

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naâma
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Probabilités, Statistique et Application

Intitulé

Études de quelques propriétés des Variétés Riemanniennes

Présenté par :
LABED Fatna

Soutenu : 03 Juillet 2022

Devant le jury composé de :

Dr.MEKKI Slimane	MCB	C-Univ Naâma	Président
Dr.Latti Fethi	MCB	C-Univ Naâma	Examineur
Dr.SIDHOUMI Noura	MCA	ENP d' Oran M-A	Encadreur

Année universitaire 2021/2022

Dédicace

Je dédie ce travail :

*A ma chère mère et à mon cher père OMAR qui n'ont
jamais cessé de me supporter, me soutenir et
m'encourager durant mes années d'études, "je t'aime
papa" .*

*A mes frères Malika ,Abdelhak,Chérifa et Ayoub et
tout la famille LABED qui me donnent de l'amour et
de la vivacité.*

*A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux
qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors
de la réalisation de ce travail et qui m'ont
chaleureusement supporté et encouragé tout au long de
mon parcours.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui
je souhaite plus de succès.*

Merci !

Labed Fatna 

Remerciement

Je tiens à remercier en premier lieu et avant tout ALLAH le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir notre travail dans les meilleures conditions.

Je tiens également à remercier du coeur mon encadreur Mm.Sidhoumi Noura , et remerciement particuliers au professeur Mr.LATTI Fethi,qui m'encourager durant mes années d'études, son aide précieuse et ses conseils judicieuses.

Je voudrai également remercier les membres de jury Dr.Mekki Slimane, Dr. Latti.Fethi maitres de conférences au centre universitaire Salhi Ahmed de Naàma, qui m'ont fait l'honneur de juger ce modeste travail.

Table des matières

0.1	Introduction	6
1	Variétés Différentielles	8
1.1	Rappels de topologie	8
1.2	Notion de variété	9
1.3	Variétés Différentiables	10
1.4	Applications Différentiables	16
1.5	Rang d'une application	17
1.6	Espaces tangent	19
1.6.1	vecteur tangent	19
1.6.2	La Dérivation	21
1.6.3	Application tangente linéaire	23
1.6.4	Structures différentielles de TM et de T^*M	23
1.7	Champs de vecteurs	25
1.7.1	Fonction coordonnées du champ de vecteur.	26
1.8	Crochet de Lie	26
1.8.1	Coordonnées locales de crochet de Lie	27
1.9	Formes différentielles	28
1.10	Tenseurs	28
2	Variétés Riemanniennes	31

2.1	Métrie Riemannienne sur une variété différentiable	31
2.2	Variétés Riemanniennes	33
2.3	Connexion linéaire	33
2.4	Torsion de la variétés Différentiables :	35
2.4.1	Expression en coordonnées locale de T	35
2.5	Notion de la connexion Riemannienne	36
2.6	Les courbures	39
2.6.1	Tenseur de courbure	39
2.6.2	Expression en coordonnées locale de R	41
2.6.3	La 2 ^{ième} identité de Bianchi sur une variété Riemannienne	44
2.6.4	Expression en coordonnées locale de deuxième identité de Bianchi	45
2.6.5	Courbure de Ricci	46
2.6.6	Courbure scalaire	47
3	Opérateurs sur une variété Riemannienne	52
3.1	L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne	52
3.2	L'opérateur Divergence sur les champs de vecteur	53
3.2.1	La Hessienne d'une fonction	58
3.3	L'opérateur Laplacien sur une variété Riemannienne	58

Table des figures

1.1	(projection stéréographique)	15
1.2		20
1.3		21
1.4		23
2.1	la sphère S^2	49

0.1 Introduction

En mathématique, la géométrie différentielle est l'application des outils du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. Les objets d'étude de base sont les variétés différentielles, ensembles ayant une régularité suffisante pour envisager la notion de dérivation, et les fonctions définies sur ces variétés. La géométrie différentielle trouve sa principale application physique dans la théorie de la relativité générale où elle permet une modélisation d'une courbure de l'espace-temps.

