République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
CENTRE UNIVERSITAIRE - SALHI AHMED - DE NAAMA
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

En vue de l'obtention du **diplôme** de **Master En Mathématiques**

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDP

présenter par : **KEBOUCHA Abd Eldjalil**

Étude des Équations Elliptiques de Type p-Laplacien Kirchhoff

---

Devant le jury composé de :

Encadreur :	Mr TAHRI Kamel	MCA ESM, Tlemcen.
Président :	Mr KHALDI Brahim	MCB C-Univ, Salhi Ahmed, Nàama.
Examinateur :	Mr ZOUAOUI Ali	MCB Univ, Mustapha Stambouli, Mascara.

Session : (Juin 2021)
Promotion : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, en premier lieu, Mon Dieu qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Un grand merci à mon encadreur : Dr.**TAHRI Kamel** pour son encadrement sa patience, sa disponibilité et ses précieuses remarques.

Mes vifs remerciements vont aussi à tous les membres du département de Mathématiques du centre universitaire de NAAMA, les enseignant ainsi que tous mes camarades et amis.

Je remercie les membres de jury, pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Enfin, je remercie profondément mes parents pour leurs encouragements et leur grand soutien.

Á mon père, ma mère, mes frères et sœurs
et les nouveau-nés Yousr Kaouther et Anes.

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGNES ET DES SYMBOLES

Δu	Laplacien de u défini par $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
$\langle .; . \rangle$	Produit scalaire dans $L^2(\Omega)$
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N, N un nombre naturel non nul
Ω	Domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$\rightarrow$	Convergence forte
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$D(\Omega)$	Ensemble des fonctions $C^1(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω
$p.p.$	Presque partout.
p^*	L'exposant critique de Sobolev défini par $p^* = \frac{pN}{N-p}$
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev standard sur Ω d'exposant p
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$\Delta_p u$	p-Laplacien de u

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans ce mémoire nous trouvons des notions sur les espaces fonctionnels classiques et les espaces de Sobolev avec quelques définitions, lemmes et des remarques qui sons donner une porte d'entrer pour voir comment trouver l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles de type de Kircchoff. Les équations différentielles et le calcul infinitésimal sont apparus au 17 ème siècle, avec Newton et Leibniz. Elles ont inspiré Newton pour son explication spectaculaire du mouvement des planètes sous l'influence de la force de gravitation universelle. Nous utilisons toujours aujourd'hui les notations de Leibniz. Leur puissance s'est affirmé au 18 ème siècle pour l'étude de nombreux problèmes géométriques ou mécaniques, et leur importance en mathématiques et en physique n'a cessé de croître depuis. Le problème dans les équations différentielles est de trouver et d'étudier les fonctions dérivables $y(t)$ d'une variable t qui sont liées à leur dérivées par une relation $\Psi(t; y; dy; dt) = 0$, "souvent sous forme résolue" en $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = F(t; y)$$

Les équations de Newton comportent deux aspects :

1) l'équation générale des mouvements ($\vec{F} = m\vec{\gamma}$).

2) La loi de la gravitation universelle ("partie physique" des lois de Newton)

Mais pour les équations aux dérivées partielles, Il en va tout autrement lorsqu'on étudie le mouvement d'un corps déformable (solide élastique, liquide, gaz ou plasma), par exemple un pont suspendu, le mouvement de l'eau dans un torrent, des vagues ou des courants dans la mer, ou de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. Un guide est composé d'un très grand nombre de particules massives (atomes ou molécules), et il est raisonnable de l'idéaliser en un milieu continu, paramètre par les points d'un domaine de $\mathbb{R}^N$.

Une première idée serait de repérer point par point les éléments du guide, par exemple par leur position initiale : l'inconnue est alors la collection des mouvements de chaque point est décrite par une fonction vectorielle de 4 variables $x(t;\xi)$ ou ξ désigne la position initiale. La collection des masses apparaît alors comme une mesure $\varrho(\xi)d\xi$ (ou une densité), indépendante du temps si la loi de conservation de la masse est respectée.

La force apparaît comme une champ de vecteurs $F(t;x)$ et l'équation du mouvement est

$$\frac{d}{dt}(\varrho\upsilon(\xi;t)) = F(x;t) \qquad \upsilon = \frac{dx}{dt}$$

Le champ de forces F se compose de forces externes, comme la force de gravitation, et de force internes parfois compliquées a décrire, qui font le plus souvent intervenir des dérivées de x par rapport aux variables d'identification ξ (ou de position x) - nous n'en donnons pas de description ici. Il y a plusieurs modèles d'EDP sur différences types de spatialités physiques, Chimies, Biologies.....etc.Et parmi se types les équations de **Kirchhoff** .

En 1876, Kirchhoff proposa ce type de problèmes comme étant une généralisation aux cordes vibrantes de l'équation classique des ondes de D'Alembert. Le modèle initialement étudié fût,

$$\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial t^2} - (p_0 + p_1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\, dx)\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

où p_0 dépend de la tension initial, p_1 est une caractéristique du matériau du fil, $u(x,t)$ dénote le déplacement vertical du point x du fil à l'instant t. De tels problèmes sont souvent appelés non locaux car contient un intégrale sur Ω.

CHAPITRE 1

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SOLUTION POUR UN PROBLÈME DE TYPE P-KIRCHHOFF

1.1 Introduction et Position du Problème

Ce chapitre est consacré a l'étude d'un problème elliptique de type Kirchhoff[1]. On va regarder l'existence et l'unicité pour un problème elliptique. Pour l'existence est basée sur les méthodes variationnelles.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{-(a+b}\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx)\Delta_p u = m(x)u^{-\gamma} - \lambda u^q & x \in \Omega \\ u > 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

avec $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, pour $1 < p <$N dénoté l'opérateur de p-laplacien, et $\lambda > 0$ est un paramètre réel. On pose $\gamma \in]0; 1[$ est un constant ; $0 < q < p^* - 1; a, b \geq 0; a + b > 0$ sont des paramètres. La fonction de poids $m : \Omega \to \mathbb{R}$ est dans $L^{\frac{p^*}{p^*+\gamma-1}}(\Omega)$ avec $m(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, $p^* = \frac{pN}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev[2].

1. Gustav Robert Kirchhoff (né le 12 mars 1824 à Königsberg, en province de Prusse-Orientale et décédé à Berlin le 17 octobre 1887) est l'un des plus grands physiciens du XIXe siècle, avec des contributions essentielles à l'électrodynamique, la physique du rayonnement et la théorie mathématique de l'élasticité.

2. Sergueï Lvovitch Sobolev (6 octobre 1908 - 3 janvier 1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique (URSS).

1.2 Notations et Hypothèses

On a $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Sobolev usuel, associé avec la norme suivante :

$$\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

On note par $\|u\|_p = (\int_\Omega |u|^p\, dx)^{\frac{1}{p}}$ est la norme dans $L^p(\Omega)$. La fonction $u \in X$ est une solution faible pour le problème (1) si $u > 0$ dans Ω est vérifiée, pour toute $\varphi \in X$:

$$(a + b\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx + \lambda\int_\Omega u^q\varphi\, dx - \int_\Omega m(x)u^{-\gamma}\varphi\, dx = 0.$$

On doit chercher les solutions faibles pour le problème (1). En cherchant les points critiques de la fonctionnelle d'énergie $J_\lambda : X \to \mathbb{R}$ donnée par, pour toute $u \in X$:

$$J_\lambda(u) = \frac{a}{p}(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx) + \frac{b}{2p}(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx)^2 + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u|^{1+q}\, dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u|^{1-\gamma}\, dx.$$

Si on fait un problème de minimisation de la fonctionnelle d'énergie J_λ, il y a un problème que J_λ n'est pas Fréchet [3] différentiable, à cause qu'il y a un terme singulier. Alors nous ne pouvons pas appliquer la théorie des points critiques pour obtenir directement l'existence de solution.

