.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.5

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors

$$f, g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

1.3.1.2 Inégalité de Poincaré

Proposition 1.2 [5]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

Théorème 1.6

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $s \in (0, 1)$ et $p \in [1, +\infty[$ alors : il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

Par conséquent si Ω est bornée alors $\|\cdot\|_{W_0^{s,p}(\Omega)}$ est une norme de $W_0^{s,p}(\Omega)$ équivalente à $\|\cdot\|_{W^{\theta,p}(\Omega)}$ avec

$$\|u\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - (u)y|}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.3.1.3 Inégalité de Young

Théorème 1.7

Soient a et b deux réels positifs, et p et q des réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors on a

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

1.3.1.4 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.8

Soient (X, A, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions $f, g \in L^p(X)$. Alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

C'est-à-dire

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.3.2 Quelques théorèmes de base de l'analyse fonctionnelle

Théorème 1.9 Fubini

Soient Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$f(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$f(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

Théorème 1.10 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que : 1- $f_n(X) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω 2- Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n , $f_n(X) \leq g(x)$ p.p sur Ω . Alors

$$f \in L^1 \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

Théorème 1.11 lemme de Fatou

Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :

1- Pour chaque $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω ,

2- $\sup \int_{\Omega} f_n(x) < +\infty$

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

1.3.3 Convergence forte et Convergence faible

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans E .

Définition 1.5

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans E si

$$\|u_n - u\|_E \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Définition 1.6

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans E si

$$\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in E'$$

1.3.4 La topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach. On note E' l'espace dual c'est à dire l'espace des formes linéaires et continue sur E .

Définition 1.7 [2]

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la plus faible (la moins fine) sur E rendant continues toutes les applications $\phi \in E'$. On la note $\sigma(E, E')$.

Étant donnée une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de E , on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.3 [2]

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de E , on a :

1. $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ ssi $f(x_n) \rightarrow f(x)$ pour toute $f \in E'$
2. Si $x_n \rightarrow x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$$

4. Si $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E, E')$ et $f_n \rightarrow f$ fortement dans E' , alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$

1.3.5 La topologie faible* $\sigma(E', E)$

Soient E un espace de Banach et E' son dual. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle \in \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle, \quad f \in E'$$

Lorsque x parcourt E , on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x \in E}$

Définition 1.8 [2]

La topologie faible* sur E' est la topologie la plus faible sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$. On la note $\sigma(E', E)$

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de E' , on désigne par $f_n \xrightarrow{*} f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.

Proposition 1.4 [2]

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de E' , on a :

1. $f_n \rightarrow f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ ssi $\varphi_x(f_n) \rightarrow \varphi_x(f)$ pour toute $x \in E$
2. Si $f_n \rightarrow f$ fortement alors $f_n \rightarrow f$ faiblement pour $\sigma(E', E)$
Si $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E)$ alors $f_n \rightarrow f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$
3. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et

$$\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|$$

4. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ et $x_n \rightarrow x$ fortement dans E , alors $\varphi_{x_n}(f_n) \rightarrow \varphi_x(f)$

Théorème 1.12 Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki [2]

L'ensemble

$$\overline{B}_{E'} = \{f \in E' : \|f\|_{E'} \leq 1\}$$

est compact pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$

Définition 1.9 Espaces réflexifs et la compacité

Soit E un espace de Banach. On rappelle que E s'injecte dans son bidual E'' via l'injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit : pour chaque $x \in E$, l'application

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

constitue une forme linéaire continue sur E' c'est-à-dire un élément de E'' noté J_x : On a donc

$$J_x(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E, \forall f \in E'$$

J est une isométries de E sur E'' i.e $\|J_x\|_{E'} = \|x\|_E$ pour tous $x \in E$, en effet

$$\|J_x\|_{E'} = \sup_{\|J_x\|_{E'} \leq 1} |J_x(f)| = \sup_{\|J_x\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_E$$

Théorème 1.13 Kakutani [2]

Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si

$$\overline{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$

1.4 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

1.4.1 Formules de Green

Dans toute cette sous-section Ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^N$ (borné ou non), dont le bord (ou la frontière) est noté $\partial\Omega$. Nous supposons aussi que Ω est un ouvert régulier de classe C^1 .