En mathématiques, les variétés différentiables sont les objets de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Il s'agit de variétés sur les quelles il est possible d'effectuer les opérations du calcul différentiel et intégral.

Une variété différentiable de dimension n se définit d'abord par la donnée d'une variété topologique, espace topologique localement homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$. Les homéomorphismes locaux sont appelés cartes et définissent des systèmes de coordonnées locales. La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable.

La géométrie Riemannienne est une branche de la géométrie différentielle nommée en l'honneur du mathématicien Bernhard Riemann, qui a introduit le concept fondateur de variété géométrique. Elle étend les méthodes de la géométrie analytique en utilisant des coordonnées locales pour effectuer l'étude d'espaces courbes sur lesquels existent des notions d'angle et de longueur.

Plus généralement, la géométrie Riemannienne a pour but l'étude locale et globale des variétés Riemanniennes. En mathématiques, et plus précisément en géométrie, une variété Riemannienne est une variété différentiable ayant une structure supplémentaire (une métrique

Riemannienne) permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété c'est-à-dire les variétés différentiables munies d'une métrique Riemannienne.

Le travail présenté ici est consacré à l'étude de quelques propriétés des Variétés riemanniennes et qui est réparti comme suit

Dans le premier chapitre, on rappelle la notion de variétés différentiable qui est par définition un espace topologique séparé M muni d'une structure différentiable, c'est la donnée d'un atlas sur M , ie : il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M et des homéomorphismes de transitions $\{\phi_i\}_{i \in I}$ définis de U_i dans $\phi_i(U_i)$ ouverts de $\mathbb{R}^n$, telle que l'application $\phi_j \circ \phi_i : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ soit un C^k -difféomorphisme.

Ensuite, dans la deuxième chapitre, on donne des définitions et des propriétés de base des variétés Riemanniennes

Le troisième chapitre consiste à définir quelques opérateurs sur les variétés riemanniennes à savoir l'opérateur gradient, l'opérateur de divergence et l'opérateur de Laplace.

Variétés Différentielles

1.1 Rappels de topologie

Définition 1.1.1 *Un espace topologique est un ensemble M muni d'une famille de sous-ensembles de M , appelés ouverts, telle que :*

1. $\emptyset$ et M sont des ouverts.
2. l'intersection $\bigcap_n U_n$ d'un nombre fini d'ouverts est un ensemble ouvert.
3. l'union $\bigcup_n U_n$ d'ouverts est un ensemble ouvert.

Topologie de M est la famille d'ensembles choisis comme ouverts.

un ensemble est fermé si son complément est ouvert.

Remarque 1.1.1 .

$\emptyset$ et M sont des ouverts et fermés au même temps .

M est séparé, si pour tous les points distincts α et β de M il existe des voisinages U_α et U_β qui ne s'intersectent pas, i.e. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

1.2 Notion de variété

Définition 1.2.1 (homéomorphisme)

Soit $\mu : M \rightarrow N$ une application entre deux espaces topologiques, on dit que μ est continue si pour tout ouvert $V \subset N$ l'image réciproque $\mu^{-1}(V) \subset M$ est un ouvert. l'application continue $\mu : M \rightarrow N$ est un **homéomorphisme** si elle est inversible et $\mu^{-1} : N \rightarrow M$ est continue.

Définition 1.2.2 (la carte) Une carte de dimension n sur M est un couple (U, μ) vérifier les conditions suivantes :

1. Un ouvert $U \subset M$;
2. Un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$

L'ensemble ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$: φ est appelée la fonction coordonnées.

Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Définition 1.2.3 Soit les deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M on dit qu'elles sont compatibles si l'intersection de U et V égale $\emptyset$ ou si $\varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme entre les ouverts de $\mathbb{R}^n$ s'appelle application de transition.

Définition 1.2.4 (Atlas)

La famille de carte $A = (U_i, \mu_i)_{i \in I}$ de dimension n de M est différentiable de dimension n est un atlas différentiable de dimension n si elle vérifiées les trois conditions suivantes :

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
2. $\forall i \in I (U_i, \varphi_i)$ est une carte de dimension n .
3. $\forall i, j \in I (U_i, \varphi_i)$ et (U_j, φ_j) sont compatibles.