On pose les hypothèses suivantes :

(H_1) $0 < \gamma < 1, 0 < q \leq p^* - 1$.

(H_2) $m \in L^{\frac{p^*}{p^*+\gamma-1}}(\Omega)$ avec $m(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Lemme 1.1. *La fonctionnelle d'énergie J_λ est coercive et bornée inférieurement dans X, alors J_λ admet un minimum α dans X avec $\alpha < 0$.*

Démonstration. *Depuis $0 < \gamma < 1$ et $\lambda \geq 0$. Par l'inégalité de Hölder [4], on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega m(x)|u|^{1-\gamma}\, dx &\leq (\int_\Omega |m(x)|^{\frac{p^*}{p^*-1+\gamma}}\, dx)^{\frac{p^*-1+\gamma}{p^*}}(\int_\Omega |u|^{(1-\gamma)(\frac{p^*}{1-\gamma})}\, dx)^{\frac{1-\gamma}{p^*}}.\\ &\leq \|m\|_{\frac{p^*}{p^*-1+\gamma}}\|u\|^{1-\gamma}_{\frac{p^*}{1-\gamma}}.\end{aligned}$$

3. René Maurice Fréchet, né à Maligny le 2 septembre 1878 et mort à Paris le 4 juin 1973, est un mathématicien français.

4. Otto Ludwig Hölder (1859-1937) est un mathématicien allemand né à Stuttgart, capitale du royaume de Wurtemberg.

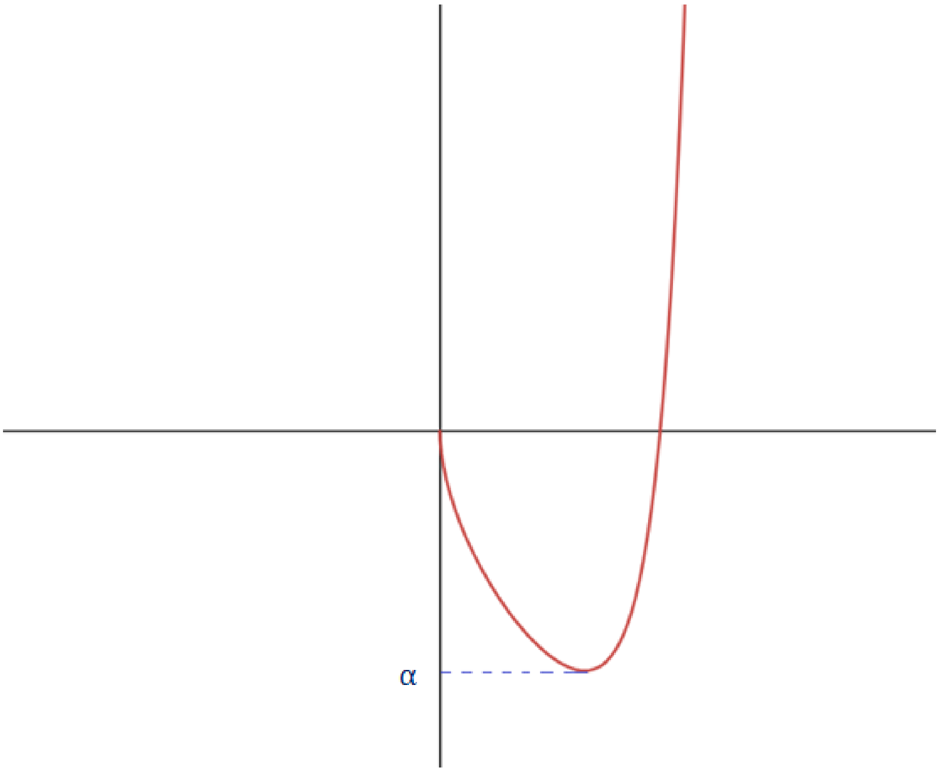

FIGURE 1.1 – graphe de J_λ

De plus, par l'inégalité de Sobolev, on obtient que

$$\frac{1}{1-\gamma}\|u\|^{1-\gamma}_{\frac{p^*}{1-\gamma}} \leq C\|u\|^{1-\gamma}.$$

D'où

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{b}{2p}\|u\|^{2p} + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u|^{1-\gamma}\,dx. \\ &\geq \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{b}{2p}\|u\|^{2p} - C\|m\|_{\frac{p^*}{p^*-1+\gamma}}\|u\|^{1-\gamma}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Où $C > 0$ est un constant. Ce que implique que J_λ est coercive et bornée inférieurement sur X. Alors $\alpha = \inf\limits_{u\in X} J_\lambda$ est bien défini. De plus, puisque $0 < \gamma < 1$ et $m(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, on a $J_\lambda(t\delta) < 0$ pour tout $\delta \neq 0$ et $t > 0$ assez petit. Ainsi, on obtient $\alpha = \inf\limits_{u\in X} j_\lambda < 0$. La preuve est complète.

Lemme 1.2. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées. Alors J_λ admet un minimum global dans X, c'est-à-dire qu'il existe $u_* \in X$ tel que $J_\lambda(u_*) = \alpha < 0$.*

Démonstration. *D'aprés le lemme (1.1), il existe une suite minimisant dans X tel que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha < 0$. Puisque $J_\lambda(u_n) = J_\lambda(|u_n|)$, on peut supposer que $(u_n) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. La suite est bornée dans X. Puisque X est réflexif, on peut extraire une sous-suite qu'on note aussi u_n, il existe $u_* \geq 0$ tel que quand $n \to \infty$*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_* & \text{faiblement dans } X \\ u_n \to u_* & \text{fortement dans } L^s \text{ avec } 1 \leq s \leq p^* \\ u_n(x) \to u_*(x) & \text{p.p. dans } \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

On pose $w_n = u_n - u_*$, nous devons prouver que $\|w_n\| \to 0$ si $n \to \infty$. Comme $m \in L^{\frac{p^*}{p^*+\gamma-1}}(\Omega)$ et $(u_n)_n \in L^{\frac{p^*}{1-\gamma}}(\Omega)$ et par l'inégalité de Hölder on a $(m(x)|u_n|^{1-\gamma})_n \in L^1(\Omega)$. Par hypothèse $m(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ donc la suite $(m(x)|u_n|^{1-\gamma})_n$ converge presque partout vers $m(x)|u_*|^{1-\gamma}$ dans Ω. On a la suite $(m(x)|u_n|^{1-\gamma})_n$ est équi-négligeable puisque $\int_{\partial\Omega} m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx = 0$. On pose $E = \Omega/\partial\Omega$ donc la famille de mesures $E \mapsto \int_E m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx$ est équi-continue. Et de deux dernier propositions on affirme que la suite $(m(x)|u_n|^{1-\gamma})_n$ est équi-intégrable. Par application du théorème de Vitali[5], on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx = \int_\Omega m(x)|u_*|^{1-\gamma}\,dx \tag{1.3}$$

De plus, par la convergence faible de (u_n) dans X et le lemme de Brézis[6] Lieb[7], on obtient

$$\|u_n\|^p = \|w_n\|^p + \|u_*\|^p + o(1) \tag{1.4}$$

$$\|u_n\|^{2p} = \|w_n\|^{2p} + \|u_*\|^{2p} + 2\|w_n\|^p\|u_*\|^p + o(1) \tag{1.5}$$

et

$$\int_\Omega |u_n|^{p^*}\,dx = \int_\Omega |w_n|^{p^*}\,dx + \int_\Omega |u_*|^{p^*}\,dx + o(1) \tag{1.6}$$

d'où $o(1)$ est infinitésimal quand $n \to \infty$. Par conséquent, dans le cas $0 < q < p^* - 1$, on

5. Giuseppe Vitali (né le 26 août 1875 à Ravenne, en Émilie-Romagne - mort le 29 février 1932 à Bologne) est un mathématicien italien.