Théorème 1.14 Formule de Green [5]

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit w une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds$$

où n_i est la i -ème composante de la normale extérieure unitaire de Ω .

Remarque 1.2 [5]

Dire qu'une fonction régulière w a son support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$ veut dire qu'elle s'annule à l'infini si le fermé n'est pas borné. On dit aussi que la fonction w a un support compact dans $\bar{\Omega}$ (attention : cela n'implique pas que w s'annule sur le bord $\partial\Omega$). En particulier, l'hypothèse du Théorème 1.2.1 à propos du support borné de la fonction w dans $\bar{\Omega}$ est inutile si l'ouvert Ω est borné. Si Ω n'est pas borné, cette hypothèse assure que les intégrales dans (1.5) sont finies. Le Théorème 1.2.1 a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green (1.5). Le lecteur qui voudra économiser sa mémoire ne retiendra donc que la formule de Green (1.5)!

Corollaire 1.1 *(Formule d'intégration par parties) [5]*

Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit u et v deux fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé Ω . Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds$$

Corollaire 1.2 [5]

Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.

1.4.2 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (1.1) est continu sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

Propriété 1.1 [5]

Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$. Soit X l'espace défini par

$$X = \{ \phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.1) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ pour toute fonction } v \in X \quad (1.8).$$

L'égalité (1.8) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites.

Remarque 1.3 [5]

Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (1.8) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (1.1) qui requiert que u appartienne à $C^2(\bar{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (1.8) que (1.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

Dans la formulation variationnelle (1.8), la fonction v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (1.1). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.

Lorsqu'on prend $v = u$ dans (1.8), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (1.8)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (1.8)).

Lemme 1.2 [5]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $g(x)$ une fonction continue dans Ω . Si pour toute fonction ϕ de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω , on a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = 0$$

alors la fonction g est nulle dans Ω .

Remarque 1.4 [5]

En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (1.8) sous la forme : trouver $u \in X$ tel que $a(u, v) = L(v)$ pour toute fonction $v \in X$, avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(\cdot)$ est une forme linéaire sur X . C'est sous cette forme abstraite que nous résoudrons (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine section.

1.4.3 Théorie de Lax-Milgram

Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V . Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y \rangle$, qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est une suite convergente dont la limite appartient à cet espace.) Suivant la Remarque 1.2.10 nous considérons une formulation variationnelle du

type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \quad (1.13)$$

Les hypothèses sur a et L sont 1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V;$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $w \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$; 3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w, v)| \leq M\|w\|\|v\| \text{ pour tout } w, v \in V \quad (1.14)$$

4. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \nu\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V \quad (1.15)$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (1.13). En particulier, la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ est essentielle.

Théorème 1.15 *Lax-Milgram* [5]

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V , $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle (1.13) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L .

Proposition 1.5 [5]

On se place sous les hypothèses du Théorème 1.15 de LaxMilgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (1.13). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (1.13).

Chapitre 2

Résultat d'existence par la méthode de Galerkin

2.1 Introduction

2.1.1 La Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

2.1.2 Postion du problème

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'existence et la non existence de solutions pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2) \Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 2$) à frontière régulière $\partial\Omega$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$, λ est un paramètre réel positif et M est une fonction continue, positive et satisfait l'hypothèse suivante :

(M_0) M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$M(s) \geq m_0, \forall s \geq 0$$

pour un certain $m_0 > 0$.

2.2 Résultat d'existence

2.2.1 Théorème 2.1

Le résultat de ce chapitre est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.1

On suppose que $f \in C^1(\bar{\Omega})$ et (M_0) est satisfaite alors :

- 1) si $0 < p < 1$ problème 3.1 admet une solution pour tout $\lambda > 0$
- 2) si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (2.1.1) admet une solution pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$

La démonstration du Théorème 2.1 est basée sur la proposition suivante :

Proposition 2.1 [9]

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et $B(0, r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine et de rayon r . Si $\langle F(x), x \rangle > 0$ pour tout $x \in \partial B(0, r)$ alors il existe $x_0 \in B(0, r)$ tel que $F(x_0) = 0$.

