

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE CENTRE UNIVERSITAIRE SALHI
AHMED -NAÂMA-



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DÉPARTEMENT DE
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
MASTER EN MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ : Analyse fonctionnelle et EDP
FILIÈRE : Mathématiques

Fonction Génératrice des Moments et Application

Présenté par :

BERRAHAL BOUBAKR

devant le jury composé de :

Encadreur : LATTI Fethi	M.C.B	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-
Président : MEKKI Slimene	M.A.A	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-
Examineur : BELGUERNA Abderrahmane	M.C.A	C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Avant tout, je remercie "ALLAH" pour le tracé qu'il donne au chemin de notre vie, qui nous aide et nous guide, qui nous a permis de réaliser ce travail et nous a donné le pouvoir de le terminer.

Je veux remercier sincèrement Monsieur « *Latti Fathi* » en tant qu'encadreur et guide pour tout le soutien, l'aide, ainsi que pour ses précieux conseils et ses encouragements lors de la réalisation de notre mémoire. Nous tenons aussi à remercier nos parents pour le soutien moral et matériel. Si nous sommes ici aujourd'hui, c'est grâce à vous !

Je remercie aussi les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail. J'espère que leurs remarques, critiques, orientation et conseils nous seront très utiles pour une continuité dans le processus de recherche.

Enfin, je remercie mes amis et collègues de la promotion mathématiques académique 2021.

Merci

DÉDICACE

Tout d'abord, je remercie *ALLAH* de m'avoir donnée la capacité et la patience
d'aller jusqu'au bout du rêve.

Je dédie ce mémoire à mon père, qui a été toujours pour moi l'exemple dans cette
vie.

La chandelle de ma vie ma très chère mère, qu'elle trouve ici l'expression de mes
sentiments les plus profonds, pour le confort moral qu'elle m'a assuré tout au
long de mes études.

A mes soeurs, mes frères, et leurs enfants : « *Ahmed* », « *Aya* »
, « *Sadek* », « *Hadjer* », « *Abdellah* » et « *Fatoum* ».

Ainsi, qu'à mes oncles, mes tantes et leurs enfants.

A l'encadreur : Monsieur « *Latti Fathi* » qui m'a guidée pour réaliser ce
travail avec succès. A tous mes amis.

Enfin, je dédie ce mémoire à tous ceux qui mon soutenue de loin ou de prêt.

Merci.

Abou Bakr Essedik

Table des matières

Introduction	7
1 Lois des Probabilité	9
1.1 Lois Discrètes	10
1.1.1 Loi Uniforme	10
1.1.2 Loi de Bernoulli	10
1.1.3 Loi Binomiale	11
1.1.4 Loi de Poisson	13
1.1.5 Loi Binomiale Négative	14
1.1.6 Loi Géométrique	15
1.1.7 Loi Hypergéométrique	17
1.2 Lois Continues	18
1.2.1 Loi Uniforme	18
1.2.2 Loi Normale	19
1.2.3 Loi Log-Normale	21
1.2.4 Loi Exponentielle	22

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	4
1.2.5 Loi Gamma	23
1.2.6 Loi du Chi2	25
1.2.7 Loi de Student	26
1.2.8 Loi de Fisher	27
1.3 Simulations de Lois	29
1.3.1 Théorème d'inversion	29
1.3.2 Simulation d'une Loi Continue	29
1.3.3 Simulation d'une loi discrète	29
2 Fonction Génératrice des Moments	31
2.1 Fonction Génératrice des Moments	31
2.2 Fonction Génératrice des Moments des Lois Usuelles	36
2.2.1 Fonction Génératrice de la Loi de Bernoulli	37
2.2.2 Fonction Génératrice de la Loi Binomiale	37
2.2.3 Fonction Génératrice de la Loi de Poisson	38
2.2.4 Fonction Génératrice de la Loi Géométrique	39
2.2.5 Fonction Génératrice de la Loi Uniforme	40
2.2.6 Fonction Génératrice de la Loi Hypergéométrique	41
2.2.7 Fonction Génératrice de la Loi Binomiale Négative	42
2.2.8 Fonction Génératrice de la Loi de Pascal	43
2.3 Tableau des Fonctions Génératrice des Lois Usuelles	44
3 Application	45
3.1 Application dans le Calcul des Probabilités	45

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
3.2 Application dans les Calcule des Lois	47
3.2.1 Loi de Bernoulli	47
3.2.2 Loi Binomiale	49
3.2.3 Loi Continue Uniforme	51
3.2.4 Loi de Poisson	52
Conclusion	53
Bibliographie	53

Table des figures

1.1	$X =$ nombre de boules rouges	11
1.2	$X =$ nombre de boules rouges	12
1.3	$X =$ nombre de boules blanches précédent la r° boule rouge . . .	15
1.4	$X =$ rang de la 1 $^{\circ}$ boule rouge	16
1.5	$X =$ nombre de boules rouges	17

Introduction

Historiquement, le calcul des probabilités s'est développé au 17^{ème} siècle autour de problèmes de jeux, dans des situations où le nombre des cas possibles est fini.

En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilités décrit le comportement aléatoires d'un phénomène dépendant du hasard.

L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard.

Jeux de dés, tirage de boules dans des urnes et jeu de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir les expériences aléatoires.

Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de les résultats possibles sont finis ou au plus dénombrables.

Certaines questions ont cependant fait apparaissant des lois à support infini non dénombrable ; par exemple, lorsque le nombre de tirages de pile ou face effectués tend vers l'infini, la répartition du nombre de piles obtenues s'approche d'une loi normale.

Des fluctuations ou de la variabilité sont présentes dans presque toute valeur qui peut être mesuré lors de l'observation d'un phénomène, quelle soit sa nature ; de plus presque toutes les mesures ont une part d'erreur intrinsèque.

Les lois de probabilités permettent de modéliser ces incertitudes et de décrire des phénomènes physiques, biologiques, économiques,...etc.

Le domaine de la statistique permet de trouver des lois de probabilités adapté aux phénomènes aléatoires.

Le propos de ce mémoire est donc de présenter les fonctions génératrices des moments ses propriétés et ses applications comme une partie très importantes de la théorie des probabilités.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Quelques notions de base de la théorie des probabilités en particulier les lois usuelles de probabilités sont données dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre on entame les notions sur les fonctions génératrice des moments et ses propriétés, en calculons on détail les fonctions génératrice des moments des lois usuelles de probabilités.