6. Haïm Brezis, ou Brézis, né le 1er juin 1944 à Riom-ès-Montagnes (Cantal), est un mathématicien français, Il est professeur émérite à l'université Pierre-et-Marie-Curie.

7. Elliott H. Lieb, né le 31 juillet 1932 à Boston au Massachusetts, est un physicien américain, professeur de mathématiques et physique à l'université de Princeton.

déduit que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n)\\
&= \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{p}\|u_n\|^p + \frac{b}{2p}\|u_n\|^{2p} + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u_n|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx)\\
&= \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{p}(\|w_n\|^p + \|u_*\|^p) + \frac{b}{2p}(\|w_n\|^{2p} + \|u_*\|^{2p} + 2\|w_n\|^p\|u_*\|^p)\\
&\quad + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u_n|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx)\\
&=(\frac{a}{p}\|u_*\|^p + \frac{b}{2p}\|u_*\|^{2p} + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u_*|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u_*|^{1-\gamma}\,dx)\\
&\quad + \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{p}\|w_n\|^p + \frac{b}{2p}\|w_n\|^{2p} + \frac{b}{p}\|w_n\|^p\|u_*\|^p)\\
&=J_\lambda(u_*) + \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{p}\|w_n\|^p + \frac{b}{2p}\|w_n\|^{2p} + \frac{b}{p}\|w_n\|^p\|u_*\|^p)\\
&\geq J_\lambda(u_*) \geq \inf_{u_n\in X} J_\lambda(u_n) = \alpha
\end{aligned}$$

ce que implique $J_\lambda(u_*) = \alpha$. *Dans le cas* $q = p^* - 1$, *d'où*

$$\begin{aligned}
\alpha =& J_\lambda(u_*) + \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{p}\|w_n\|^p + \frac{b}{2p}\|w_n\|^{2p} + \frac{b}{p}\|w_n\|^p\|u_*\|^p + \frac{\lambda}{p^*}\|w_n\|_{p^*}^{p^*})\\
\geq& J_\lambda(u_*) \geq \alpha
\end{aligned}$$

qui donne $J_\lambda(u_*) = \alpha$. *Donc* $\inf_{u_n\in X} J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u_*)$ *et ceci complète la preuve de lemme (1.2) .*

1.3 Théorème Global

Maintenant, nous pouvons énoncer notre résultat principal.

Théorème 1.1. *Supposons que les conditions* (H_1) *et* (H_2) *soient vérifiées. Alors le problème (1) admet une solution positive. De plus, cette solution est le minimum global.*

Démonstration. *Il suffit prouver que* u_* *est une solution faible de (1) et* $u_* > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$. *Tout d'abord, on montre que* u_* *est une solution faible de (1). D'après Lemme (1.2), on a*

$$\min_{u_n\in X} J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u_*), \qquad \forall\varphi \in X$$

Alors

$$J_\lambda^{'}(u_* + t\varphi)|_{t=0} = 0$$

implique que pour tout $\varphi \in X$

$$(a + b\int_\Omega |\nabla u_*|^p\,dx)\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla\varphi\,dx + \lambda\int_\Omega u_*^q\varphi\,dx - \int_\Omega m(x)u_*^{-\gamma}\varphi\,dx = 0. \quad (1.7)$$

Donc u_* *est une solution faible de (1).*

Deuxièmement, nous prouvons que $u_* > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$*. puisque* $J_\lambda(u_*) = \alpha < 0$*, on obtient que* $u_* \geq 0$ *et* $u_* \neq 0$*. Alors* $\forall\phi \in X$ *et* $\phi \geq 0$ *et* $t > 0$*, on a*

$$\begin{aligned}
0 \leq &\frac{J_\lambda(u_* + t\phi) - J_\lambda(u_*)}{t} \\
= &\frac{a}{p}(p\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla\phi\,dx + t(p-1)\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}|\nabla\phi|^2\,dx \\
&+ ... + pt^{p-2}\int_\Omega \nabla u_*|\nabla\phi|^{p-1}\,dx) + \frac{a}{p}t^{p-1}\int_\Omega |\nabla\phi|^p\,dx \\
&+ \frac{b}{2p}(\int_\Omega |\nabla u_*|^p\,dx)[2p(\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla\phi\,dx) + 2(p-1)t\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}|\nabla\phi|^2\,dx \\
&+ ... + 2pt^{p-2}\int_\Omega \nabla u_*|\nabla\phi|^{p-1}\,dx] + \frac{b}{p}t^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u_*|^p\,dx)(\int_\Omega |\nabla\phi|^p\,dx) + \frac{b}{2p}([pt\int_\Omega \\
&+ \frac{b}{2p}([pt\int_\Omega + \frac{b}{2p}([pt\int_\Omega + \frac{b}{2p}([pt\int_\Omega + t^2(p-1)\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}|\nabla\phi|^2\,dx + ...+ \\
&+ pt^{2p-3}\int_\Omega \nabla u_*|\nabla\phi|^{p-1}\,dx])^2 + \frac{b}{2p}t^{p-1}\int_\Omega |\nabla\phi|^p\,dx + \frac{b}{2p}t^{p-1}\int_\Omega |\nabla\phi|^p\,dx \\
&([2p\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla\phi\,dx + 2t(p-1)\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}|\nabla\phi|^2\,dx) + ...+ \\
&+ 2pt^{p-2}\int_\Omega \nabla u_*|\nabla\phi|^{p-1}\,dx]) + bt^{2p-1}(\int_\Omega |\nabla\phi|^p\,dx)^2 + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega \frac{(u_* + t\phi)^{1+q} - u_*^{1+q}}{t}\,dx \\
&- \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)\frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t}\,dx. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on a pour tout $x \in \Omega$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+q}\int_\Omega \frac{(u_* + t\phi)^{1+q} - u_*^{1+q}}{t}\,dx = \int_\Omega u_*^q\phi\,dx. \quad (1.9)$$

On pose

$$g(t) = m(x)\frac{[u_*(x) + t\phi(x)]^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}(x)}{(1-\gamma)t}$$

Alors

$$g'(t) = m(x)\frac{u_*^{1-\gamma}(x) - [\gamma t\phi(x) + u_*(x)][u_*(x) + t\phi(x)]^{-\gamma}}{t^2(1-\gamma)} \leq 0$$

ce qui implique que $g(t)$ *n'est pas croissante pour* $t > 0$*. De plus, on a pour tout* $x \in \Omega$

$$\lim_{t\to0^+} g(t) = ([u_*(x) + t\phi(x)]^{1-\gamma})'|_{t=0} = m(x)u_*^{-\gamma}(x)\phi(x).$$

qui peut être $+\infty$ *quand* $u_*(x) = 0$ *et* $\phi(x) > 0$. *Par conséquent, par le théorème de convergence monotone, on obtient*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\gamma} \int_\Omega m(x) \frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t}\, dx = \int_\Omega m(x) u_*^{-\gamma} \phi\, dx.$$

qui peut être égale à $+\infty$. *Combiner cela avec (1.9), laisser* $t \to 0$, *il suit de (1.8) que*

$$0 \leq a \int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_* \nabla \phi\, dx + b \int_\Omega |\nabla u_*|^p\, dx \int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_* \nabla \phi\, dx + \lambda \int_\Omega u_*^q \phi\, dx - \int_\Omega m(x) u_*^{-\gamma} \phi\, dx$$

Alors, on a pour tout $\phi \in X$ *avec* $\phi > 0$

$$\int_\Omega m(x) u_*^{-\gamma} \phi\, dx \leq (a + b\|u_*\|^p) \int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_* \nabla \phi\, dx + \lambda \int_\Omega u_*^q \phi\, dx$$