Remarque 1.2.1 1. On dit q'un atlas est de classe C^k si tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe C^k .

2. Deux atlas A et A' sont dit C^k -compatibe si leurs union est un atlas de classe C^k .
3. Deux atlas A et A' sont dit équivalents si ils sont compatible.

Proposition 1.2.1 (Atlas maximal)

Si M est un espace topologique séparé, et A un atlas sur M alors il existe un unique atlas maximale $A_{\max}$ contenant A sur M définit par

$$A_{\max} = \{(U, \varphi) \text{ carte sur } M \text{ compatible avec } A\}.$$

1.3 Variétés Différentiables

Définition 1.3.1 (Variétés)

Une variété différentiable de n dimension est un espace topologique séparé M muni d'un atlas différentiable A de dimension n , notons par le couple (M, A) . on note dans le cas général :

1. $\text{atl}(M) = A_{\max}$ l'atlas maximal de M .
2. $\text{atl}(M, x) = \{(U, \varphi) \in A_{\max}, x \in U\}$.

Exemples 1.3.1 .

1. $\mathbb{R}^p$ est une variété de dimension p munie de l'atlas $A = (\mathbb{R}^p, Id_{\mathbb{R}^p})$
2. Tout espace vectoriel de dimension p est une variété de dimension p muni de l'atlas $A = \{(E, I)\}$ telque :

$$I^{-1} : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longrightarrow \sum_{i=1}^p x_i e_i$$

où $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E

3. La sphère $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ est une variété de dimension 1 munie des projections suivantes :

$$\varphi_y^+ : U_y^+ = \{(x, y) \in S^1; y > 0\} \rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$(\varphi_y^+)^{-1} :]-1, 1[\rightarrow U_y^+$$

$$x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$$

$$\varphi_y^- : U_y^- = \{(x, y) \in S^1; y < 0\} \rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$(\varphi_y^-)^{-1} :]-1, 1[\rightarrow U_y^-$$

$$x \mapsto (x, -\sqrt{1 - x^2})$$

$$\varphi_x^+ : U_x^+ = \{(x, y) \in S^1; x > 0\} \rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto y$$

$$(\varphi_x^+)^{-1} :]-1, 1[\rightarrow U_x^+$$

$$y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y)$$

$$\varphi_x^- : U_x^- = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} \rightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto y$$

$$(\varphi_x^-)^{-1} :]-1, 1[\rightarrow U_x^-$$

$$y \mapsto (-\sqrt{1-y^2}, y)$$

On a :

$$a) S^1 = U_y^+ \cup U_y^- \cup U_x^+ \cup U_x^-$$

$$b) U_y^+ \cap U_y^- \neq \emptyset, \quad U_x^+ \cap U_x^- \neq \emptyset$$

c)

$$\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$$

$$z \mapsto \sqrt{1-z^2}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ .

on montre que $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$, $\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}$ et $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ sont des difféomorphismes

de classe C^∞ . Donc S^1 est une variété de dimension 1 munie de l'atlas : $A =$

$$\{(U_y^+, \varphi_y^+), (U_y^-, \varphi_y^-), (U_x^+, \varphi_x^+), (U_x^-, \varphi_x^-)\}$$

4. Soit l'application $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ , Alors le graphe

$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in I\}$ est une variété de dimension 1 munie de l'atlas $U =$

$\{(\Gamma, \varphi)\}$ où

$$\varphi : (x, y) \in \Gamma \rightarrow \varphi(x, y) = x \in I$$

Définition 1.3.2 Une structure différentiable de n dimension sur M est une classe d'équivalence d'atlas de dimension n de M

Exemple 1.3.1 le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1; mais ce n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (Car S^1 est compact). Une carte ne suffit pas pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) ;

$$U_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$$

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow]0, 2\pi[$$

$$(\cos \theta, \sin \theta) \longmapsto \theta$$

$$U_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow]-\pi, \pi[$$

$$(\cos \theta, \sin \theta) \longmapsto \theta$$

Le cercle recouvert par les domaines de ces cartes : $U_1 \cup U_2 = S^1$. plus $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, et montrant que les deux cartes sont compatibles. Alors $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas définit une structure différentiable sur S^1 .