2.2.2 Démonstration du théorème 2.1

Soit (e_k) une base orthonormale complete de $H_0^1(\Omega)$ pour tout $n \in N^*$ considérons l'espace V_n de dimension n telque :

$V_n = \text{Vect} \{e_1, \dots, e_n\}$ comme $(V_n, \|\cdot\|)$ isometrique à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ pour tout $v \in V_n$ $v = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ On peut donc faire l'identification $v \in \mathbb{R}^n$

soit u_n une solution approximative du probleme 3.1, donc :

$$M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla e_k dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k dx = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

soit l'opérateur

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, tq \quad F(u_n) = (F_1(u_n), \dots, F_n(u_n))$$

avec

$$F_k(u_n) = M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla e_k \, dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k \, dx$$

en remp  lant $u_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \varrho_i$, on écrit :

$$F_k(u_n) = M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varrho_i \right) \nabla e_k \, dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} u_n + \lambda f(x)) e_k \, dx$$

donc

$$F_k(u_n) = M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \nabla \varrho_i \right) \nabla e_k \, dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n e_k \, dx - \int_{\Omega} \lambda f(x) e_k \, dx$$

$$F_k(u_n) = M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \nabla \varrho_k \nabla e_k \, dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n e_k \, dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) e_k \, dx$$

avec $\nabla \varrho_i \nabla e_k = 1$ pour $i = k$ et $\nabla \varrho_i \nabla e_k = 0$ pour $i \neq k$

on obtient :

$$F_k(u_n) = M(\|u_n\|^2) \xi_k - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n e_k \, dx - \int_{\Omega} \lambda f(x) e_k \, dx$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle F(u_n), u_n \rangle &= M(\|u_n\|^2) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_k \right) \, dx \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} f(x) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_k \right) \, dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} \, dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) u_n \, dx \end{aligned}$$

De (M_0) , (f_1) et l'injection de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} \langle F(u_n), u_n \rangle &\geq m_0 \|u_n\|^2 - C \|u_n\|^{p+1} - \lambda C |f|_2 \|u_n\| \\ &\geq (m_0 \|u_n\| - C \|u_n\|^p - \lambda C |f|_2) \|u_n\|. \end{aligned}$$

En comparant les courbes C_1 et C_2 définies respectivement par $y = m_0^{-1}Ct^p$ et $y = t - m_0^{-1}\lambda C|f|_2$ on en déduit que :

(i) Si $0 < p < 1$ alors pour les grandes valeurs de $t = \|u\|$, la droite C_2 est au-dessus de C_1 pour tout $\lambda > 0$.

(ii) Si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ alors pour les petites valeurs de $\|u\|$, C_2 est au-dessus de C_1 jusqu'à une valeur limite $\lambda_0 > 0$.

D'où, dans les deux cas, il existe $r = r(\lambda) > 0$ tel que $\langle F(u_n), u_n \rangle > 0$ pour $\|u_n\| = r$.

D'après la Proposition 2.1, il existe $u_n \in V_n$, solution approximative du problème (P) avec $\|u_n\| < r$.

La suite obtenue (u_n) est bornée, d'où en passant à une sous-suite si nécessaire, il existe $\gamma > 0$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que :

$$\|u_n\| \rightarrow \gamma \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Fixons k dans 2.2 et faisons tendre n vers ∞ , on obtient

$$M(\gamma^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla e_k dx - \int_{\Omega} (|u|^{p-1}u + \lambda f(x)) e_k dx = 0$$

et puisque (e_k) est une base de $H_0^1(\Omega)$

$$M(\gamma^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (|u|^{p-1}u + \lambda f(x)) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

en particulier pour $\varphi = u$ il vient

$$M(\gamma^2) \|u\|^2 - \int_{\Omega} (|u|^{p+1} + \lambda f(x)u) dx = 0 \tag{2.3}$$