Soit $e_1 \in X$ *la première fonction propre de l'opérateur* $-\Delta_P$ *avec* $e_1 > 0$ *et* $\|e_1\| = 1$. *On pose* $\phi = e_1$ *dans (1.8), on obtient*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega m(x) u_*^{-\gamma} e_1\, dx \leq & (a + b\|u_*\|^p) \int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2} \nabla u_* \nabla e_1\, dx + \lambda \int_\Omega u_*^q e_1\, dx \\
\leq & (a + b\|u_*\|^p) \int_\Omega |\nabla u_*|^{p-1} \nabla e_1\, dx + \lambda \int_\Omega u_*^q e_1\, dx \\
\leq & (a + b\|u_*\|^p) [(\int_\Omega |\nabla u_*|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})}\, dx)(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\, dx)^{\frac{1}{p}}] \\
& + \lambda (\int_\Omega |u_*|^{q(\frac{p}{p-1})}\, dx)^{\frac{p-1}{p}} (\int_\Omega |\nabla e_1|^p\, dx)^{\frac{1}{p}} \\
\leq & (a + b\|u_*\|^p)(\|u_*\|^{p-1})(\|e_1\|) + \lambda \|u_*\|_{\frac{p}{p-1}} \|e_1\| \\
\leq & \infty
\end{aligned}$$

ce qui implique que $u_* > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$. *De plus, selon le lemme (1.2), on a* $J_\lambda(u_*) = \inf_{u\in X} J_\lambda(u)$. *Donc* u_* *est le minimum global. Qui complète la preuve du théorème global.*

CHAPITRE 2

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SOLUTION POUR UN PROBLÈME DE TYPE P-LAPLACIEN KIRCHHOFF

2.1 Introduction et Position du Problème

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$. On considère le problème elliptique de type Kirchhoff suivant :

$$\begin{cases} \text{-(a+b}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx)^{p-1}\Delta_p u + l(x)|u|^{p-2}u = m(x)u^{-\gamma} - \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

avec $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, pour $1 < p <$N dénoté l'opérateur de p-laplacien, et $\lambda > 0$ est un paramètre réel. On pose $\gamma \in]0;1[$ est un constant ; $0 < q < p^* - 1; a, b \geq 0; a + b > 0$ sont des paramètres. La fonction de poids $m : \Omega \to \mathbb{R}$ est dans $L^{\frac{p^*}{p^*+\gamma-1}}(\Omega)$ avec $m(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, $p^* = \frac{pN}{N-p}$ est l'exposant critique de Sobolev. Avec $l \in L^{\frac{N}{p}}(\Omega) \cup L^\infty(\Omega)$.

2.2 Formulation Variationnelle

Nous pouvons tout d'abord reformuler le problème (2) de la façon suivante

Soit $u \in X$, est une solution faible pour le problème (2), pour tout $\varphi \in X$ on a

$$
\begin{aligned}
0 =&(a + b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega l(x)|u|^{p-2}u\varphi\,dx \\
&+ \lambda\int_\Omega u^q\varphi\,dx - \int_\Omega m(x)u^{-\gamma}\varphi\,dx. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Démonstration. *Si u est solution de (2), on multiplie l'équation différentielle par $\varphi \in X$, ce qui donne*

$$
-(a+b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^{p-1}\Delta_p u(x)\varphi(x) + l(x)|u|^{p-2}u(x)\varphi(x) = m(x)u^{-\gamma}(x)\varphi(x) - \lambda u^q(x)\varphi(x),
$$

en chaque point x de Ω , puis on intègre le résultat sur Ω, d'où

$$
\begin{aligned}
0 =& -(a + b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^{p-1}\int_\Omega \Delta_p u(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega l(x)|u|^{p-2}u(x)\varphi(x)\,dx \\
&- \int_\Omega m(x)u^{-\gamma}(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \lambda u^q(x)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}
$$

On fait une intégration par parties sur la première intégrale et l'on obtient bien la formule (2.1) puisque $u(x) = 0$ p.p. dans $\partial\Omega$.

Réciproquement, si $u \in X$ satisfait (2.1), alors après intégration par parties en sens inverse, il vient que pour tout $\varphi \in X$

$$
\int_\Omega \left(-(a+b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^{p-1}\Delta_p u + l(x)|u|^{p-2}u - m(x)u^{-\gamma} - \lambda u^q\right)\varphi\,dx = 0
$$

ce qui implique que $-(a+b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^{p-1}\Delta_p u + l(x)|u|^{p-2}u - m(x)u^{-\gamma} - \lambda u^q = 0$ presque partout sur Ω, et par hypothèse $u(x) = 0$ p.p. dans $\partial\Omega$, on voit que u est bien une solution de (2).

2.3 Fonctionnelle d'Énergie

On doit chercher les solutions faibles pour le problème (2). En cherchant les points critiques de la fonctionnelle d'énergie $J_\lambda : X \to \mathbb{R}$ donnée par pour toute $u \in X$:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) =& -\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a + b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^p + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)|u|^p\,dx \\
&+ \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u|^{1-\gamma}\,dx.
\end{aligned}
$$

Démonstration. *On a le terme* $\frac{1}{bp^2}(a+b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^p = \frac{1}{bp^2}(\sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k}b^k\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^k)$.

On remarque que si on pose $k' = k+1$, *on a*

$$\frac{1}{bp^2}(\sum_{k'=1}^{p} C_p^{k'} a^{p-k'}b^{k'}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{k'}) = \frac{1}{p}(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)(\sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k \frac{a^{p-1-k}b^k}{k+1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^k)$$

Développement du terme $J_1(u) = \frac{1}{p}(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)(\sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k \frac{a^{p-1-k}b^k}{k+1}\int_\Omega |\nabla u|^{kp}\,dx)$

$$\begin{aligned}J_1(u) =& \frac{1}{p}(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)(C_{p-1}^0\frac{a^{p-1}}{1} + C_{p-1}^1\frac{a^{p-2}b^1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\\ &+ C_{p-1}^2\frac{a^{p-3}b^2}{3}\int_\Omega |\nabla u|^{2p}\,dx + C_{p-1}^3\frac{a^{p-4}b^3}{4}\int_\Omega |\nabla u|^{3p}\,dx\\ &+ ... + C_{p-1}^{p-2}\frac{a^1b^{p-2}}{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)p}\,dx + C_{p-1}^{p-1}\frac{b^{p-1}}{p}\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p}\,dx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_1(u) =& (C_{p-1}^0\frac{a^{p-1}}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + C_{p-1}^1\frac{a^{p-2}b^1}{2p}\int_\Omega |\nabla u|^{2p}\,dx\\ &+ C_{p-1}^2\frac{a^{p-3}b^2}{3p}\int_\Omega |\nabla u|^{3p}\,dx + C_{p-1}^3\frac{a^{p-4}b^3}{4p}\int_\Omega |\nabla u|^{4p}\,dx\\ &+ ... + C_{p-1}^{p-2}\frac{a^1b^{p-2}}{(p-1)p}\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p}\,dx + C_{p-1}^{p-1}\frac{b^{p-1}}{p^2}\int_\Omega |\nabla u|^{p^2}\,dx\end{aligned}$$

On applique la dérivée directionnelle

$\Rightarrow$ *pour* $k=0$ *sur* $C_{p-1}^0\frac{a^{p-1}}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx$ *on trouve pour tout* $\varphi \in X$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u + t\varphi|^p - |\nabla u|^p}{t} =& \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(|\nabla u|^p + p|\nabla u|^{p-1}t|\nabla\varphi| + \sum_{k=2}^{p} C_p^k|\nabla u|^{p-k}t^k|\nabla\varphi|^k - |\nabla u|^p)\\ =& p|\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^0\frac{a^{p-1}}{p}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^p - |\nabla u|^p\,dx) = C_{p-1}^0 a^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx$$

