Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

pour l'obtention du diplôme

Mastère en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et EDP

Thème

Existence de solution positive pour un problème aux limites non linéaires de deuxième ordre

Présenté par :
Boussag Moustafa

Soutenu le : 2021

Devant le jury composé de :

Président :	Dr.Ibrahim Khaldi	M.C.B	C-Univ. Ahmed Salhi-Naama
Examinateur :	Dr. Kamel Tahri	M.C.A	Univ. Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Encadreur :	Dr. Ali Zouaoui	M.C.B	Univ. Mustapha Stambouli-Mascara

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail. J'exprime ici ma profonde reconnaissance à l'égard de ma promoteur Dr. Ali Zouaoui. il a su orienter mon travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseils et encouragements qu'il n'a jamais cessé de prodiguer sont inestimables. Sa patience et sa compréhension m'ont permi d'avancer et de terminer ce travail. Que le Dr.Ahmed Khaldi Je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury. Je remercie le Dr. Kamel Tahri pour avoir accepté d'être membre de ce jury et d'avoir accepter d'expertiser ma thèse.

♡

❖ *Moustafa*

Table des matières

Introduction

L'analyse fonctionnelle est l'un des domaine les plus importants et les plus actifs en Mathématiques et cela dù à ces applications dans d'autres domaines comme par exemple la physique, l'économie, biologie, l'ingénierie et beaucoup d'autre.
L'analyse fonctionnelle représente le cadre le plus favorable pour étudier les équations différentielles, notamment les problèmes aux limite.

Nous considérons dans ce mémoire un problème aux limite de la forme

$$\begin{cases} U''(t) = \lambda f(t,U), \quad 0 < t < 1 \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre , et

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,U) &\longrightarrow f(t,U) \end{aligned}$$

est une fonction continue .

Ce mémoire comprend deux chapitre, dans le premier chapitre, on rappelle les notions de base nécessaire pour la suite de notre travail. Dans le deuxième chapitre et à l'aide d'une combinaison entre le théorème d'Ascoli-Arzela et celle du point fixe de Leray-Schauder, on établit un résultat d'existence d'une solution non triviale pour notre problème ; à la fin de ce chapitre on donne deux application de notre résultat.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les espaces métriques

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Définition 1.1 (*Espace métrique*)

Un espace métrique (X, d) est un espace topologique X muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ appelée distance ou métrique, vérifiant :

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ *(la symétrie).*
3. $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1

1. *Dans $\mathbb{R}$, on peut considérer la distance d suivante dite ; la distance naturelle de $\mathbb{R}$ ou bien la distance usuelle*

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. *Dans $\mathbb{R}^n$:*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1$$

3. *Dans $C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue }\}, (a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ et pour $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ $d_1(x, y) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ $d_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}$*

4. *On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque X, en posant pour* $x, y \in X$; $d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$ *Cette métrique dite la métrique discrète.*

Définition 1.2 (*Espace vectoriel normé*)

Soit E une espace vectoriel.

$(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si l'application $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifie :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *où $|.|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire).*

Si $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par $d_{\|.\|}(x,y) = \|x - y\|$.

Exemple 1.2

1. *Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ toutes les normes sont de la forme :*

$$\|x\| = k|x|, k > 0.$$

   - *En général, on prend $k = 1$.*

2. *Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$ *(lorsque $p = 2$ c'est la norme euclidienne)*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}.$$

3. *Dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt},$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Définition 1.3

Soit E un espace vectoriel normé. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de E sont dites équivalentes s'il existe deux constante $c_1, c_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in E$:

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Proposition 1.1

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Remarque 1.1

Ce résultat n'est plus valable si E est de dimension infinie.

Contre exemple en dimension infinie :

Dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ soit $f_\epsilon(x) = \max\left(1 - \dfrac{x}{\epsilon}, 0\right)$, On a :

$$\|f_\epsilon\|_1 = \int_0^1 |f_\epsilon(t)|\, dt = \int_0^1 \left|1 - \frac{t}{\epsilon}\right| dt = \int_0^\epsilon \left|1 - \frac{t}{\epsilon}\right| dt + \int_\epsilon^1 \left|1 - \frac{t}{\epsilon}\right| dt = \left[t - \frac{t^2}{2\epsilon}\right]_0^\epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2\epsilon} = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\|f_\epsilon\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_\epsilon(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left[1 - \frac{t}{\epsilon}\right] = 1$$

On voit bien que ces normes ne sont pas équivalentes dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Car sinon

$$\alpha\frac{\varepsilon}{2} \leq 1 \leq \beta\frac{\varepsilon}{2},$$

$\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq 0 \Longrightarrow 1 = 0$ absurde.