De façon similaire, de 2.2 on a

$$M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1}u_n + \lambda f(x)) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in V_n$$

pour $\varphi = u_n$ on obtient

$$M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} (|u_n|^{p+1} + \lambda f(x)u_n) dx = 0$$

en faisant tendre n vers ∞ et en utilisant l'injection compacte $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ on arrive à

$$M(\gamma^2) \gamma^2 - \int_{\Omega} (|u|^{p+1} + \lambda f(x)u) dx = 0 \quad (2.4)$$

De 2.3 et 2.4 on a $\gamma = \|u\|$ et donc $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.1

On voit, de cette démonstration qu'il est suffisant de prendre $f \in H^{-1}(\Omega)$ à la place (f_1) , où $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

Chapitre 3

Problème elliptique de type de Kirchhoff avec un terme qui change de signe

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'existence de solutions positives du problème de type Kirchhoff suivant :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2) \Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N > 2)$ à frontière régulière $\partial\Omega$, $f \in C^1(\bar{\Omega})$ qui change de signe, M est une fonction continue et positive et λ est un paramètre réel positif. De plus supposons que les fonctions M et f sont satisfaites les hypothèses suivantes :

(M_0) M est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$M(s) \geq m_0, \forall s \geq 0$$

pour un certain $m_0 > 0$.

(f_1) $f \in C^1(\bar{\Omega})$

(f_2) f change de signe sur $\bar{\Omega}$

(f_3) le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution non négative.

Pour l'existence de telles fonctions f , on se réfère à l'article [3], dans lequel les auteurs ont traité un problème plus général. On donne ici la version de leur Théorème 4 pour le problème (P_f) .

3.2 La fonction M est non croissante

3.2.1 Résultats d'existence

Le résultat de cette section est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1

On suppose que les hypothèses (f_1) à (f_3) sont vérifiées, $p > 1$ et la fonction M est non croissante satisfaisant (M_0) . On suppose de plus que la fonction $H(t) := tM(t^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors il existe λ_ et λ^* , $0 < \lambda_* < \lambda^*$ tels que le problème (P) admet au moins une solution positive pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$ et aucune solution positive pour $\lambda > \lambda^*$.*

3.2.2 Démonstration du théorème 3.1

Dans cette section on suppose que $p > 1$ et que la fonction M est non croissante vérifiant (M_0) . Nous allons utiliser la méthode de sous et sur-solution. Soit u_f une solution non négative du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

l'existence de la solution u_f s'ensuit de (f_3) . On détermine une sous-solution de 3.1 sous la forme

$$\underline{u} = \gamma u_f, \text{ with } \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} -M(\|\underline{u}\|^2) \Delta \underline{u} &= -M(\gamma^2 \|u_f\|^2) \gamma \Delta u_f \\ &= M(\gamma^2 \|u_f\|^2) \gamma f(x). \end{aligned}$$

$\underline{u}$ est une sous-solution de 3.1 si

$$-M(\|\underline{u}\|^2) \Delta \underline{u} \leq |\underline{u}|^{p-1} \underline{u} + \lambda f(x)$$

Pour obtenir la dernière inégalité on doit prendre γ tel que

$$M(\gamma^2 \|u_f\|^2) \frac{\gamma}{\lambda} = 1 \quad (3.2)$$

car la fonction f change de signe. Montrons alors que l'équation 3.2 admet au moins une solution positive γ . Posons $s = \gamma^2 \|u_f\|^2$, alors 3.2 devient

$$\psi(s) := \frac{M(s)\sqrt{s}}{\|u_f\|} = \lambda.$$

On a $\psi(0) = 0$ et $\lim \psi(s) = +\infty$, et comme ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$ il existe $s(\lambda) > 0$ tel que $\psi(s) = \lambda$. Ainsi il existe $\gamma > 0$ satisfaisant 3.2, et l'existence de u s'ensuit.