$\Rightarrow$*pour* $k=1$ *sur* $C_{p-1}^1\frac{a^{p-2}b}{2p}\int_\Omega |\nabla u|^{2p}\,dx$ *on trouve pour tout* $\varphi \in X$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u + t\varphi|^{2p} - |\nabla u|^{2p}}{t} =& \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(|\nabla u|^{2p} + 2p|\nabla u|^{2p-1}t|\nabla\varphi| + \sum_{k=2}^{2p} C_{2p}^k|\nabla u|^{2p-k}t^k|\nabla\varphi|^k - |\nabla u|^{2p})\\ =& 2p|\nabla u|^{2p-1}|\nabla\varphi|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{1}\frac{a^{p-2}b}{2p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{2p}-|\nabla u|^{2p}\,dx)=C_{p-1}^{1}a^{p-2}b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2p-1}|\nabla\varphi|\,dx$$

$\Rightarrow$*pour* $k=2$ *sur* $C_{p-1}^{2}\dfrac{a^{p-3}b^2}{3p}\displaystyle\int_{\Omega}|\nabla u|^{3p}\,dx$ *on trouve pour tout* $\varphi\in X$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u+t\varphi|^{3p}-|\nabla u|^{3p}}{t}=&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(|\nabla u|^{3p}+3p|\nabla u|^{3p-1}t|\nabla\varphi|+\sum_{k=2}^{3p}C_{3p}^{k}|\nabla u|^{3p-k}t^k|\nabla\varphi|^k-|\nabla u|^{3p})\\ =&3p|\nabla u|^{3p-1}|\nabla\varphi|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{2}\frac{a^{p-3}b^2}{3p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{3p}-|\nabla u|^{3p}\,dx)=C_{p-1}^{2}a^{p-3}b^2\int_{\Omega}|\nabla u|^{3p-1}|\nabla\varphi|\,dx$$

$\Rightarrow$*pour* $k=p-2$ *sur* $C_{p-1}^{p-2}\dfrac{ab^{p-2}}{(p-1)p}\displaystyle\int_{\Omega}|\nabla u|^{(p-1)p}\,dx$ *on trouve pour tout* $\varphi\in X$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u+t\varphi|^{(p-1)p}-|\nabla u|^{(p-1)p}}{t}=&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(|\nabla u|^{(p-1)p}+(p-1)p|\nabla u|^{(p-1)p-1}t|\nabla\varphi|\\ &+\sum_{k=2}^{(p-1)p}C_{(p-1)p}^{k}|\nabla u|^{(p-1)p-k}t^k|\nabla\varphi|^k-|\nabla u|^{(p-1)p})\\ =&(p-1)p|\nabla u|^{(p-1)p-1}|\nabla\varphi|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{p-2}\frac{b^{p-2}}{(p-1)p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{(p-1)p}-|\nabla u|^{(p-1)p}\,dx)=C_{p-1}^{p-2}ab^{p-2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{(p-1)p-1}|\nabla\varphi|\,dx$$

$\Rightarrow$*pour* $k=p-1$ *sur* $C_{p-1}^{p-1}\dfrac{b^{p-1}}{p^2}\displaystyle\int_{\Omega}|\nabla u|^{p^2}\,dx$ *on trouve pour tout* $\varphi\in X$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u+t\varphi|^{p^2}-|\nabla u|^{p^2}}{t}=&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(|\nabla u|^{p^2}+p^2|\nabla u|^{p^2-1}t|\nabla\varphi|+\sum_{k=2}^{p^2}C_{p^2}^{k}|\nabla u|^{p^2-k}t^k|\nabla\varphi|^k-|\nabla u|^{p^2})\\ =&p^2|\nabla u|^{p^2-1}|\nabla\varphi|\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{p-1}\frac{b^{p-1}}{p^2}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{p^2}-|\nabla u|^{p^2}\,dx)=C_{p-1}^{p-1}b^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p^2-1}|\nabla\varphi|\,dx$$

Alors on a

$$\left\langle J_1^{'}(u);\varphi\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^{k}\frac{a^{p-1-k}b^{k}}{(k+1)p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{(k+1)p}-|\nabla u|^{(k+1)p}\,dx)$$

$$\begin{aligned}\left\langle J_1^{'}(u);\varphi\right\rangle =&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{0}\frac{a^{p-1}}{p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{p}-|\nabla u|^{p}\,dx)\\ &+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{1}\frac{a^{p-2}b}{2p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{2p}-|\nabla u|^{2p}\,dx)\\ &+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{2}\frac{a^{p-3}b^{2}}{3p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{3p}-|\nabla u|^{3p}\,dx)+...\\ &...+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{p-2}\frac{b^{p-2}}{(p-1)p}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{(p-1)p}-|\nabla u|^{(p-1)p}\,dx)\\ &+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(C_{p-1}^{p-1}\frac{b^{p-1}}{p^{2}}\int_{\Omega}|\nabla(u+t\varphi)|^{p^{2}}-|\nabla u|^{p^{2}}\,dx).\\ =&C_{p-1}^{0}a^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx+C_{p-1}^{1}a^{p-2}b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2p-1}|\nabla\varphi|\,dx\\ &+C_{p-1}^{2}a^{p-3}b^{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{3p-1}|\nabla\varphi|\,dx+...+\\ &+C_{p-1}^{p-2}ab^{p-2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{(p-1)p-1}|\nabla\varphi|\,dx+C_{p-1}^{p-1}b^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p^{2}-1}|\nabla\varphi|\,dx\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left\langle J_1^{'}(u);u\right\rangle =&C_{p-1}^{0}a^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx+C_{p-1}^{1}a^{p-2}b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2p}\,dx+C_{p-1}^{2}a^{p-3}b^{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{3p}\,dx\\ &+...+C_{p-1}^{p-2}ab^{p-2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{(p-1)p}\,dx+C_{p-1}^{p-1}b^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p^{2}}\,dx\\ =&(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx)\left[C_{p-1}^{0}a^{p-1}+C_{p-1}^{1}a^{p-2}b\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx+C_{p-1}^{2}a^{p-3}b^{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2p}\,dx\right.\\ &\left.+...+C_{p-1}^{p-2}ab^{p-2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{(p-2)p}\,dx+C_{p-1}^{p-1}b^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{(p-1)p}\,dx\right]\\ =&(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx)\left[\sum_{k=0}^{p-1}C_{p-1}^{k}a^{p-1-k}b^{k}\int_{\Omega}|\nabla u|^{kp}\,dx\right]\\ =&(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx)^{p-1}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx.\end{aligned}$$

La preuve est complète.

Si on fait un problème de minimisation de la fonctionnelle d'énergie J_λ, il y a un problème que J_λ n'est pas Fréchet différentiable, à cause qu'il y a un terme singulier. Alors nous ne pouvons pas appliquer la théorie des points critiques pour obtenir directement l'existence de solution.

Lemme 2.1. *La fonctionnelle d'énergie J_λ est coercive et bornée inférieurement dans X, alors J_λ admet un minimum α dans X avec $\alpha < 0$.*

Démonstration. *Depuis $0 < \gamma < 1$ et $\lambda \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) =& -\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a + b\|u\|^p)^p + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)|u|^p\,dx \\ &+ \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u|^{1-\gamma}\,dx. \end{aligned}$$

D'où

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{bp^2}(a + b\|u\|^p)^p - C\|m\|_{\frac{p^*}{p^*-1+\gamma}}\|u\|^{1-\gamma}. \tag{2.2}$$

Où $C > 0$ est un constant. Ce que implique que le membre de droite de l'inégalité (2.2)tend vers $+\infty$ lorsque $\|u\| \to +\infty$, on déduit que J_λ est bornée inférieurement. Alors $\alpha = \inf_{u\in X} J_\lambda$ est bien défini. De plus, puisque $0 < \gamma < 1$ et $m(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, on a $J_\lambda(t\delta) < 0$ pour tout $\delta \neq 0$ et $t > 0$ assez petit. Ainsi, on obtient $\alpha = \inf_{u\in X} j_\lambda < 0$. La preuve est complète.