Définition 1.4 (*Boules*)

Soit (X, d) un espace métrique, on définit

1. *la boule ouverte de centre a et de rayon r par :*

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}.$$

2. *la boule fermée de centre a et de rayon r par :*

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}.$$

3. *la sphère de centre a et de rayon r par :*

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r\}.$$

Définition 1.5 (*Suite de Cauchy*)

On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X, d) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } n, m > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

on écrit alors

$$d(x_n, x_m) \to 0, \text{ quand } n, m \to +\infty.$$

Remarque 1.2

- *Toute suite convergente est de Cauchy.*
- *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Définition 1.6 (*Espace métrique complet*)

L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.

Définition 1.7 (*Espace de Banach*)

On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé complet.

Exemples

- $C([0,1])$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
- $L^P(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ pour $1 \le p \le +\infty$.
- $l^p, 1 \le p < +\infty$:
  - ⋆ ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty$.
  - ⋆ norme $\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$.
- l^∞ :
  - ⋆ ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées.
  - ⋆ norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

– Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet (un espace de Banach).

– Les espaces de Lebesgue $L^p([a,b], \|.\|_p)$, où

$$\|u\|_p := \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Exemple 1.3

Généralement un espace normé de dimension infinie peut être complet pour une norme mais ne l'est pas pour une autre ; l'exemple suivant met l'accent sur une telle situation.

1. *L'espace* $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_{L^1}$ *n'est pas complet. Pour le voir, on peut par exemple considérer la suite* $(f_n)_{n\geq 2}$ *définie par*

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - t\right) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Elle est de Cauchy au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ *mais ne converge pas dans* $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$.

Définition 1.8

Soit K un sous espace d'un espace métrique (X,d). On dit que K est un espace compacte si de tout suite $(x_k)_k$ de point de K, on peut extraire une sous suite convergente.

Définition 1.9 (*Ensemble relativement compact*)

Une partie Y d'un espace métrique (X,d) est dite relativement compacte s'il existe un compact K de X tel que $Y \subset K$.

1.2 Opérateurs compacts

Soit T un opérateur linéaire d'un espace de Banach E dans un autre F.

Définition 1.10

On dit que T est un opérateur compact si l'image d'un ensemble borné $B(Im(B))$ est relativement compact dans F.

Définition 1.11

L'opérateur T est dit complètement continu, s'il est compact et continu.

Définition 1.12

Un opérateur linéaire T de $(E, \|.\|_E)$ dans $(F, \|.\|_F)$ est dit borné s'il existe $M > 0$ telle que

$$\|T(f)\|_F \leq \|f\|_E, \quad \forall f \in E.$$

Remarque 1.3

1. *Un opérateur linéaire T est continu si et seulement s'il est borné*
2. *Tout opérateur linéaire compact est continu*

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $T : E \mapsto F$ une application

Définition 1.13

Soit $u_0 \in E$, on dit que T est continue en u_0 si

$$\lim_{u \to u_0} \|T(u) - T(u_0)\|_F = 0$$

Définition 1.14

On dit que T est lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$\|T(u) - T(v)\|_F \leq k\|u - v\|_E; \quad \forall u, v \in E.$$

Si $k \in [0, 1]$, T est dite contraction.

1.3 La fonction Green

Lorsqu'on résout des problèmes aux limites avec une non-linéarité au second membre, il est souvent utile d'introduire la fonction de Green. C'est ce que nous allons faire dans cette section. Soient p, q deux fonctions vérifiant :

1. $p(t) > 0$ et continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$;
2. $r(t) \geq 0$ et continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Ces hypothèses seront supposées tout au long du reste de ce chapitre.

Considérons l'opérateur différentiel L défini par

$$L[x] \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) - r(t)x.$$

L'opérateur L est linéaire, c'est-à-dire

$$L\left[c_1 x + c_2 y\right] = c_1 L[x] + c_2 L[y].$$

Il vient en particulier, d'après le théorème 9.2.2 du chapitre 9 (avec $q(t) = 1$) du référence [3] il s'ensuit que le problème des valeurs propres suivant

$$\begin{cases} L[x] + \lambda x = 0, & t \in [a, b] \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$

admet une suite de valeurs propres λ_i, avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$.

Soit φ, ψ les solutions du problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} L[\varphi] = 0, t \in [a,b] \\ \varphi(a) = 0, \varphi'(a) = \alpha \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L[\psi] = 0, t \in [a,b] \\ \psi(b) = 0, \psi'(b) = \beta \neq 0 \end{cases}$$

Notons que $\psi(a) \neq 0$ car sinon, alors ψ satisfait $L[\psi] = 0$ et $\psi(a) = \psi(b) = 0$ et cela signifie que ψ est une fonction propre de L avec une valeur propre $\lambda = 0$, ce qui est impossible. Bien sûr, pour la même raison, nous avons aussi $\varphi(b) \neq 0$.