Enfin, le dernier chapitre on donne quelques des applications de la fonction génératrice des moments. Le mémoire se termine par une conclusion générale et les principales références bibliographiques.

Chapitre 1

Lois des Probabilité

Définition 1.1

*En théorie des probabilités et en statistique, une **loi de probabilité** décrit soit les probabilités de chaque valeur d'une variable aléatoire (quand la variable aléatoire est discrète), soit la probabilité que la variable aléatoire appartienne à un intervalle arbitraire (quand la variable est continue). La loi de probabilité décrit l'ensemble des valeurs qu'une variable aléatoire peut atteindre et la probabilité que la valeur de la variable aléatoire soit dans n'importe quel sous ensemble (mesurable) de cet ensemble.*

1.1 Lois Discrètes

1.1.1 Loi Uniforme

Loi d'une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ avec la même probabilité :

$$P(X = x) = \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall x \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Moments :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Ex : \mathcal{E} = « lancer d'un dé régulier » X = numéro apparaissant sur le dé X suit une loi uniforme de probabilité $\frac{1}{6}$

Éléments de calcul pour l'espérance et la variance :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.1.2 Loi de Bernoulli

loi $X \sim \mathcal{B}(p)$:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x} \quad ; \quad x \in \{0, 1\}$$

Moments :

$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = pq$$

\mathcal{E} : Tirage dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges.

$q = 1 - p$ Fonction indicatrice de A :

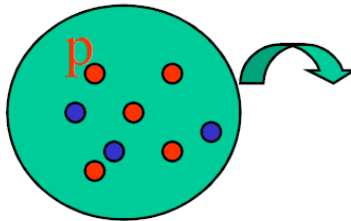


FIGURE 1.1 – $X =$ nombre de boules rouges

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Rq :

$$X = 1_A \sim \mathcal{B}(p(A))$$

1.1.3 Loi Binomiale

Loi $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad ; \quad \forall x \in \{0, \dots, n\}$$

Moments :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq$$

Propriété 1.1.1

- Si $n > 50$ et $p < 0.1$, $X \approx \mathcal{P}(np)$
- Si $n > 50$ et $p > 0.1$, $X \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p) \\ X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p) \\ X_1 \perp X_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

\mathcal{E} : n tirages avec remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges

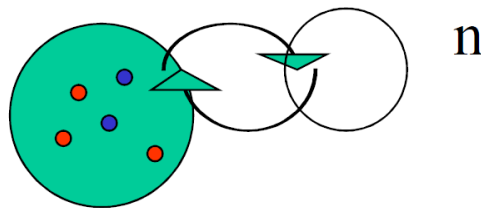
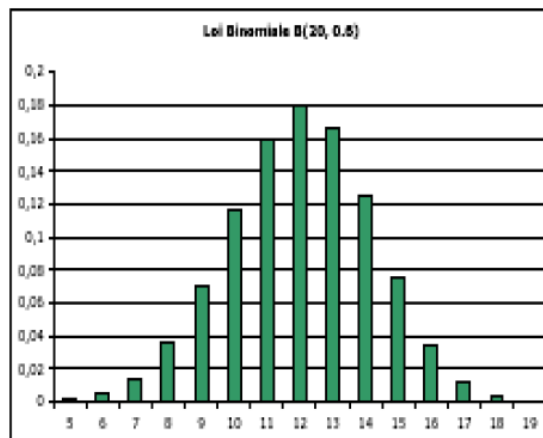


FIGURE 1.2 – X = nombre de boules rouges

Outils :



$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\sum_{x=0}^n C_n^x p^x q^{n-x} = 1$$

$$C_n^x = \frac{n}{x} C_{n-1}^{x-1}$$

1.1.4 Loi de Poisson

Loi $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0 :$

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} ; \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Moments :

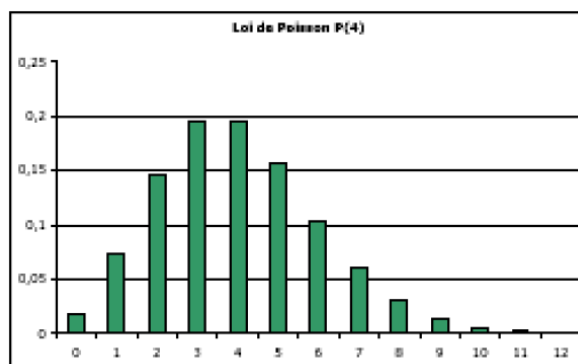
$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Propriété 1.1.2

Si λ grand, $X \approx \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1 \perp X_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Ex : nombre de personnes se présentant à l'arrêt de bus après une durée λ



Outils :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^\lambda$$

1.1.5 Loi Binomiale Négative

Loi $X \sim \mathcal{BN}(r, p)$:

$$P(X = x) = C_{x+r-1}^x p^r q^x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Moments :

$$E(X) = \frac{rq}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{rq}{p^2}$$

\mathcal{E} : tirages avec remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges

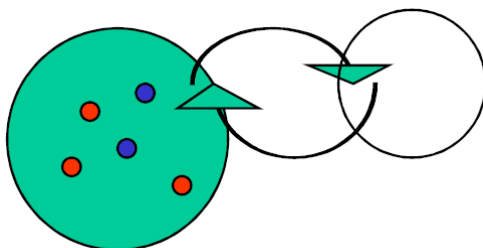


FIGURE 1.3 – X = nombre de boules blanches précédant la r° boule rouge

Outils :

$$\sum_{x=0}^{\infty} C_{x+r-1}^x p^r q^x = 1$$

1.1.6 Loi Géométrique

Loi $X \sim \mathcal{G}(p)$:

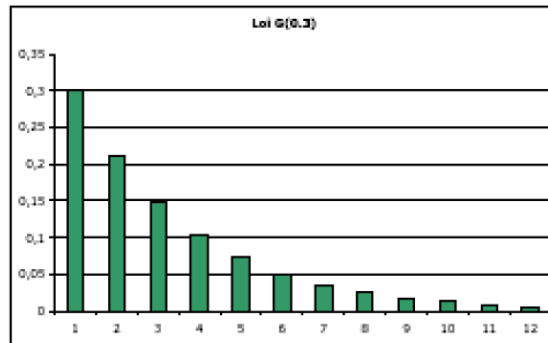
$$P(X = x) = pq^{x-1} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Moments :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Outils :

$$\sum_{x=0}^{\infty} p^x = \frac{1}{1-p}$$



très utilisé en durée de vie et en biologie.