Lemme 2.2. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées. Alors J_λ admet un minimum global dans X, c'est-à-dire qu'il existe $u_* \in X$ tel que $J_\lambda(u_*) = \alpha < 0$.*

Démonstration. *D'aprés le lemme (2.1), il existe une suite minimisant dans X tel que $\lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) = \alpha < 0$. Puisque $J_\lambda(u_n) = J_\lambda(|u_n|)$, on peut supposer que $(u_n) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. La suite est bornée dans X. Puisque X est réflexif, on peut extraire une sous-suite qu'on note aussi u_n, il existe $u_* \geq 0$ tel que quand $n \to \infty$*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_* & \text{faiblement dans } X \\ u_n \to u_* & \text{fortement dans } L^s \text{ avec } 1 \leq s \leq p^* \\ u_n(x) \to u_*(x) & \text{p.p. dans } \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

On pose $w_n = u_n - u_*$, nous devons prouver que $\|w_n\| \to 0$ si $n \to \infty$. Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega l(x)|u|^p\,dx &\leq supess|l(x)|(\int_\Omega |u|^{p\frac{1}{p}}\,dx)^p. \\ &\leq \|l\|_\infty \|u\|_1^p. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_\Omega l(x)|u|^p\,dx &\leq (\int_\Omega l|l(x)|^{\frac{N}{p}}\,dx)^{\frac{p}{N}}(\int_\Omega |u|^{p\frac{p^*}{p}}\,dx)^{\frac{p}{p^*}}. \\ &\leq \|l\|_{\frac{N}{p}}\|u\|_{p^*}^p. \end{aligned}$$

donc, on a $(l(x)u_n^p)_n \in L^1(\Omega)$ et la suite $(l(x)u_n^p)_n$ converge vers $(l(x)u_*^p)_n$ p.p. dans Ω et de plus $(l(x)u_n^p)_n$ est équi-intégrable, qui implique, par application du théorème de Vitali, que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega l(x)|u_n|^p\,dx = \int_\Omega l(x)|u_*|^p\,dx \tag{2.4}$$

De plus, par la convergence faible de (u_n) dans X et le lemme de Brézis-Lieb, on obtient

$$\|u_n\|^p = \|w_n\|^p + \|u_*\|^p + o(1) \tag{2.5}$$

$$(\|u_n\|^p)^p = (\|w_n\|^p)^p + (\|u_*\|^p)^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k (\|w_n\|^p)^k (\|u_*\|^p)^{p-1-k} + o(1) \tag{2.6}$$

d'où $o(1)$ est infinitésimal quand $n \to \infty$. Par conséquent, dans le cas $0 < q < p^* - 1$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} J_\lambda(u_n)\\
&= \lim_{n\to\infty}(-\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a+b\|u_n\|^p)^p + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)|u_n|^p\,dx\\
&\quad + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u_n|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx)\\
&= \lim_{n\to\infty}(-\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a+b\,(\|w_n\|^p + \|u_*\|^p))^p + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)|u_n|^p\,dx\\
&\quad + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u_n|^{1+q}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u_n|^{1-\gamma}\,dx)\\
&=(-\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a+b\|u_*\|^p)^p + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)|u_*|^p\,dx + \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega |u_*|^{1+q}\,dx\\
&\quad - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)|u_*|^{1-\gamma}\,dx) + \lim_{n\to\infty}(-\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a+b\|w_n\|^p)^p)\\
&=J_\lambda(u_*) + \lim_{n\to\infty}(-\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a+b\|w_n\|^p)^p)\\
&\geq J_\lambda(u_*) \geq \inf_{u_n\in X} J_\lambda(u_n) = \alpha
\end{aligned}$$

ce que implique $J_\lambda(u_*) = \alpha$. Dans le cas $q = p^* - 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\alpha =& J_\lambda(u_*) + \lim_{n\to\infty}(-\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a+b\|w_n\|^p)^p + \frac{\lambda}{p^*}\|w_n\|_{p^*}^{p^*})\\
\geq& J_\lambda(u_*) \geq \alpha
\end{aligned}$$

qui donne $J_\lambda(u_*) = \alpha$. Donc $\inf_{u_n\in X} J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u_*)$ et ceci complète la preuve de lemme (2.2)

2.4 Théorème Global

Maintenant, nous pouvons énoncer notre résultat principal.

Théorème 2.1. *Supposons que les conditions (H_1) et (H_2) soient vérifiées. Alors le problème (2) admet une solution positive. De plus, cette solution est le minimum global.*

Démonstration. *Il suffit prouver que u_* est une solution faible de (2) et $u_* > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Tout d'abord, on montre que u_* est une solution faible de (2). D'après Lemme (2.2), on a*

$$\min_{u_n \in X} J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u_*), \qquad \forall \varphi \in X$$

Alors

$$J_\lambda'(u_* + t\varphi)|_{t=0} = 0$$

implique que pour tout $\varphi \in X$

$$\begin{aligned} 0 =&(a + b\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega l(x)|u|^{p-2}u\varphi\,dx \\ &+ \lambda\int_\Omega u^q\varphi\,dx - \int_\Omega m(x)u^{-\gamma}\varphi\,dx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donc u_* est une solution faible de (2).

Deuxièmement, nous prouvons que $u_* > 0$ pour tout $x \in \Omega$. puisque $J_\lambda(u_*) = \alpha < 0$, on obtient que $u_* \geq 0$ et $u_* \neq 0$. Alors $\forall \phi \in X$ et $\phi \geq 0$ et $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq&\frac{J_\lambda(u_* + t\phi) - J_\lambda(u_*)}{t} \\ =& -\frac{a^p}{bp^2} + \frac{1}{bp^2}(a + b\int_\Omega \frac{|\nabla(u_* + t\phi)|^p - |\nabla u_*|}{t}\,dx)^p + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)\frac{|u_* + t\phi|^p - |u_*|^p}{t}\,dx \\ &+ \frac{\lambda}{1+q}\int_\Omega \frac{(u_* + t\phi)^{1+q} - u_*^{1+q}}{t}\,dx - \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)\frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t}\,dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on a pour tout $x \in \Omega$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{p}\int_\Omega l(x)\frac{(u_* + t\phi)^p - u_*^p}{t}\,dx = \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)u_*^{p-1}\phi\,dx. \tag{2.9}$$

et

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+q}\int_\Omega \frac{(u_* + t\phi)^{1+q} - u_*^{1+q}}{t}\,dx = \int_\Omega u_*^q\phi\,dx. \tag{2.10}$$

On pose

$$g(t) = m(x)\frac{[u_*(x) + t\phi(x)]^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}(x)}{(1-\gamma)t}$$

Alors

$$g'(t) = m(x)\frac{u_*^{1-\gamma}(x) - [\gamma t\phi(x) + u_*(x)][u_*(x) + t\phi(x)]^{-\gamma}}{t^2(1-\gamma)} \leq 0$$

ce qui implique que $g(t)$ n'est pas croissante pour $t > 0$. De plus, on a pour tout $x \in \Omega$