Considérons maintenant le Wronskian de ces deux solutions φ, ψ :

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \varphi'(t) \\ \psi(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

ou encore

$$W(t) = \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t).$$

Alors, il vient d'après le théorème d'Abel que, $W(t) \equiv -C$, où C est une constante, ce qui donne par définition de φ, ψ

$$-C = W(a) = -\varphi'(a)\psi(a) = W(b) = \varphi(b)\psi'(b) \neq 0.$$

En d'autres termes, φ et ψ sont linéairement indépendants. La fonction de Green de L (avec des conditions aux limites $x(a) = x(b) = 0$) est la fonction $G(t,s)$ définie sur le pavé $Q = [a,b] \times [a,b]$ par

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(t)C}\varphi(t)\psi(s), & \text{if } t \in [a,s] \\ \dfrac{1}{p(t)C}\varphi(s)\psi(t), & \text{if } t \in [s,b]. \end{cases}$$

La fonction G est continue sur Q et

$$G(a,s) = \frac{\varphi(a)\psi(s)}{p(a)C} = 0, \quad G(b,s) = \frac{\varphi(s)\psi(b)}{p(b)C} = 0 \tag{1.1}$$

De plus, G est dérivable pour tout $(t,s) \in Q, s \neq t$. De plus, pour chaque s, en supposant

$$G_t\left(s^-, t\right) = \lim_{t \to s^-} \frac{d}{dt} G(t,s)$$

et

$$G_t\left(s^+, t\right) = \lim_{t \to s^+} \frac{d}{dt} G(t,s),$$

il est facile de vérifier que

$$G_t\left(s^-, t\right) - G_t\left(s^+, t\right) = Cp(s)$$

.

Exemple 1.4

Calculons la fonction de Green de $L[x] = x'' - x$ *dans l'intervalle* $[0, 1]$. *on a* $p = r = 1$ *et* $[a, b] = [0, 1]$. *La solution générale de*

$$x'' - x = 0$$

est

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Si $x(0) = c_1 + c_2 = 0$ *et* $x'(0) = c_1 - c_2 = 1$, *on trouve* $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$ *et on peut prendre*

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = \sinh t.$$

Si $x(1) = c_1 e + \frac{c_2}{e} = 0$ *et* $x'(1) = c_1 e - \frac{c_2}{e} = -1$, *on trouve* $c_1 = -\frac{1}{2e}, c_2 = \frac{e}{2}$ *et on peut prendre*

$$\begin{aligned}
\psi &= -\left[\frac{1}{2e}e^t - \frac{e}{2}e^{-t}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^t}{e} - ee^{-t}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{t-1} - e^{-(t-1)}\right] \\
&= -\sinh(t-1).
\end{aligned}$$

Clairement φ, ψ *sont linéairement indépendants et*

$$C = \psi(0) = \frac{1}{2e} - \frac{e}{2} = \frac{1 - e^2}{2e} < 0$$

ainsi

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{2e}{e^2 - 1} \cdot \sinh t \cdot \sinh(s-1), & \textit{if } t \in [0, s] \\ \dfrac{2e}{e^2 - 1} \cdot \sinh s \cdot \sinh(t-1), & \textit{if } t \in [s, 1] \end{cases}$$

est la fonction de Green que nous recherchons.

La fonction de Green de L peut être utilisée pour transformer un problème aux limites en une équation intégrale.

Théorème 1.1

Pour toute fonction continue $h(t)$, le problème non homogène

$$\begin{cases} L[x] + h(t) = 0, & t \in [a,b] \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

admet une solution unique donnée par la fonction

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)h(s)ds.$$

Démonstration : Pour simplifier la notation, on prend $p \equiv 1$. En utilisant (1.1), on trouve

$$x(a) = \int_a^b G(a,s)h(s)ds = 0$$

et

$$x(b) = \int_a^b G(b,s)h(s)ds = 0$$

de sorte que x satisfait les conditions aux limites souhaitées. De plus, en décomposant l'intégrale $\int_a^b ds$ en $\int_a^t ds + \int_t^b ds$, on aura

$$x(t) = \int_a^t G(t,s)h(s)ds + \int_t^b G(t,s)h(s)ds.$$

Puisque pour $a \leq s \leq t$ on a $G(t,s) = \frac{1}{C}(\varphi(s)\psi(t))$, tandis que pour $t \leq s \leq b$ on a $G(t,s) = \frac{1}{C}(\varphi(t)\psi(s))$, il s'ensuit que

$$x(t) = \psi(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \varphi(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds$$

Alors $x(t)$ est dérivable et en utilisant le théorème fondamental du Calcul, on obtient

$$\begin{aligned} x'(t) &= \psi'(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \frac{1}{C}\varphi(t)\psi(t)h(t) \\ &\quad +\varphi'(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds - \frac{1}{C}\psi(t)\varphi(t)h(t) \\ &= \psi'(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \varphi'(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds \end{aligned}$$