\mathcal{E} = : tirages avec remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges

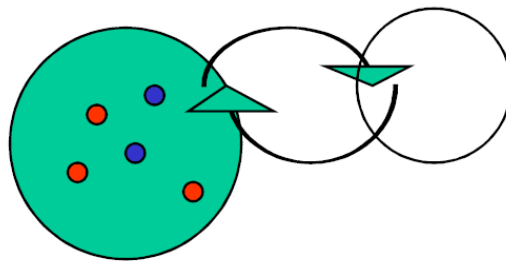


FIGURE 1.4 – $X = \text{rang de la } 1^{\circ} \text{ boule rouge}$

1.1.7 Loi Hypergéométrique

Loi $X \sim \mathcal{H}(n, N, p)$:

$$P(X = x) = \frac{C_{Np}^x C_{N-Np}^{n-x}}{C_N^n} ; \quad \forall x \in \{0, \dots, n\}$$

Moments :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = \frac{N-n}{N-1} npq$$

Propriété 1.1.3

Si $N \gg n$ ($N > 10n$), $X \approx \mathcal{B}(n, p)$

\mathcal{E} : n tirages sans remise dans une urne de Bernoulli ayant une proportion p de boules rouges

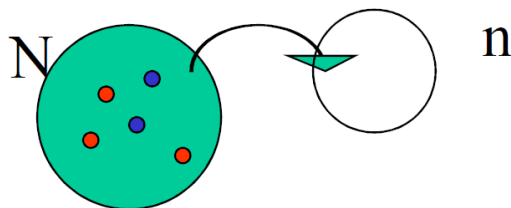
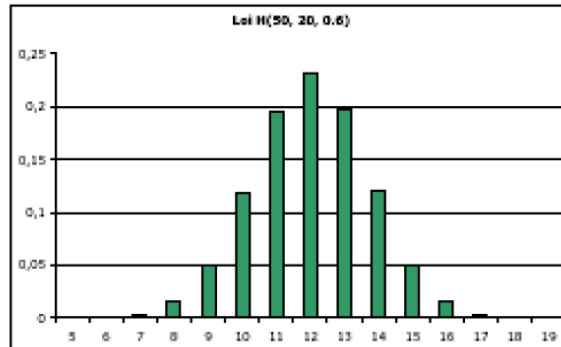


FIGURE 1.5 – X = nombre de boules rouges



1.2 Lois Continues

1.2.1 Loi Uniforme

Loi $X \sim \mathcal{U}[a, b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{a \leq x \leq b} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Moments :

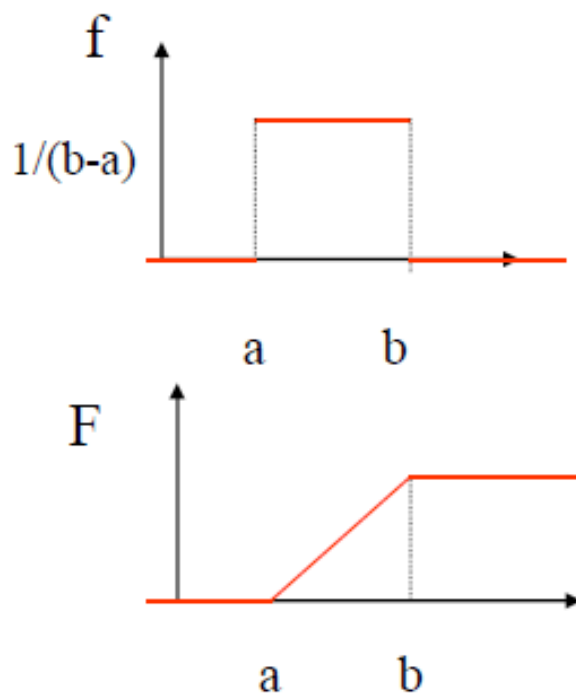
$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Propriété 1.2.1

$$X \sim \mathcal{U}[a, b] \iff \frac{x - a}{b - a} \sim \mathcal{U}[0, 1]$$

**1.2.2 Loi Normale**

Loi $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

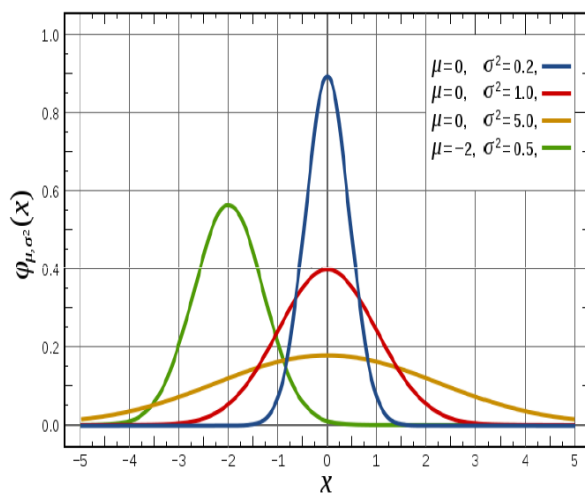
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Moments :

$$E(X) = \mu ; \quad V(X) = \sigma^2$$

Propriété 1.2.2

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1) \\ X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2) \\ X_1 \perp X_2 \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$



$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma) \iff U = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

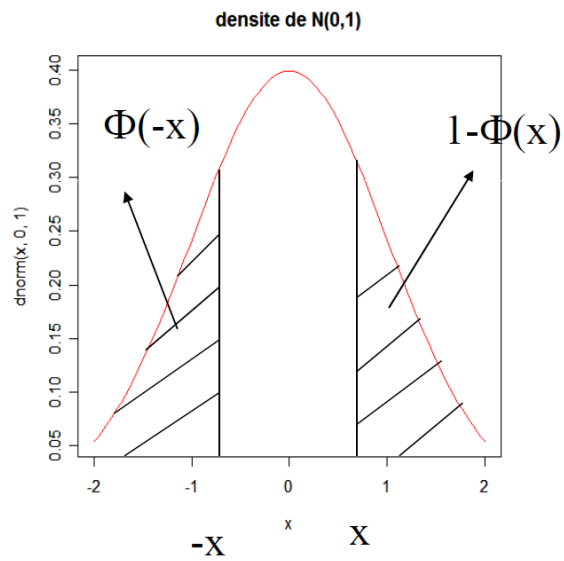
Propriétés d'une v.a. U de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