Cherchons maintenant une sur-solution $\bar{u}$ de (P) telle que $\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x), x \in \Omega$. Soit e l'unique solution positive du problème de Dirichlet suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Posons

$$\bar{u} = Ae, \text{ avec } A \in \mathbb{R}^+.$$

De (M_0) on a

$$-M(\|\bar{u}\|^2) \Delta \bar{u} = M(A^2 \|e\|^2) A \geq m_0 A$$

Si le nombre positif A vérifie la condition suivante,

$$m_0 A \geq A^p |e|_\infty^p + \lambda |f|_\infty$$

alors $\bar{u}$ fournit une sur-solution de 3.1. Pour monter l'existence d'un tel réel A , considérons la fonction h définie par,

$$h(A) = (m_0 A - A^p |e|_\infty^p) |f|_\infty^{-1}.$$

Un calcul simple montre que h est concave et atteint son maximum en

$$A_0 = \left(\frac{m_0}{p |e|_\infty^p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

D'où si $0 < \lambda < \lambda_0 = h(A_0)$ alors $\bar{u} = A_0 e$ est une sur-solution du problème 3.1 car.

$$-M(\|\bar{u}\|^2) \Delta \bar{u} \geq m_0 A_0 \geq |\bar{u}|_\infty^p + \lambda |f|_\infty \geq |\bar{u}|^{p-1} \bar{u} + \lambda f(x)$$

Et un choix adéquat de $0 < \lambda < \lambda_* \leq \lambda_0$ et donc de γ nous assure que

$$\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x), \quad x \in \Omega$$

Pour compléter la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 [10]

Sous les hypothèses du Théorème 3.1.3, si v et w sont des fonctions non négatives vérifiant

$$\begin{cases} -M(\|w\|^2) \Delta w \geq -M(\|v\|^2) \Delta v & \text{dans } \Omega \\ v = w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

alors

$$w \geq v \text{ dans } \Omega$$

Remarque 3.1

Voici un exemple de fonction M satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.1. On prend

$$M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, M(t) = \frac{at + b}{\alpha t + \beta} + c$$

où a, b, α, β et c sont des nombres positifs tels que

$$a\beta - b\alpha < 0 \text{ et } \frac{a + \alpha c}{b + \beta c} > \frac{1}{4}.$$

Maintenant pour obtenir une solution du problème (P) on définit la suite $(u_n)_{n \geq 0} \subset H_0^1(\Omega)$ par $u_0 = \bar{u}$ et $u_n (n \geq 1)$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -M(\|u_n\|^2) \Delta u_n = g(x, u_{n-1}) & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

où, pour simplifier on a posé $g(x, t) = |t|^{p-1}t + \lambda f(x)$.

Le problème 3.4 est M -linéaire en ce sens que si $u_{n-1} \in H_0^1(\Omega)$ est donné, le membre de droite est indépendant de u_n . Alors puisque $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $g(\cdot, u_{n-1}) \in L^2(\Omega)$, on en déduit d'un résultat dans [1] que le problème (P_2) admet une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant le fait u_0 est une sur-solution on écrit

$$-M(\|u_0\|^2) \Delta u_0 \geq g(x, u_0) = -M(\|u_1\|^2) \Delta u_1,$$

et d'après le lemme 3.1, $u_0 \geq u_1$. Et puisque $u_0 \geq \underline{u} \geq 0$ on a

$$-M(\|u_1\|^2) \Delta u_1 = g(x, u_0) \geq g(x, \underline{u}) \geq -M(\|\underline{u}\|^2) \Delta \underline{u},$$

de ceci, et encore une fois d'après le lemme 3.1, $u_1 \geq \underline{u}$. Pour u_2 on écrit

$$-M(\|u_1\|^2) \Delta u_1 = g(x, u_0) \geq g(x, u_1) = -M(\|u_2\|^2) \Delta u_2$$

et donc $u_1 \geq u_2$. De manière similaire $u_2 \geq \underline{u}$ car

$$-M(\|u_2\|^2) \Delta u_2 = g(x, u_1) \geq g(x, \underline{u}) \geq -M(\|\underline{u}\|^2) \Delta \underline{u}.$$