Donc x' est aussi dérivable et on a

$$\begin{aligned} x''(t) =& \psi''(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \frac{1}{C}\psi'(t)\varphi(t)h(t) \\ &+ \varphi''(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds - \frac{1}{C}\varphi'(t)\psi(t)h(t) \\ =& \psi''(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \varphi''(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds \\ &+ \frac{1}{C}\left(\psi'(t)\varphi(t) - \varphi'(t)\psi(t)\right)h(t) \end{aligned}$$

On note $\varphi'(t)\psi(t) - \psi'(t)\varphi(t) = W(t) = -C$. Alors

$$L[x] = x''(t) - rx = \psi''(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \varphi''(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}dsh(t) - rx$$

Alors $L[\varphi] = \varphi'' - r\varphi = 0$ et $L[\psi] = \psi'' - r\psi = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} L[x] &= r\psi(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + r\varphi(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds - h - rx \\ &= r\left[\psi(t)\int_a^t \frac{\varphi(s)h(s)}{C}ds + \varphi(t)\int_t^b \frac{\psi(s)h(s)}{C}ds\right] - h - rx \\ &= r\left[\int_a^t \frac{\varphi(s)\psi(t)h(s)}{C}ds + \int_t^b \frac{\varphi(t)\psi(s)h(s)}{C}ds\right] - h - rx \\ &= r\int_a^b G(t,s)h(s)ds - h - rx = rx - h - rx = -h. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'existence d'une solution de (1.2). Pour prouver l'unicité, soit x_1, x_2 deux solutions de (1.2). Ensuite, si on prend $z = x_1 - x_2$, alors on a $L[z] = L[x_1] - L[x_2] = 0$ et $z(a) = z(b) = 0$.

Et par suite $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de L avec des conditions aux limites nulles, il s'ensuit que $z(t) \equiv 0$, ce qui donne $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in [a,b]$. ■

Corollaire 1.1

Si $f(t,x)$ est continue, alors

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s,x(s))ds$$

est une solution de $L[x] + f(t,x) = 0, x(a) = x(b) = 0$.

1.4 Théorème d'Ascoli-Arzela

Ci-dessous on rappelle le théorème d'Ascoli-Arzela qui est un outil classique et puissant pour montrer qu'une partie de l'espace des fonctions continues sur un compact est relativement compacte.

Définition 1.15

Soit M un sous ensemble de $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, M est dit équicontinu si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b], \exists \delta > 0, \forall y \in [a,b]$$
$$[\|x-y\| < \delta] \Longrightarrow [\forall f \in M, \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

Exemple 1.5

Si k est un nombre réel positif, alors l'ensemble des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{R}$ de rapport k est équicontinu. En effet, pour ε fixé, il suffit de prendre

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{M},$$

dans la définition 1.15.

Théorème 1.2

Soit $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), -\infty < a < b < +\infty$, l'espace des fonctions continues définies sur le compact $[a,b]$ et à valeurs réelles muni de la norme

$$\|u\| = \max_{a \le t \le b} |u(t)|.$$

Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si elle est uniformément borné et équicontinue.

Remarque 1.4

Le théorème d'Ascoli-Arzela nous permet de caractériser les ensembles relativement compacts de $\mathcal{C}(E_1,\mathbb{K})$, (avec E_1 un espace métrique compact, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), ceci n'est pas vrai pour les ensembles relativement compacts de n'importe quel espace de Banach.

Exemple 1.6

Soient k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Le sous-ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ qui vérifient

$$|f(t)| \le k_1 \text{ et } \sup |f'(t)| \le k_2,$$

pour tout $t \in [a,b]$, est relativement compact dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
En effet, pour tout $f \in \mathcal{F}$, le théorème des accroissements finis, prouve que pour tout $t_0, t \in [a,b]$ il existe $c \in]\, t_0, t[$ tel que

$$|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)|\, |t - t_0|\,.$$

Donc $|f(t) - f(t_0)| \leq k_2 \,|t - t_0|\,.$ Fixons $t_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k_2}$, alors

$$\forall t \in [a,b], \quad |t - t_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ en t_0. Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a,b]$, on en déduit que $\mathcal{F}$ est équi- continu.

On a $|f(t)| \leq k_1$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ ce qui implique que $\|f\|_\infty \leq k_1$ et partant

$$\forall f \in \mathcal{F}, f \in B'(0, k_1)\,,$$

i.e.,

$$\mathcal{F} \subset B'(0, k_1)\,,$$

d'où la bornitude de $\mathcal{F}$.
Finalement, Comme $\mathcal{F}$ est borné et équicontinu, alors le théorème d'Ascoli-Arzela assure que $\mathcal{F}$ est relativement compact.