On note Φ la fdr de U :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \Phi(x) < \frac{1}{2} \iff x < 0$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$P(|X| < x) = 2\Phi(x) - 1$$



1.2.3 Loi Log-Normale

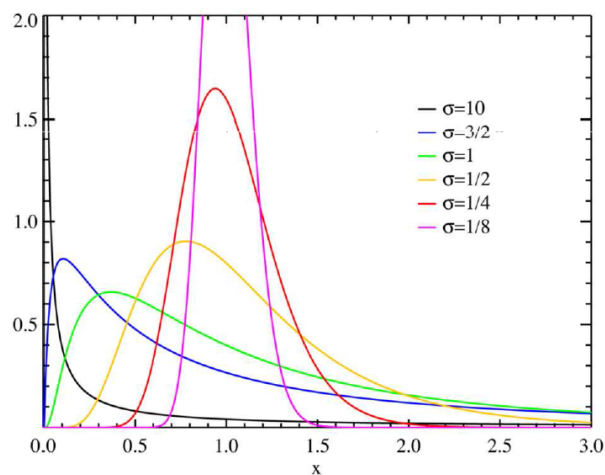
Loi $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$:

$$Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Moments :

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$V(X) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$$



1.2.4 Loi Exponentielle

Loi $X \sim \varepsilon(\lambda)$, $\lambda > 0$:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

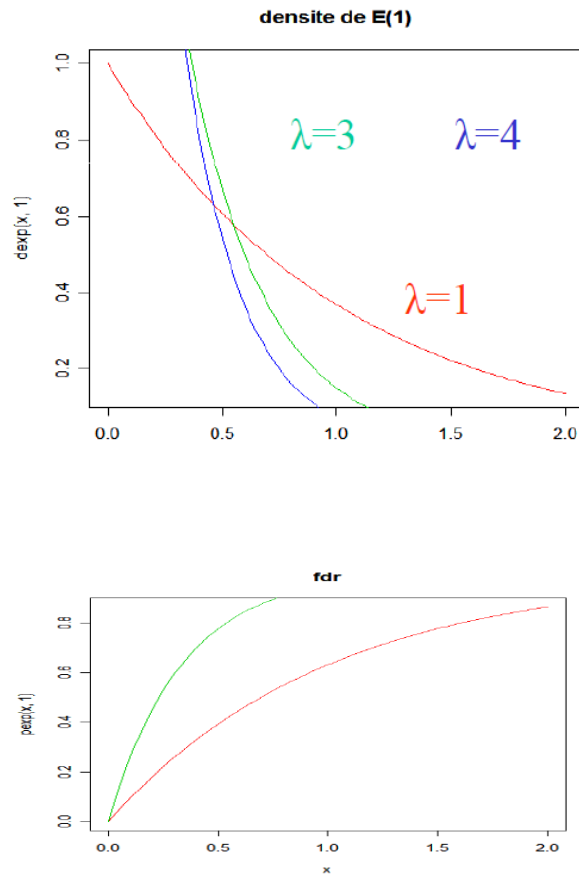
Moments :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Loi souvent utilisée en fiabilité : durée de vie d'un composant



1.2.5 Loi Gamma

Loi $X \sim \Gamma(k, \theta)$, $k > 0, \theta > 0$:

$$f(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k} 1_{x \geq 0}$$

Moments :

$$E(X) = k\theta \quad ; \quad V(X) = k\theta^2$$

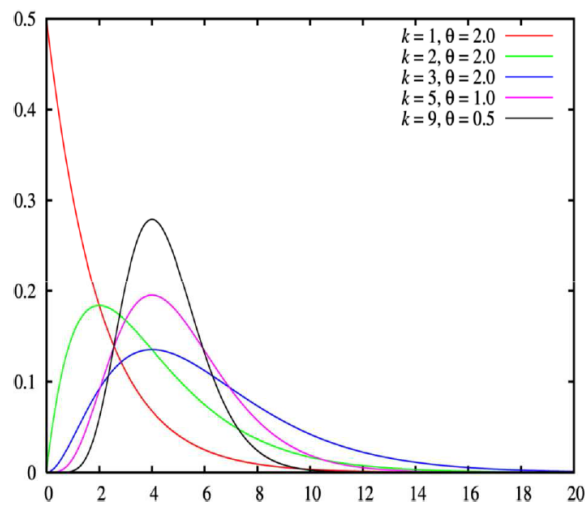
Propriété 1.2.3

Si $k = 1$, $X \sim \varepsilon(1/\theta)$

Si $\theta = 2$, $X \sim \chi^2(2k)$

Si k entier, la loi de X s'appelle loi d'Erlang

Si X_i i.i.d. $\sim \varepsilon(1/\theta) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta)$



$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \quad ; \quad \Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$$

1.2.6 Loi du Chi2

la loi du chi2 à k ddl est la loi de la somme de n variables de loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$X \sim \chi^2(k); k \in \mathbb{N}^* \iff X$ a même loi que

$$Z = \sum_{i=1}^k U_i^2; U_i \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Moments :

$$E(X) = k \quad ; \quad V(X) = 2k$$

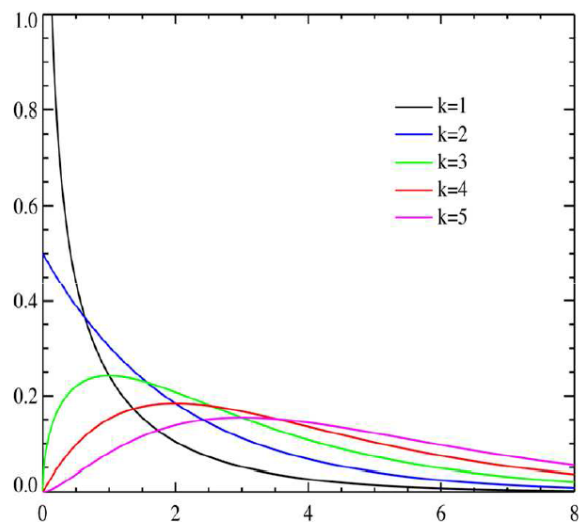
Propriété 1.2.4

X à valeurs positives.