En répétant cet argument on obtient une suite monotone bornée $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$,

$$\bar{u} = u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots \geq \underline{u} \geq 0, \quad \underline{u} \neq 0$$

En utilisant les arguments de bootstrap on montre que $(u_n) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, et comme $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ on a $g(\cdot, u_n) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Les estimations de Schauder nous donnent $(u_n) \subset C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Multiplions à présent 3.4 par u_n et intégrons en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev, nous obtenons

$$H(\|u_n\|) \leq C$$

Le fait que $H(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, implique que (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et par suite bornée dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ qui s'injecte, avec injection compacte, dans $C^2(\bar{\Omega})$. Ainsi (u_n) contient une sous-suite qui converge dans $C^2(\bar{\Omega})$ vers une limite u telle que $u \geq \underline{u} \geq 0$. Etant monotone, (u_n) converge elle-même vers u .

Faisons tendre n vers ∞ dans 3.4, nous en déduisons que u est une solution positive du problème 3.1. Ceci termine la preuve du résultat d'existence pour $0 < \lambda < \lambda_*$.

En ce qui concerne le résultat de non existence du Théorème 3.1, soit λ_1 la première valeur propre de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ et ϕ_1 la fonction propre associée. Si u_λ est une solution positive du problème 3.1 alors

$$-M(\|u_\lambda\|^2) \int_{\Omega} \phi_1 \Delta u_\lambda dx = \int_{\Omega} u_\lambda^p \phi_1 dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) \phi_1 dx$$

d'où

$$\lambda \int_{\Omega} f(x) \phi_1 dx = \int_{\Omega} [\lambda_1 M(\|u_\lambda\|^2) u_\lambda - u_\lambda^p] \phi_1 dx.$$

La fonction M étant non croissante, alors

$$\lambda \int_{\Omega} f(x) \phi_1 dx \leq \int_{\Omega} [\lambda_1 M(0) u_\lambda - u_\lambda^p] \phi_1 dx.$$

Le maximum de la fonction $u_\lambda \mapsto \lambda_1 M(0) u_\lambda - u_\lambda^p$ est atteint en $u_\lambda = \left(\frac{\lambda_1 M(0)}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$.

En conséquence

$$\lambda \int_{\Omega} f(x) \phi_1 dx \leq \left(\frac{\lambda_1 M(0)}{p} \right)^{\frac{p}{p-1}} (p-1) \int_{\Omega} \phi_1 dx. \quad (3.5)$$

Rappelons que, d'après la condition (f_3) , le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

a une solution non négative $u_f \in H_0^1(\Omega)$ d'où

$$\int_{\Omega} f(x) \phi_1 dx = \int_{\Omega} -\Delta u_f \phi_1 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} u_f \phi_1 dx > 0$$

De cette dernière inégalité et de 3.5 on obtient

$$\lambda \leq \frac{\left(\frac{\lambda_1 M(0)}{p} \right)^{\frac{p}{p-1}} (p-1) \int_{\Omega} \phi_1 dx}{\int_{\Omega} f(x) \phi_1 dx} = \lambda^*$$

Ceci implique que le problème 3.1 n'admet pas de solution positive pour $\lambda > \lambda^*$.

3.3 La fonction M est non décroissante

Dans cette section on va traiter le problème dans le cas où la fonction M est non décroissante. Rappelons à ce niveau que la plupart des problèmes elliptiques de Kirchhoff étudiés supposent la fonction M non croissante, sinon des hypothèses plus restrictives sont imposées à M surtout quand il s'agit d'utiliser la méthode variationnelle. On peut consulter à ce propos le travail de Alves et al. [1].

3.3.1 Résultat d'existence

Le résultat de cette section est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2

Si les hypothèses (f_1) et (f_2) sont satisfaites, $0 < p < 1$ et la fonction M est non décroissante satisfaisant (M_0) , alors le problème 3.1 admet une solution à énergie négative.

3.3.2 Démonstration du théorème 3.2

Dans cette section on suppose que la fonction M est croissante, satisfait (M_0) et $0 < p < 1$.