1.5 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est compacte si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Dans le cas où E est un espace de dimension finie,

$$A \text{ est compacte } \Longleftrightarrow A \text{ est fermée bornée}$$

et

$$A \text{ est relativement compacte } \Longleftrightarrow A \text{ est bornée.}$$

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. Le théorème de Riesz[4] nous dit que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = C([a,b],\mathbb{R})$, espace vectoriel normé de dimension infinie, et on veut caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $E = C([a,b],\mathbb{R})$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée).

Théorème 1.3

Soit (X,d) un espace métrique compact, Y un espace de Banach et H un sous ensemble de $\mathcal{C}(X,Y)$ muni de la norme sup : $\|\cdot\|_\infty$. Alors H est relativement compact si et seulement si :

1. *H est uniformément borné, i.e. $\forall x \in X$, l'ensemble $\{f(x) : f \in H\}$ est borné dans Y.*
2. *H est équicontinu, i.e. l'ensemble*

$$H(x_0) = \{f(x_0), f \in H\}$$

est équicontinu pour tout $x_0 \in H$ c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \subset \mathcal{V}(x_0), \forall x \in X, \forall f \in H, x \in V \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.5

Si $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}, H \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est dit équicontinu sur l'intervalle compact $[a,b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in H, \forall t_1, t_2 \in [a,b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$$

Lemme 1.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ une suite de fonctions vérifiant :

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e.*

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq K$$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x, y \in [a,b] : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. (i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte.)

Corollaire 1.2

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ (i.e. Les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$) alors elle admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Autrement dit : $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ s'injecte d'une façon compacte dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Remarque 1.6

En général $\mathcal{C}^k([a,b])$ s'injecte d'une façon compacte dans $\mathcal{C}^{k'}([a,b])$ avec $k > k'$.

Démonstration :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a,b])$ implique que la première condition du lemme (1.1) est satisfaite.
- $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornées dans $\mathcal{C}([a,b])$ donne la deuxième condition du lemme (1.1). En effet, pour tout $x, y \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= |f'_n(\xi)|\,|x-y|, \xi \in]\,x, y[\text{ et } n \in \mathbb{N} \\ &\leq K|x-y|, \end{aligned}$$

donc, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\epsilon}{K}$. ■

Chapitre 2

Existence de solution pour un problème aux limites

Nous considérons dans ce chapitre le problème aux limite suivante :

$$\begin{cases} U''(t) = \lambda f(t, U), & 0 < t < 1 \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre , et

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, U) &\longrightarrow f(t, U) \end{aligned}$$

est une fonction continue .

2.1 Existence de solution

A l'aide du théorème d'Ascoli-Arzela on démontre que ce problème admet au moins une solution non triviale ($U \not\equiv 0$) dès que $0 < \lambda < \lambda^\star$ où $\lambda^\star$ est une constante a déterminer.

En fait on démontre le résultats suivant

Théorème 2.1 ([5])

Supposons que $f(t, 0) \not\equiv 0$ et supposons qu'il existe dans $L^1([0,1])$ deux fonctions non négatives ($p(t) \geq 0, r(t) \geq 0$) telles que :

$$|f(t, U)| \leq p(t).|U| + r(t) \quad \textit{pour presque tout } (t, U) \in [0,1] \times \mathbb{R} \tag{2.2}$$

et supposons encore qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que :

$$p(t_0) \neq 0$$

Alors il existe $\lambda^\star > 0$ tel que $\forall 0 < \lambda < \lambda^\star$, le problème aux limites (2.1) admet une *solution non trivial ($U^* \not\equiv 0$) dans $\mathcal{C}([0,1])$ (l'espace des fonctions continues)*

Avant de démonter ce théorème , nous faisons appelle au lemme suivant qui sera un point de départ pour notre preuve :

Lemme 2.1 ([5])

Soit $y \in X$, où X est l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme

$$\|U\| = \max_{t\in[0,1]} |U(t)|$$

Alors le problème aux limites

$$\begin{cases} U''(t) - y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

admet une solution unique de la forme :

$$U(t) = \int_0^1 G(t,s)y(t)ds$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est la fonction de Green pour le problème suivant :

$$(P_0) \begin{cases} U''(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi on remarque que si on pose $y(t) = \lambda f(t,U)$ alors le problème (2.3) n'est autre que le problème (2.1), et par suite une solution pour le problème (2.1) est donnée par :

$$U(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,U(s))ds \tag{2.4}$$

et si on pose T est l'opérateur de X dans X définie par :

$$T(U) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,U(s))ds$$

$\forall U \in X$ alors démontrer l'existence de $U(t)$ qui vérifie l'équation (2.4) revient a démonter l'existence d'un point fixe pour l'opérateur T c'est a dire démonter l'existence d'une fonction $U \in X$ telle que :

$$T(U) = U(t).$$

Pour démontrer l'existence de ce point fixe, on utilise le Théorème de point fixe de Leray-Schauder