La loi de $X/2$ est une loi gamma(n)

Lorsque $k = 2X$ suit $E(1/2)$ Si $k > 50$,

$$X \approx \mathcal{N}(k, \sqrt{2k})$$



$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} 1_{x \geq 0}$$

1.2.7 Loi de Student

Loi $X \sim \mathcal{T}(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ \iff X a même loi que :

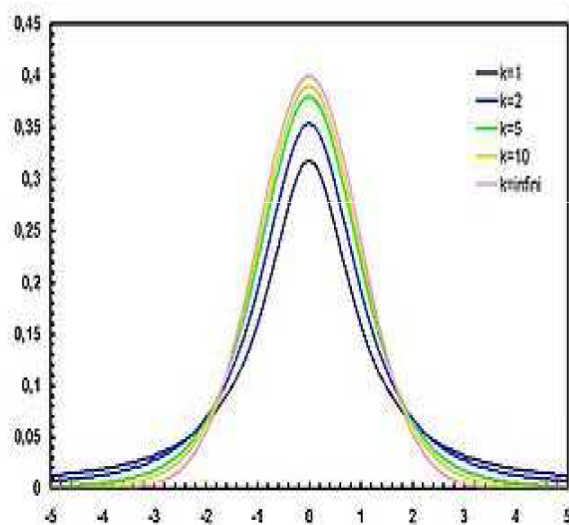
$$T = \frac{U}{\sqrt{Z/k}}; U \perp Z; U \sim \mathcal{N}(0, 1); Z \sim \chi^2(k)$$

Moments :

$$E(X) = 0, \quad k > 1 \quad ; \quad V(X) = \frac{k}{k-2}, \quad k > 2$$

Propriété 1.2.5

Si $k > 30$ alors $X \approx \mathcal{N}(0, 1)$

**1.2.8 Loi de Fisher**

Loi $X \sim \mathcal{F}(n_1, n_2)$, $n_i \in \mathbb{N}^* \iff X$ a même loi que

$$F = \frac{Z_1/n_1}{Z_2/n_2}; Z_1 \perp Z_2; Z_1 \sim \chi^2(n_1); Z_2 \sim \chi^2(n_2)$$

Moments :

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad ; \quad n_2 > 2$$

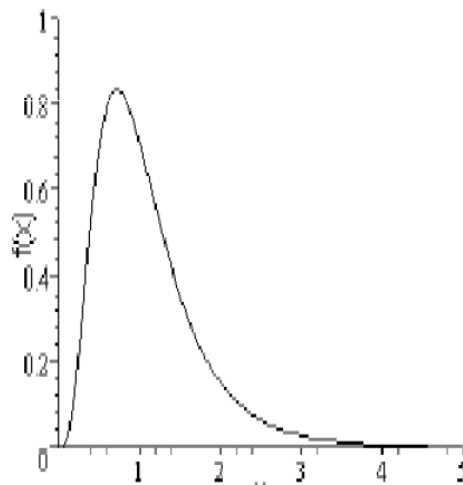
$$V(X) = \frac{2n_2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)} \quad ; \quad n_2 > 4$$

Propriété 1.2.6

$X \sim \mathcal{F}(1, n_2) \iff X$ a même loi que

$$F = T^2 \quad ; \quad T \sim \mathcal{T}(n_2)$$

Loi de Fisher-Snedecor $F(10,20)$ - Fonction de densité



1.3 Simulations de Lois

1.3.1 Théorème d'inversion

Soit F une fonction de répartition sur \mathbb{R} .

On note $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq y\}$ l'inverse généralisé de F (vaut l'inverse habituelle lorsque F est continue et strictement croissante). Soit U une loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors,

1. $X = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F
2. Si F est continue sur \mathbb{R} et X de fdr F , $U = F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1.3.2 Simulation d'une Loi Continue

Simulation de n réalisations X de loi F :

- On simule n réalisations d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ (tirage au hasard de n nombres sur cet intervalle) : u_1, \dots, u_n
- On calcule $\forall i = 1, \dots, n, x_i = F^{-1}(u_i)$. Ce sont n réalisations de X de loi F .

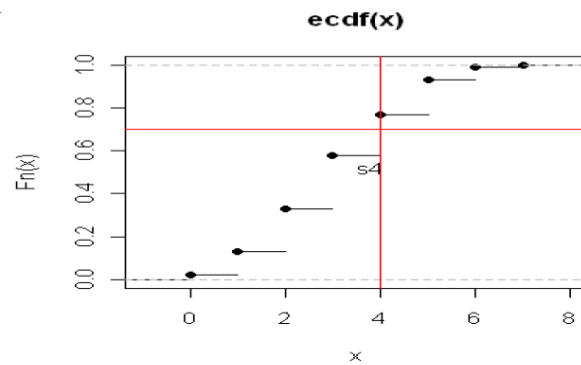
1.3.3 Simulation d'une loi discrète

Soit $(p_i = P(X = x_i))_{1 \leq i \leq n}$ la loi de probabilité discrète d'une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$. On note $s_k = P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k p_i$ et $F(u) = \sum_{k=1}^n s_{k-1} 1_{x_{k-1} \leq u < x_k}$ la fonction de répartition de cette loi en tout

point. Soient u_1, \dots, u_n n réalisations d'une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad x_k^* = F^{-1}(u_i) = \sum_{k=1}^n x_k 1_{s_{k-1} \leq u_i < s_k}$$

Sont n réalisations d'une variable aléatoire discrète de loi F .



Chapitre 2

Fonction Génératrice des Moments

2.1 Fonction Génératrice des Moments

En théorie des probabilités et en statistique, la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est la fonction M_X définie par

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

pour tout réel t tel que cette espérance existe. Cette fonction, comme son nom l'indique, est utilisée afin d'engendrer les moments associés à la distribution de probabilités de la variable aléatoire X

Définition 2.1

Si à X est associée une densité de probabilité continue f , alors la fonction génératrice des moments est donnée par

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

En introduisant dans cette équation le développement en série entière de l'exponentielle, cette expression est équivalente à

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \dots \right) f(x) dx \\ &= 1 + tm_1 + \frac{t^2 m_2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue par le **théorème de convergence dominée**, et où m_i est le i -ème moment de X . Si la densité de probabilité n'est pas continue, la fonction génératrice des moments peut être obtenue par **l'intégrale de Stieltjes** :