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = ([u_*(x) + t\phi(x)]^{1-\gamma})'|_{t=0} = m(x)u_*^{-\gamma}(x)\phi(x).$$

qui peut être $+\infty$ quand $u_*(x) = 0$ et $\phi(x) > 0$. Par conséquent, par le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-\gamma}\int_\Omega m(x)\frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t}\,dx = \int_\Omega m(x)u_*^{-\gamma}\phi\,dx.$$

qui peut être égale à $+\infty$. Combiner cela avec (2.9) et (2.10), laisser $t \to 0$, il suit de (2.8) que

$$\begin{aligned} 0 \leq &(a + b\int_\Omega |\nabla u_*|^p\,dx)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla\phi\,dx + \int_\Omega l(x)|u_*|^{p-2}u_*\phi\,dx \\ &+ \lambda\int_\Omega u_*^q\phi\,dx - \int_\Omega m(x)u_*^{-\gamma}\phi\,dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Alors, on a pour tout $\phi \in X$ avec $\phi > 0$

$$\int_\Omega m(x)u_*^{-\gamma}\phi\,dx \leq (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla\phi\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)u_*^{p-1}\phi\,dx + \lambda\int_\Omega u_*^q\phi\,dx$$

Soit $e_1 \in X$ la première fonction propre de l'opérateur $-\Delta_P$ avec $e_1 > 0$ et $\|e_1\| = 1$. On *pose $\phi = e_1$ dans (2.8), on obtient*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega m(x)u_*^{-\gamma}e_1\,dx \leq& (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*\nabla e_1\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)u_*^{p-2}u_*e_1\,dx \\
&+ \lambda\int_\Omega u_*^q e_1\,dx \\
\leq& (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_*|^{p-1}\nabla e_1\,dx + \frac{1}{p}\int_\Omega l(x)u_*^{p-1}e_1\,dx \\
&+ \lambda\int_\Omega u_*^q e_1\,dx \\
\leq& (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}[(\int_\Omega |\nabla u_*|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})}\,dx)(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}] \\
&+ \frac{1}{p}(\int_\Omega (l(x)u_*^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\,dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \lambda(\int_\Omega |u_*|^{q(\frac{p}{p-1})}\,dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \\
\leq& (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}[(\int_\Omega |\nabla u_*|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})}\,dx)(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}] \\
&+ \frac{1}{p}(\int_\Omega l(x)u_*^p\,dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \lambda(\int_\Omega |u_*|^{q(\frac{p}{p-1})}\,dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \\
\leq& (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}[(\int_\Omega |\nabla u_*|^{(p-1)(\frac{p}{p-1})}\,dx)(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}] \\
&+ \frac{1}{p}(\int_\Omega l(x)^{\frac{N}{p}}\,dx)^{\frac{p}{N}\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega u_*^{p\frac{p^*}{p}})^{\frac{p^*}{p}\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \lambda(\int_\Omega |u_*|^{q(\frac{p}{p-1})}\,dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_\Omega |\nabla e_1|^p\,dx)^{\frac{1}{p}} \\
\leq& (a+b\|u_*\|^p)^{p-1}(\|u_*\|^{p-1})(\|e_1\|) + \|l\|_{\frac{N}{p}}^{\frac{p-1}{p}}\|u_*\|_{p^*}^p\|e_1\| \\
&+ \lambda\|u_*\|_{\frac{p}{p-1}}\|e_1\| \\
\leq& \infty
\end{aligned}$$

ce qui implique que $u_* > 0$ pour tout $x \in \Omega$. De plus, selon le lemme (2.2), on a $J_\lambda(u_*) = \inf_{u\in X} J_\lambda(u)$. Donc u_* est le minimum global. Qui complète la preuve du théorème global.

OUTILS DE BASE

Définition et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 2.1. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$\left\{ u \in L^p(\Omega) | \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \end{array} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., N \right\}$$

pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \qquad et \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = grad\ u$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ *si* $(1 \leq p < \infty)$.

Proposition 2.1. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Inégalités de Sobolev

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 2.2. *(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). Soit* $1 \leq p < N$, *alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) \qquad \text{où} \quad p^* \quad \text{est donné par} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

et il existe une constante $C = C(p,N)$ *telle que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Corollaire 2.1. *Soit* $1 \leq p < N$. *Alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall q \in [p; p^*]$$

avec injection continue.

Corollaire 2.2. *(Le cas limite* $p = N$*). On a*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \qquad \forall u \in [N; +\infty[$$

avec injection continue.

Théorème 2.3. *(Morrey). Soit* $p > N$, *alors*

$$W^{\mathbb{R}^N} \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue. De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *on a*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \quad p.p. \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *et* C *est une constante (qui ne dépend seulement de* p *et* N*).*

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *On suppose que* Ω *est un ouvert de classe* C^1 *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *borné, ou bien* $\Omega = \mathbb{R}^N_+$

Corollaire 2.3. *Soit* $1 \leq p < \infty$. *On a*

si $1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

si $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p; +\infty[$,

si $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

avec injections continues.

Corollaire 2.4. *(Rellich-Kondrachov). On suppose Ω borné de classe C^1. On a*

$$\begin{array}{llll} si & p < N, & alors & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1; p^*[\text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ si & p = N, & alors & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1; +\infty[, \\ si & p > N, & alors & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}), \end{array}$$

avec injections compactes.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 2.2. *Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$.*

Théorème 2.4. *On suppose que Ω est de classe C^1. Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \qquad avec \qquad 1 \leq p < \infty$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $u = 0$ *sur* $\Gamma = \partial\Omega$.
(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2.2. *(Inégalité de Poincaré). On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et P) telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$.

Quelques critères de convergence

Nous énonçons systématiquement ce qui suit en considérant un borélien Ω de $\mathbb{R}^N$ et la mesure de Lebesgue notée dx. Cependant la plupart de ces résultats sont vrais pour des espaces mesurés et des mesures σ-finies plus générales. Pour $1 \leq p \leq$, la norme de $L^p(\Omega)$ sera notée $\| \cdot \|_p$.

Théorème 2.5. *(Théorème de la convergence monotone). Soit $(f_n)_{n>1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. En notant $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n>1} f_n(x)$, on a :*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Lemme 2.3. *(Lemme de Fatou). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Théorème 2.6. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $|f_n| \leq g$ p.p. sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et :*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0, \qquad \int_\Omega f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Le théorème d'Egorov, que nous rappelons maintenant, établit une relation entre la convergence presque partout et la convergence uniforme.

Théorème 2.7. *(Théorème d'Egorov). On suppose que Ω est de mesure finie et que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f. Alors pour tout $\delta > 0$ il existe $A \subset \Omega$ mesurable tel que :*

$$mes(A^c) < \delta, \qquad \limsup_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

De même il est intéressant de savoir qu'il existe une certaine relation entre la notion de mesurabilité et celle de continuité. On dispose en effet du théorème de Lusin que voici.

Théorème 2.8. *(Théorème de Lusin). Soient f une fonction mesurable définie sur Ω et $A \subset \Omega$ un ensemble mesurable et de mesure finie tel que $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\tilde{f} \in C^c(\Omega)$ telle que :*

$$mes\left\{x \in \Omega \quad ; \quad f(x) \notin \tilde{f}(x)\right\} < \varepsilon, \qquad \sup_{x\in\Omega} |\tilde{f}(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

En particulier si $|f| \leq M$ p.p. sur Ω, il existe une suite $(f_n)_n$, telle que $f_n \in C^c(\Omega)$, $|f_n| \leq M$ et $f_n \to f$ p.p. sur Ω.

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers une fonction f. Comme d'après le lemme de Fatou on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|^p\,dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x)|^p\,dx \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p^p,\end{aligned}$$

on voit que $f \in L^p(\Omega)$.