Théorème 2.2 (*de Leray-Schauder* [2])

Soit X un $\mathbb{R}$- espace de Banach , Ω un ensemble ouvert et bornée de X , $0 \in \Omega$ et

$$T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$$

un opérateur complètement continue, Alors :

i) ou bien il existe $x \in \partial\Omega$, $\mu > 1$ tel que $T(x) = \mu x$; ($\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω).

ii) ou bien il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$ ie

$$T(x^*) = x^*$$

Ainsi on voit qu'une condition nécessaire pour qu'on puisse applique le théorème de Leray-Schauder et que T soit complètement continue .

Une propriétés qui sera démonter par la suite a l'aide de théorème d'Ascoli-Arzela (la preuve de cette propriétés sera étudier en détail dans la fin de cette section)

Supposons pour le moment que notre opérateur

$$T(U) := \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, U(s)) ds$$

est complètement continue, Alors pour démontrer l'existence du point fixe $U^* \in X$ on démontre que l'assertion (i) dans le théorème de Leray-Schauder ne peut se produire en aucune cas !

pour cela on raisonne par l'absurde.

Avant de commencer ce raisonnement par l'absurde, faisons la remarque suivante :

Remarque 2.1

$\forall t, s \in [0, 1]$, *la fonction de Green*

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est inférieur ou égale a $\frac{1}{2}$, ie

$$\max_{0 \leq t,s \leq 1} G(t,s) \leq \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Démonstration : En effet

A. Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, alors $G(t,s) = t(1-s)$, on a deux cas

1. Si $s \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t \leq s \leq \frac{1}{2}$ (1)

   et Comme $1 \geq s \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-s \leq 1$ (2)

   de (1) et (2) on déduit que $t(1-s) \leq 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2. Si $s > \frac{1}{2} \Rightarrow -s < -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 1-s \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t(1-s) \leq 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B. Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, alors $G(t,s) = s(1-t)$ et avec un raisonnement analogue, on distingue deux cas :

1. Si $t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow s \leq t \leq \frac{1}{2}$ c'est a dire $s \leq \frac{1}{2}$ (3) et comme $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -t \geq -1 \Rightarrow 0 \leq 1-t \leq 1$ (4)

2. Si $t > \frac{1}{2} \Rightarrow -t < -\frac{1}{2} \Rightarrow 1-t < 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et on a $0 \leq s \leq 1$ donc on aura $s(1-t) < 1.\frac{1}{2}$ ∎

Commençant maintenant la preuve de théorème (2.1)

Démonstration : On a d'après la condition (2.2) du théorème (2.1) que

$$|f(t,U)| \leq p(t).|U| + r(t) \quad \text{pour presque tout} \quad (t,U) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

en particulier pour $U \equiv 0$ on a :

$$|f(t,0)| \leq r(t).$$

Or on a supposé que $f(t,0) \not\equiv 0$ donc

$$\begin{aligned} |f(t,0)| > 0 &\Rightarrow r(t) > 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 r(t)dt > 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

D'autre part ; comme on a supposé l'existence $t_0 \in [0,1]$ tel que $P(t_0) \neq 0$, alors on obtient que

$$\int_0^1 P(t)dt > 0$$

En effet :

Si on pose

$$f'(s) = P(s) \tag{2.7}$$

alors :

$$\int_0^1 P(s)ds = \int_0^1 f'(s)ds = f(1) - f(0)$$

Ainsi il vient d'après le théorème des valeurs intermédiaire qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que :

$$f(1) - f(0) = f'(t_0)(1-0) \tag{2.8}$$

où $f'(t_0) = P(t_0)$ d'après (2.7) et comme $P(t_0) \neq 0$ par hypothèse (2.8) devient :

$$f(1) - f(0) \neq 0$$

mais

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 P(s)ds$$

donc

$$\int_0^1 P(s)ds \neq 0$$

et comme $P(s)$ est une fonction non négative ($P(s) \geq 0$) on en déduit que

$$\int_0^1 P(s)ds > 0 \tag{2.9}$$

(2.9) et (2.10) impliquent que la quantité

$$m = \frac{\int_0^1 r(t)dt}{\int_0^1 P(s)ds} > 0.$$

Considérons maintenant l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{U \in \mathcal{C}([0,1]) : \|U\| < m\}$$

c'est la boule ouvert de centre "0" et de rayon m ; la fermeture de Ω(ou bien l'adhérence) qui est $\overline{\Omega}$