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF(x)$$

où F est la fonction de répartition de X . Les expressions précédentes s'appliquent, à des variables, aléatoires. Dans le cas d'un vecteur aléatoire à composantes réelles, la fonction génératrice des moments est alors définie comme suit :

$$M_X(t) = E(e^{(t,x)})$$

où t est un vecteur et $\langle t, x \rangle$ est le produit scalaire

Propriété 2.1.1

- $M_X(-t)$ est la transformée bilatérale de Laplace de la densité de probabilité f .
- Si X_1, X_2, \dots, X_n est une suite de variables aléatoires indépendantes (mais non nécessairement identiquement distribuées) et $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ où $a_i \in \mathbb{R}$, alors la densité de probabilité de S_n est la convolution pondérée par les a_i des densités de probabilité de chacun des X_i et la fonction de génération des moments de S_n est donnée par

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(a_1 t) M_{X_2}(a_2 t) \dots M_{X_n}(a_n t)$$

- Comme son nom le suggère, la fonction génératrice des moments est liée à la série génératrice (exponentielle) des moments. Pour que ce lien ait un sens il faut bien sûr que les moments soient tous finis et que leur série associée ait un rayon de convergence non nul. Sous ces conditions la fonction génératrice des moments est développable en série entière autour de 0 et les coefficients sont reliés aux moments. Le théorème suivant précise cette discussion.

Propriété 2.1.2

Toute fonction génératrice des moments est logarithmiquement convexe.

Démonstration

L'inégalité de Hölder indique que

$$E[UV] \leq (E|U^p|)^{1/p} (E|V^q|)^{1/q}$$

pour toutes variables aléatoires U et V et nombres réels p, q tels que

$$1 < p; q < \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Soit X une variable aléatoire réelle et $0 < \theta < 1$. En prenant le logarithme de l'inégalité appliquée à

$$U = \exp((1 - \theta)\lambda_0 X); V = \exp(\theta\lambda_1 X); p = \frac{1}{1 - \theta}; q = \frac{1}{\theta}$$

on obtient l'inégalité de convexité

$$\ln E[\exp(((1 - \theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1) X)] \leq (1 - \theta) \ln E[\exp(\lambda_0 X)] + \theta \ln E[\exp(\lambda_1 X)]$$

Lien entre fonction génératrice des moments et moments

Soit X une variable aléatoire réelle et M_X sa fonction génératrice des moments. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $\delta > 0$ tel que $M_X(t) < +\infty$ pour tout $t \in] - \delta, \delta[$.

2. La variable X admet des moments de tout ordre finis et la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[X^k]}{k!} t^k$$

a un rayon de convergence non nul $R > 0$.

De plus si l'une des 2 assertions ci-dessus est vérifiée alors

— Pour tout $t \in]-R, R[$ on a :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[X^k]}{k!} t^k$$

— Pour tout $k \geq 0$, M_X est k fois dérivable en 0 et $E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$.

Démonstration

1. implique

2. Soit $t \in [0, \delta]$, en remarquant que $e^{t|x|} \leq e^{tx} + e^{-tx}$ pour tout réel x on déduit que :

$$E[e^{t|X|}] \leq M_X(t) + M_X(-t) < +\infty$$

En utilisant alors le développement de la fonction exponentielle en série entière et le théorème de Fubini-Tonelli on obtient que

$$E[e^{t|X|}] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|X|^k}{k!} t^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[|X|^k]}{k!} t^k < +\infty$$

On en conclut que la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[X^k]}{k!} t^k$ est absolument convergente sur

$[0, \delta]$ | donc possède un rayon de convergence $R \geq \delta$.

1. implique

2. Montrons que la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[|X|^k]}{k!} t^k$ a un rayon de convergence $R' = R > 0$. Déjà il est clair que $R' \leq R$

On remarque que pour tout $k \geq 0$:

$$E[|X|^{2k+1}] = E[|X|^{2k+1} \mathbf{1}_{|X| \leq 1}] + E[|X|^{2k+1} \mathbf{1}_{|X| \geq 1}] \leq 1 + E[X^{2k+2}]$$

Ainsi on a pour tout $t \in [0, R[$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[|X|^k]}{k!} t^k \leq e^t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[X^{2k}]}{(2k)!} t^{2k} \leq e^t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E[X^k]|}{k!} t^k < +\infty$$

La dernière somme est bien convergente car on sait qu'une série entière est absolument convergente dans l'intérieur de son disque de convergence. Ainsi en utilisant une fois de plus le théorème de Fubini-Tonelli on obtient que $M_X(t) < +\infty$. On procède de la même manière pour $t \in]-R, 0]$.

2.2 Fonction Génératrice des Moments des Loïs Usuelles

Nous allons maintenant donner les fonctionnes génératrice des moments des lois déjà vues ,il faut mieux calculer la fonction génératrice des moments dans chaque cas

2.2.1 Fonction Génératrice de la Loi de Bernoulli

Si X suit une loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, c'est-à-dire, si :

$$P(X = 1) = p \quad ; \quad P(X = 0) = 1 - p$$

alors :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^1 P(X = k)t^k = (1 - p)t^0 + pt$$

donc $M_X(t) = pt + 1 - p$ Nous obtenons alors :

$$M'_X(t) = p \quad ; \quad M''_X(t) = 0$$

Nous en déduisons :

$$E(X) = M'_X(1) = p$$

et

$$V(X) = M''_X(1) + M'_X(1) - (M'_X(1))^2 = 0 + p - p^2 = p(1 - p)$$

2.2.2 Fonction Génératrice de la Loi Binomiale

Si X suit une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ c'est-à-dire si :

$$\forall k \in [0, n] \quad ; \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ou encore , si

X est la somme n variable de Bernoulli indépendantes X_1, \dots, X_n de même paramètre p alors :

$$M_X(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

donc $M_X(t) = (pt + 1 - p)^n$ Nous obtenons alors :

$$M'_X(t) = np(pt + 1 - p)^{n-1} \quad ; \quad M''_X(t) = np^2(n - 1)(pt + 1 - p)^{n-2}$$

On retrouve ainsi :

$$E(X) = M'_X(1) = np(p + 1 - p)^{n-1} = np$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= M''_X(1) + M'_X(1) - (M'_X(1))^2 = np^2(n - 1)(p + 1 - p)^{n-2} + np - (np)^2 \\ &= np^2(n - 1) + np - (np)^2 = np(1 - p) \end{aligned}$$

2.2.3 Fonction Génératrice de la Loi de Poisson

Si X suit une loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire si :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad ; \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

alors :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

donc $M_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ Nous obtenons alors :

$$M'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \quad ; \quad M''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$$