On cherche les solutions qui sont des points critiques de la fonctionnelle d'énergie I associée au problème 3.1, définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(u) = \frac{1}{2} \widetilde{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) u dx$$

où $\widetilde{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$.

De la condition (M_0) , l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev on a

$$I(u) \geq \frac{1}{2} m_0 \|u\|^2 - \frac{C}{p+1} \|u\|^{p+1} - \lambda C \|u\| \|f\|_2$$

Puisque $1 < p+1 < 2$, la fonctionnelle I est coercive. Soit $\alpha = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u)$ et (u_n) une suite minimisante c-à-d vérifiant $I(u_n) \rightarrow \alpha$.

De la coercivité de I , la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on peut donc supposer que $u_n \rightarrow v$ faiblement, pour un certain $v \in H_0^1(\Omega)$.

La fonction M est positive, d'où $\widetilde{M}$ est croissante et comme $\|v\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$, on écrit

$$\widetilde{M}(\|v\|^2) \leq \widetilde{M}\left(\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|\right)^2\right)$$

La fonction $\widetilde{M}$ étant continue et $\|u_n\| \geq 0$ d'où

$$\widetilde{M}\left(\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|\right)^2\right) = \widetilde{M}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2\right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{M}(\|u_n\|^2)$$

Ainsi

$$\widetilde{M}(\|v\|^2) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{M}(\|u_n\|^2) \quad (3.6)$$

Sachant que $u \mapsto \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) u dx$, est faiblement continue alors

$$\frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) u_n dx \rightarrow \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) v dx \quad (3.7)$$

De 3.6 et 3.7 on en déduit que I est faiblement semi-continue inférieurement, et par conséquent

$$\alpha \leq I(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = \alpha$$

d'où $I(v) = \alpha$, ce qui montre que I atteint son infimum à la limite v . Montrons que v est à énergie négative. Posons

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega; f(x) > 0\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega; f(x) \leq 0\}$$

et choisissons une fonction positive $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\text{supp } \varphi \subset \Omega^+$. Pour $t \in (0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{1}{2} \widetilde{M}(\|t\varphi\|^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |t\varphi|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega^+} f(x) t\varphi dx - \lambda \int_{\Omega^-} f(x) t\varphi dx \\ &\leq \frac{1}{2} M(t^2 \|\varphi\|^2) \|\varphi\|^2 t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |\varphi|^{p+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2} M(\|\varphi\|^2) \|\varphi\|^2 t^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |\varphi|^{p+1} dx \end{aligned}$$

Puisque $1 < p+1 < 2$, on en déduit que $I(t\varphi) < 0$ pour les petites valeurs de t et donc

$$I(v) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq \inf_{0 < t < 1} I(t\varphi) < 0$$

v est alors un minimum global non trivial de I ayant une énergie négative. Le Théorème 3.2 est prouvé.

Bibliographie

- [1] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasi-linear elliptic equation of Kirchhoff type, *Computers and mathematics with applications*, 49 (2005) 85-93.
- [2] Hiam. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris 1987.
- [3] N. P. Cac, J. A. Gatica, Y. Li ; Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign ; *Nonlinear Analysis*, 37(1999) 501-510.
- [4] Pr. Dalila Azzam-Laouir , *Théorie des semi-groupes pour les étudiants de première année master* , Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel , juin 2020
- [5] Grégoire ALLAIRE - François ALOUGES , *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, Ecole Polytechnique ,2015
- [6] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig (1876).
- [7] J. L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 30(1978) 284-346.
- [8] T. F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, *Nonlinear Analysis*, 63(2005) 1967-1977.
- [9] J. L. Lions ; *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* ; Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [10] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces, *proceedings of the 2nd workshop on functionalanalytic methods in complex analysis*, (Trieste, 1993), World Scientific, Singapore.
- [11] N. P. Ca´c, J. A. Gatica, Y. Li ; Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign ; *Nonlinear Analysis*, 37(1999) 501-510