$$\Omega = \{U \in \mathcal{C}([0,1]) : \|U\| \leq m\}$$

la frontière de Ω

$$\partial\Omega = \{U \in \mathcal{C}([0,1]) : \|U\| = m\}.$$

Dans ce qui suite, nous démontrons que (i) n'est pas vérifié dans notre situation, c'est a dire si $U \in \partial\Omega$ tel que :

$$TU = \mu U$$

alors μ est nécessairement inférieur a 1

ce qui nous ramené a considéré (ii) c'est a dire l'existence du point fixe

Soit donc $U \in \partial\Omega$ tel que :

$$TU = \mu U \tag{2.10}$$

avec

$$\mu > 1 \tag{2.11}$$

alors

$$\|T(U)\| = \|\mu U\| = \mu\|U\| = \mu m$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|T(U)\| &= \max_{0\le t\le 1} |T(U(t)| \\ &= \max_{0\le t\le 1} \left|\lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,U(s))ds\right| \\ &= \max_{0\le t\le 1} \lambda \int_0^1 G(t,s)|f(s,U(s))|ds\end{aligned}$$

comme $G(t,s) \le \frac{1}{2}$ donc :

$$\|T(U)\| \le \frac{\lambda}{2}\int_0^1 |f(s,U(s))|ds$$

Or avec la condition (2.2) on trouve

$$\|T(U)\| \le \frac{\lambda}{2}\int_0^1 P(s)|U(s)|ds + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 r(s)ds$$

$$\|T(U)\| \le \max_{0\le t\le 1} |U(s)|.\frac{\lambda}{2}\int_0^1 P(s)ds + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 r(s)ds$$

donc

$$\|T(U)\| \le \|U\|.\frac{\lambda}{2}\int_0^1 P(s)ds + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 r(s)ds \tag{2.12}$$

En choisissant $\lambda^\star = \dfrac{1}{\displaystyle\int_0^1 P(s)ds}$, alors quand $0 < \lambda < \lambda^\star$, (2.12) devient

$$\|T(U)\| \le \|U\|.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_0^1 r(s)ds}{\displaystyle\int_0^1 P(s)ds} = m \tag{2.13}$$

Ainsi (2.10) et (2.13) nous donnent

$$\mu U = \|T(U)\| \le m \Rightarrow \mu \le 1 \;\; \text{contradiction avec (2.11)} \tag{2.14}$$

et par conséquent il vient d'après le théorème de Leray-Schauder que l'opérateur T admet un point fixe

$$U^* \in \overline{\Omega} \;\; \text{tel que} \;\; T(U^*) = U^*$$

puisque $f(t,0) \not\equiv 0$, on en déduit que le problème (2.1) admet une solution U^* non triviale $\forall 0 < \lambda \le \lambda^*$ avec $U^* \in \mathcal{C}([0,1])$ ∎

2.2 Unicité de solution

Dans ce qui suite on présente un résultat d'unicité c'est un corollaire du théorème (2.1).

Corollaire 2.1

supposons que $f(t,0) \neq 0$, et qu'il existe une fonction non négative $p \in L^1([0,1])$ $(p \geq 0)$ telle que :

$$|f(t,U_1) - f(t,U_2)| \leq p(t)|U_1 - U_2| \tag{2.15}$$

pour presque tout $t \in [0,1]$ et pour U_1, U_2 dans $\mathbb{R}$ et supposons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $p(t_0) \neq 0$.

Alors, il existe une constante $\lambda^* > 0$, telle que $\forall 0 < \lambda \leq \lambda^*$ le problème aux limite (2.1) possède une solution unique non nulle U^* dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

Démonstration : Sans perdre en généralité, on peut supposer que $U_2 \neq 0$, car si non c'est a dire si $U_2 = 0$ alors la condition (2.15) devient,

$$|f(t,U_1) - f(t,0)| \leq p(t)|U_1|$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
|f(t,U_1)| &= |f(t,U_1) - f(t,0) + f(t,0)| \\
&\leq |f(t,U_1) - f(t,0)| + |f(t,0)| \\
&\leq P(t)|U_1 - 0| + |f(t,0)| \\
&\leq P(t)|U_1| + |f(t,0)|
\end{aligned}$$

et cela implique l'existence solution d'après le théorème (2.1)

Si $U_2 \neq 0$, alors pour démontrer l'existence et l'unicité, il suffit de montre que l'application

$$T(U) := \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,U(s)) ds$$

est une contraction .

En effet :

$$\begin{aligned}
\|T(U_1) - T(U_2)\| &= \max_{[0,1]} \lambda \left| \int_0^1 G(t,s)(f(s,U_1(s)) - f(s,U_2(s)))ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda \int_0^1 |f(s,U_1(s)) - f(s,U_2(s))| \\
&\leq \frac{\lambda}{2} \int_0^1 (P(s)|U_1(s) - U_2(s)|)\, ds \\
&\leq \max_{[0,1]} |U_1(s) - U_2(s)|.\frac{\lambda}{2} \int_0^1 P(s)ds \\
&\leq \|U_1 - U_2\|.\frac{\lambda}{2} \int_0^1 P(s)ds
\end{aligned}$$

Donc, en choisissant $\lambda \leq \lambda^*$ où $\lambda^* = \left(\int_0^1 P(s)ds \right)^{-1}$, on obtient

$$\|T(U_1) - T(U_2)\| \leq \frac{1}{2}\|U_1 - U_2\|$$

ce qui prouve que T est en fait une contraction.