On retrouve ainsi :

$$E(X) = M'_X(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda$$

et

$$V(X) = M''_X(1) + M'_X(1) - (M'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

2.2.4 Fonction Génératrice de la Loi Géométrique

Si X suit une loi géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

alors :

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)t^k = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (t-pt)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \frac{t-pt}{1-t+pt}$$

donc $M_X(t) = \frac{pt}{pt - t + 1}$ Nous obtenons alors :

$$M'_X(t) = \frac{p}{(pt - t + 1)^2} \quad ; \quad M''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(pt - t + 1)^3}$$

On retrouve ainsi :

$$E(X) = M'_X(1) = \frac{1}{p}$$

et

$$V(X) = M''_X(1) + M'_X(1) - (M'_X(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

2.2.5 Fonction Génératrice de la Loi Uniforme

Si X suit une loi uniforme $X \sim [1, n]$ c'est-à-dire si :

$$\forall k \in [1, n] \quad ; \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

alors :

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^n P(X = k)t^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k$$

donc

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{t(1-t^n)}{n(1-t)} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Nous obtenons alors :

$$\forall t \neq 1 \quad M'_X(t) = \frac{1 - (n+1)t^n + nt^{n+1}}{n(1-t)^2} \quad \text{donc (par continuité de } M'_X \text{ et à}$$

l'aide d'un développement limité du numérateur) $M'_X(1) = \frac{n+1}{2}$
 $\forall t \neq 1 \quad M''_X(t) = \frac{-n(n-1)t^{n+1} + 2(n^2-1)t^n - n(n+1)t^{n-1} + 2}{n(1-t)^3}$ donc
 de même, $M''_X(1) = \frac{n^2-1}{3}$ On retrouve ainsi :

$$E(X) = M'_X(1) = \frac{n+1}{2}$$

et

$$V(X) = M''_X(1) + M'_X(1) - (M'_X(1))^2 = \frac{n^2-1}{3} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

2.2.6 Fonction Génératrice de la Loi Hypergéométrique

Si X suit une loi hypergéométrique $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$, c'est-à-dire si :

$$\forall k \in [0, n] \quad ; \quad P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

alors :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{N_p}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} t^k$$

Compte tenu de l'aspect peu sympathique de cette fonction, nous arrêterons là les calculs.

2.2.7 Fonction Génératrice de la Loi Binomiale Négative

Si X suit une loi binomiale négative $X \sim \mathcal{J}(r, p)$, c'est-à-dire si :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad ; \quad P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$$

(cette variable aléatoire donne, dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, le nombre d'échecs avant le r -ième succès), alors :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)t^k = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} (t-pt)^k$$

donc $M_X(t) = \left(\frac{p}{pt - t + 1} \right)^r$ Nous obtenons alors :

$$M'_X(t) = \frac{rp^r(1-p)}{(pt-t+1)^{r+1}} \quad ; \quad M''_X(t) = \frac{r(r+1)p^r(1-p)^2}{(pt-t+1)^{r+2}}$$

On retrouve ainsi :

$$E(X) = M'_X(1) = \frac{r(1-p)}{p}$$

et

$$V(X) = M''_X(1) + M'_X(1) - (M'_X(1))^2 = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p} - \left(\frac{r(1-p)}{p} \right)^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

2.2.8 Fonction Génératrice de la Loi de Pascal

Si Y suit une loi de Pascal $X \sim \mathcal{P}(r, p)$, c'est-à-dire si :

$$\forall k \in [r, +\infty[\quad ; \quad P(Y = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

(cette variable aléatoire donne dans une suite d'épreuves Bernoulli indépendantes

le rang d'apparition du r -ième succès)

alors $Y = X + r$ où X suit la loi binomale négative ci-dessus Par conséquent

- $M_Y(t) = t^r M_X(t) = \left(\frac{pt}{pt - t + 1} \right)^r$
- $E(Y) = E(X) + r = \frac{r}{p}$
- $V(Y) = V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

2.3 Tableau des Fonctions Génératrice des Lois Usuelles

loi et symbole	fonction génératrice $E(t^X)$
Bernoulli	$pt + q$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$(pt + q)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{\lambda(t-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{pt}{1 - qt}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$\frac{C_{Nq}^n}{C_N^n} F(-n, -Np; Nq - n + 1; t)$
Binomiale négative	$\left(\frac{p}{1 - qt}\right)^r$
Pascal	$\left(\frac{pt}{1 - qt}\right)^r$

Chapitre 3

Application

3.1 Application dans le Calcul des Probabilités

1. Soit X une variable aléatoire discrète a valeur dans \mathbb{N}^* tell que :

$$P[X = k] = \frac{\alpha}{k!}$$

En va calculons α :

Nous devons avoir $\sum_{k>0} P(X = k) = 1$ condition de normalisation

Ona alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k>0} P(X = k) = 1 &\iff \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 \\ &\iff \alpha[e - 1] = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{e - 1} \end{aligned}$$

pour la variance : $E(X)$

puisque X est une variable aléatoire positive ou nulle, l'espérance de X existe toujours dans $[0; +\infty]$ et par définition, nous avons

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k>0} kP[X = k] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha \frac{k}{k!} = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \alpha \end{aligned}$$

2. Soit N le nombre de clients à l'entrée du système pendant un intervalle de temps de 1 unité de temps. Soit X_0 l'instant d'arrivée du premier client et X_i le temps écoulé entre les instants d'arrivée des clients i et $i + 1$ pour $i = 1, 2, \dots$. Le temps total écoulé jusqu'à l'arrivée du client n est alors $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Comme les X_i sont supposées iid de loi $\text{Exp}(\lambda)$.

La probabilité que le nombre de clients N soit exactement n pendant un intervalle d'une unité de temps est alors $P[N = n] = P[S_n \leq 1 < S_{n+1}]$. On peut alors écrire que $[S_n \leq 1 < S_{n+1}] = [S_n \leq 1] \cap [1 < S_{n+1}] = [S_n \leq 1] \cap [S_{n+1} \leq 1]^c = [S_n \leq 1] \setminus [S_{n+1} \leq 1]$. Comme $[S_{n+1} \leq 1] \subset [S_n \leq 1]$ et que, de manière générale, $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ dès que $B \subset A$, on a :

$$\begin{aligned} P[S_n \leq 1 < S_{n+1}] &= P([S_n \leq 1] \setminus [S_{n+1} \leq 1]) \\ &= P[S_n \leq 1] - P[S_{n+1} \leq 1] \\ &= F_{n,\lambda}(1) - F_{n+1,\lambda}(1) \end{aligned}$$

Puisque $F_{n,\lambda}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} 1_{[0,+\infty[}(x)$ pour la loi Erlang (n, λ) ,

on a :

$$P[N = n] = \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) - \left(1 - \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

La variable aléatoire N suit donc une loi de Poisson de paramètre λ .