Lemme 2.4. *(Brezis-Lieb). Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers f. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et :*

$$\|f\|_p^p = \lim n \to \infty \left(\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p\right).$$

Un corollaire immédiat de ce résultat est le suivant :

Corollaire 2.5. *Soient $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$. On suppose que :*

$$f_n \to f \quad p.p. \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Alors on a : $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Voici maintenant un lien entre la convergence presque partout et la convergence faible dans les espaces $L^p(\Omega)$. Remarquons que pour $1 < p < \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$ étant réflexifs, si la suite $(f_n)_n$ est bornée dans$L^p(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_i})_i$ convergeant dans $L^p(\Omega)$-faible vers une certaine fonction $g \in L^p(\Omega)$. Comme le montre le lemme suivant, si on sait que $f_n \to f$ p.p. on a nécessairement $g = f$.

Lemme 2.5. *Soient $1 < p < \infty$ et $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers f. Alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$-faible.*

Notons aussi que pour $1 < p < \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$ étant uniformément convexes et réflexifs, si $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ faible et $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, alors on a $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ fort.

Remarque 2.1. *Naturellement si une suite $(u_n)_n$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$, en général on ne peut rien dire de sa convergence presque partout.*

Proposition 2.3. *Soient $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(f_{n_i})_i$ telles que :*

$$|f_{n_i}| \leq g \quad p.p., \qquad f_{n_i} \to f \quad p.p.$$

Une notion importante concernant une suite de fonctions intégrables est celle d'équi-intégrabilité que nous introduisons ici (cette notion est à comparer avec celle d'une famille équi-continue de fonctions).

Définition 2.3. *On dit que $(f_n)_n$, une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$, est équi-intégrable si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable A, de mesure finie et $\delta > 0$ tels que*

$$\forall n \geq 1, \quad on\ a \quad \int_\Omega |f_n(x)|\, dx < \varepsilon;$$

$$\forall E \subset \Omega, \qquad mesurable\ avec\ mes(E) < \delta, \int_\Omega |f_n(x)|\, dx < \varepsilon.$$

On remarquera que dans le cas particulier où Ω est de mesure finie, l'équi-intégrabilité se réduit à la deuxième condition.

Intuitivement, par exemple lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, la première condition exprime le fait que la suite $(f_n)_n$ est équi-négligeable à l'infini, alors que la seconde condition exprime le fait que la famille de mesures $E \to \int_E |fn(x)|\, dx$ est équi-continue.

Le théorème de Vitali que nous allons rappeler maintenant est particulièrement utile pour les situations où on dispose d'une suite de fonctions convergeant presque partout et dont on souhaite montrer la convergence dans $L^1(\Omega)$.

Théorème 2.9. *(Vitali). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. Alors $(f_n)_n$ tend vers f dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si la suite $(f_n)_n$ est équi-intégrable.*

Valeurs propres

Théorème 2.10. *Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$, et L un opérateur du second ordre. Soit $\varphi \not\equiv 0$, une fonction de $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ qui vérifie $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ et $Lv = \lambda\varphi$. Alors pour toute fonction $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $v(x) > 0$ dans $\bar{\Omega}$ on a :*

$$\lambda \geq \inf_{x\in\Omega} \frac{Lv(x)}{v(x)}.$$

En particulier si $\lambda = \lambda_1$, la première valeur propre de L, alors

$$\lambda_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad \exists v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), v > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, Lv \geq \lambda v\right\}.$$

Dans le cas des opérateurs elliptiques, la première valeur propre joue un rôle particulier. En effet sous les hypothèses habituelles que nous avons faites jusqu'ici, on peut montrer que si de plus l'ouvert Ω est connexe, alors la première valeur propre est simple et possède une fonction propre positive.

Définition 2.4. *On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur p-Laplacien ; si le problème $-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admet une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ non-nulle. La fonction u est appelée fonction propre. On dit aussi que $(u; \lambda)$ est une solution propre du problème.*

Théorème 2.11. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et régulier et $1 < p < N$. Alors λ_1 définie par $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\\ u \neq 0}} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx}{\int_\Omega |u|^p\,dx}$ existe et strictement positive, de plus il existe une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que*

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx}{\int_\Omega |u|^p\,dx}$$

La fonction u peut être choisit positive, et satisfait l'équation $-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u$ dans Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$, u appelée la première fonction propre.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité des deux différentes problèmes de type p-Laplacien Kirchhoff, qui sont des problèmes elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien et un terme singulier.

On été établis les méthodes variationnelles et la théorie des points critiques, on appliquant des méthodes d'analyse tells des différents critères de convergences sur les espaces de Soboleve, et les théorèmes d'injection dans les espaces de Soboleve, avec des méthodes d'optimisation.

A la fin, nous avons utilisé la théorie spectacle sur l'opérateur p-Laplacien, plus précisément l'une de ses solutions qui est la première valeur propre et sa fonction propre associée qui admet plusieurs propriétés que les autres solutions ne possèdent pas.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence et l'unicité d'un solution positive de deux problèmes elliptiques de type Kirchhoff des formes suivantes :

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx)\Delta_p u = m(x)u^{-\gamma} - \lambda u^q & x \in \Omega \\ u > 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Et

$$\begin{cases} -(a+b\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx)^{p-1}\Delta_p u + l(x)|u|^{p-2}u = m(x)u^{-\gamma} - \lambda u^q & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Pour prouver ces résultats en utilisant les méthodes variationnelles et quelques techniques d'analyse.

Mots clés

Problème de type Kirchhoff ,solution positive, un terme singulier, non linéarité.

Abstract

This work is devoted to study the existence of positive solution for a class of p-Kirchhof-type problems with singular nonlinearity. Our approach relies on the variational method and some analysis techniques.

Key words

Kirchhff type problem, positive solution, singular, nonlinearity

BIBLIOGRAPHIE

[1] *C. O. Alves and F.J.S.A. Corrêa,On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator, Comm. Appl. Nonlinear Anal.,8(2001), 43-56.*

[2] *C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl.,49(2005), 85-93.*

[3] *G. Anello, A uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff type and some related open problems, J. Math. Anal. Appl., 373(2011), 248-251.*

[4] *A. Arosio, On the nonlinear Timoshenko-Kirchhoff beam equation, Chinese Ann. Math. Ser. B, 20(1999), 495-506.*

[5] *A. Arosio, A geometrical nonlinear correction to the Timoshenko beamn equation, Nonlinear Anal., 47(2001), 729-740.*

[6] *H. Bréezis and E. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc., 88(1983) , 486-490.*

[7] *F. J. S. A. Corrêa and S. D. B. Menezes, Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method, Electron. J. Differential Equations 2004, No. 19, 10pp.*

[8] *G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig, Germany. 1883.*

[9] *C. Y. Lei, J. F. Liao and C. L. Tang, Multiple positive solutions for Kirchhoff type of problems with singularity and critical exponents, J. Math. Anal. Appl, 421(2005), 521-538.*

[10] *Q. Li, Z. Yang and Z. Feng, Multiple solutions of a p-Kirchhoff equation with singular and critical nonlinearities, Electron. J. Differential Equations 2017, Paper No. 84, 14 pp.*

[11] *J. F. Liao, P. Zhang, J. Liu and C. L. Tang, Existence and multiplicity of positive solutions for a class of Kirchhoff type problems with singularity, J. Math. Anal. Appl, 430(2005), 1124-1148.*

[12] J. F. Liao, X. F. Ke and C. L. Tang, A uniqueness result for Kirchhoff type problems with singularity, Appl. Math. Lett, 59(2016), 24-30.

[13] X. Liu and Y. J. Sun, Multiple positive solutions for Kirchhoff type problems without compactness conditions, J. Diff. Eqs, 253(2012), 2285-2294.

[14] T. F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Anal. 63(2005), 1967-1977.

[15] K. Perera and Z. Zhang, Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index, J. Differential Equations, 221(2006), 246-255.

[16] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, London etc. 1966.

[17] H. Brézis. Analyse fonctionnelle :Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[18] O. Kavian. Introduction à La Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques. Springer-Verlag, 1993