Donc, il vient d'après le théorème du point fixe de Banach que notre problème (2.1) admet une solution unique $U^* \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ■

2.3 Applications

Dans cette section on donne deux applications de notre résultat

2.3.1 Application 1

considérons le problème aux limite de deuxième ordre suivant :

$$(*) \begin{cases} y'' = \lambda \left(y.\dfrac{t\sin(t)}{1+t^2} + t(1+t) \right), 0 < t < 1 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème (2.1) , on a

$$\begin{aligned}
|f(t,y)| &= \left| y.\frac{t\sin(t)}{1+t^2} + t(1+t) \right| \\
&\leq \left| y.\frac{t\sin(t)}{1+t^2} \right| + t(1+t) \\
&\leq \frac{t}{1+t^2}|y| + t(1+t)
\end{aligned}$$

ainsi, on remarque que $P(t) := \dfrac{t}{1+t^2}$ donc :

$$\lambda^* = \left(\int_0^1 P(s)ds\right)^{-1} = \left(\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt\right)^{-1} = \left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt\right]^{-1}.$$

Or

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\log|1+t^2|\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}$$

d'où $\lambda^* = \dfrac{2}{\log 2}$ et par suite $\forall 0 < \lambda \leq \dfrac{2}{\log 2}$
le problème $(*)$ admet une solution non nulle $U^* \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

2.3.2 Applications 2

Une deuxième application est donnée par :

$$(P_2)\begin{cases} y'' = \lambda\left(y.e^t + \dfrac{1+t^2}{\log(2+t)}\right) & 0 < t < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Pour appliqué le théorème (2.1), il faut que notre problème (P_2) vérifié les conditions du théorème (2.1)

Si on pose : $f(t,y) = y.e^t + \dfrac{1+t^2}{\log(2+t)}$ alors :

$$\begin{aligned} |f(t,y)| &:= \left|y.e^t + \frac{1+t^2}{\log(2+t)}\right| \\ &\leq |y|.e^t + \frac{1+t^2}{\log(2+t)}; \quad t \in]0,1[\end{aligned}$$

Ainsi

$$p(t) = e^t \quad \text{et} \quad r(t) = \frac{1+t^2}{\log(2+t)}$$

Les deux fonctions e^t et $\dfrac{1+t^2}{\log(2+t)}$ sont non négative $\forall t \in [0,1]$.

Il existe $t_0 \in [0,1]$ $\left(t_0 = \dfrac{1}{2}\right)$ tel que $p(r_0) = e^{\frac{1}{2}} \neq 0$

$$f(t,0) = \frac{1+t^2}{\log(2+t)} \neq 0 \quad \forall t \in]0,1[$$

comme les conditions du théorème (2.1) sont vérifiées alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ $\left(\lambda^* = \dfrac{1}{\displaystyle\int_0^1 p(t)dt}\right)$

tel que $\forall \lambda \in]0,\lambda^*]$, le problème (p_2) admet une solution non trivial.

Le calcule λ^*

$$\lambda^* = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 p(t)dt} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 e^t dt} = \frac{1}{e^t]_0^1} = \frac{1}{e-1}.$$

Donc $\forall\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{e-1}\right]$, le problème p_2 admet une solution non trivial

Conclusion

Nous présentons dans ce mémoire une des applications du théorème d'Ascoli-Arzela dans la théorie des opérateurs. (c'est un outil efficace pour démontrer qu'un opérateur est complètement continu). Autre que ce théorème ; le théorème de Leray-Schauder représente aussi un résultat très important en analyse fonctionnelle et surtout lorsqu'on traite des problèmes aux limite ; dans ce mémoire on investisse ces théorèmes pour prouver l'existence d'une solution non triviale pour notre problème.

Bibliographie

[1] Y.S choi, A singular boundry valeue problem arising from near ignition analysis of flame structure, différential integral equations, (1991), 891-895.

[2] K.Demling, nonlinear functional analysis, s.pringer, Berlin, 1985.

[3] A.Shair, A.Ambrosetti, A textbook on ordinary differential equations, Springer 2014.

[4] H.Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson Paris 1983.

[5] L.Xin, Y.Guo, J.Zhao, Nontrivial solutions of second-order Nonlinear Boundary Value Problems, Applied Mathematics E-notes 19(2019), 668-674.