3.2 Application dans les Calculs des Loix

$$M_X(t) = \begin{cases} E(e^{tk}) = \sum e^{tk} P(X = k) & \text{(loi discrète)} \\ E(e^{tk}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tk} F(x) dx & \text{(loi continue)} \end{cases}$$

3.2.1 Loi de Bernoulli

$X \sim \mathcal{B}(p)$; $X(\Omega) = \{0, 1\}$:

$$P(X, 0) = 1 - p \quad ; \quad P(X = 1) = p$$

$$\begin{aligned}M_X(t) = E(e^{tx}) &= \sum_0^1 e^{tx_i} p(X = x_i) \\&= e^{tx_0} p(X = 0) + e^{tx_1} p(X = 1) \\&= 1 \cdot (1 - p) + e^t p \\&= (1 - p) + e^t p\end{aligned}$$

$$M_X(t) = e^t p + (1 - p)$$

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$\begin{aligned}M'_X(t) &= (e^t p) + (1 - p)' \\&= e^t p\end{aligned}$$

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$\begin{aligned}E(X) &= e^0 p \\&= p\end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$M''_X(t) = (e^t p)' = e^t p$$

$$M''_X(0) = p = E(X^2)$$

$$V(X) = p \cdot p^2 = p(1 - p)$$

$$V(X) = p \cdot q \quad \text{avec} \quad q = 1 - p$$

3.2.2 Loi Binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n, p); x(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} :$$

$$P(x = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{tx} P(X = k) \\ M_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{tx} C_n^k (1 - p)^{n-k} \\ &= (1 - p)^n + e^{tn} p^n \cdot 1 \\ &= (e^t p)^n + (1 - p)^n \\ M_X(t) &= (e^t p + (1 - p)) \end{aligned}$$

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= n (e^t p + (1 - p))' (e^t p + (1 - p))^{n-1} \\ &= n(e^t p) (e^t p + (1 - p))^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'_X(0) &= np(p+1-p)^{n-1} \\ &= np = E(x) \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = M''_X(0)$$

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= (ne^t p (e^t p + (n-p))^{n-1})' \\ &= (ne^t p)' (e^t p + (n-p))^{n-1} + [(e^t p + (1-p))^{n-1}]' ne^t p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= ne^t p (e^t p + (1-p))^{n-1} + (n-1)(e^t p)(e^t p + (1-p)^{n-2}) ne^t p \\ &= ne^t p (e^t p + (1-p))^{n-1} + (n-1)(e^t p) (e^t p + (1-p))^{n-2} \\ &= ne^t p (e^t p + (1-p))^{n-1} + (n-1)(e^t p) (e^t p + (1-p)^{n-2}) ne^t p \end{aligned}$$

$$E(X^2) = M''_X(0) = np(1)^{n-1} + (n-1)p(1)^{n-2}np$$

$$E(X^2) = np + (n-1)p \cdot np$$

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\V(X) &= np + (n-1)p \cdot np - n^2p^2 \\&= np[1 + (n-1)p - np] \\&= np[1 + np - p - np] \\&= np(1-p)\end{aligned}$$

donc $V(X) = npq$ avec $q = 1 - p$

3.2.3 Loi Continue Uniforme

$X \sim M([a, b]) :$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(X)dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a} & \text{si } b < x < a \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \int_a^b e^{tx} F(X)dx \\&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{t} e^{tx} \right]_a^b \\&= \frac{1}{t(b-a)} (e^{bt} - e^{at})\end{aligned}$$

3.2.4 Loi de Poisson

$X \sim \mathcal{P}(\lambda); X(\Omega) = \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned}
 P(X = x) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
 M_X(t) &= \sum_0^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
 &= e^{\lambda(e^t - 1)}
 \end{aligned}$$

$$E(X) = M'_X(t) = (-\lambda + \lambda e^t) e^{(-\lambda + \lambda e^t)}$$

$$E(X) = M'_X(0) = \lambda e^{\lambda - \lambda} = \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= M''_X(t) \\
 &= \lambda e^t (e^{-\lambda + \lambda e^t}) + \lambda e^t (e^{-\lambda + \lambda e^t}) \lambda e^t
 \end{aligned}$$

$$E(X^2) = M''_X(0) = \lambda(e^{\lambda - \lambda}) + \lambda(e^{\lambda - \lambda})\lambda = \lambda + \lambda^2$$

donc $V(X) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

d'où : $V(X) = E(X)$

Conclusion

Les fonction génératrice des moments et ses applications jouent un rôle très important dans la théorie des probabilités. Elle possèdent des bonnes propriétés peuvent être utiliser dans plusieurs situations d'application et de calcul des probabilités.

Bibliographie

- [1] Sheldon Ross ,*Initiation aux probabilités* , Lansanne , 2004
- [2] Michel Lejeune,*Statistiques théorie et ses application* , 2002.
- [3] Philippe Barbé et Michel Ledour,*Probabilité* , 2007.
- [4] Dalang et Conus , *Introduction à la théorie des probabilités* , Lansanne , 2008.
- [5] Jean-Yues Cammet , *Probabilités et Statistique* , ENSICA , 2005
- [6] Albert Shirgaer,*Probabilités* , 1995.
- [7] A.Moubart,*Coure de statistique Mathématique Economica* , 1982.
- [8] Renée Veyssere , *Aide mémoire statistique et probabilité pour l'ingénieur* , 2018
- [9] Patrick Bogoert , *probabilités pour scientifique et ingénieurs* , Paris , 2006
- [10] Michel Henry,*Probabilités et statistique* , France , 2001.
- [11] B.Jourdain,*Probabilités et statistique* , Elipses 2009.
- [12] Fimd Klebaner,*Introduction la Stuehastie calculus With application* , 2005

[13] Gilbert Sa porta, *Probabilités et statistiques* , 2006.

[14] Nicolas bouleau, *Probabilités pour l'ingénieur* ,Hermann , 1986