Exemple 1.3.2 (Projection stéréographique).

Soient $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ et $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ tels que $U_1 = S^1 - \{(0, 1)\}$, $U_2 = S^1 - \{(0, -1)\}$,

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1 - y}$$

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow U_1$$

$$z \mapsto \left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{z^2 - 1}{1 + z^2} \right).$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1 + y}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

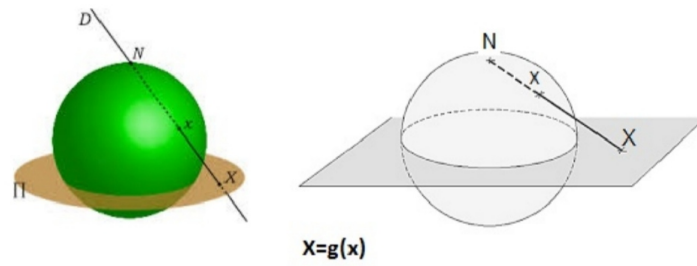


FIGURE 1.1 – (projection stéréographique)

Exemple 1.3.3 (Projection stéréographique de S^n) Dans le cas général

soient $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ et $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$

tels que $U_1 = S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$, $U_2 = S^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right)$$

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2} \right)$$

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1 - x_n^2}{(1 - x_n)^2} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n}.$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{1 + x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 + x_n} \right)$$

$$\varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_2$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right)$$

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1 - x_n^2}{(1 + x_n)^2} = \frac{1 - x_n}{1 + x_n}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}_*^n \rightarrow \mathbb{R}_*^n$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{y_1}{\|y\|^2}, \dots, \frac{y_n}{\|y\|^2} \right)$$

1.4 Applications Différentiables

Définition 1.4.1 Soient les deux variétés $((N^n, \text{atl}(N)), (M^m, \text{atl}(M)))$ de dimension n et m respectivement, Une application $f : M \rightarrow N$ est dite différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) si pour tout $x \in M$, s'il existe une carte locale $(U, \varphi) \in \text{atl}(M, x)$ autour de x , de classe $\mathcal{C}^k$, et une carte locale $(V, \psi) \in \text{atl}(N, f(x))$, de classe $\mathcal{C}^k$, telles que $F(U) \subset V$ et $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ soit de classe $\mathcal{C}^k$.

Alors, pour définir la dérivabilité d'une telle application, il est obligé de comparer à la fois à gauche et à droite par les homéomorphismes définissant les cartes locales.

Remarque 1.4.1 Si $f : M \rightarrow N$ est une application différentiable; Alors pour tout $x \in M$, il existe une carte $(V, \psi) \in \text{atl}(N, f(x))$ et $(W, \varphi) \in \text{atl}(M, x)$ tels que :

1. $f(W) \subset V$.
2. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \psi(V)$ est différentiable.

Conséquence 1.4.1 Une application $f : (M, \text{atl}(M)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ (resp $\mathcal{C}^\infty$) si et seulement si pour toute carte $(U, \varphi) \in \text{atl}(M)$ la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ (resp $\mathcal{C}^\infty$).

Notation 1.4.1 .

- $\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty\}$.

Exemple 1.4.1 Toute fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable entre les variétés $(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n}))$ et $(\mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m}))$.

Définition 1.4.2 On dit que l'application $F : M \rightarrow N$ est difféomorphisme de M sur N si :

1. F est une bijection.
2. F et F^{-1} sont différentiables.

Alors on a $\dim M = \dim N$.

On note le couple (U, φ) , tels que U un ouvert de M , (U, φ) est une carte de la variété si et seulement si φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

1.5 Rang d'une application

Rappel :

Soit l'application dérivable en point $x \in \mathbb{R}^n$ définit par : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

le rang de f en x est défini comme le rang de l'application linéaire $Df(x)$.

Soient $F : M \rightarrow N$ une application différentiable et $p \in M$.

Proposition 1.5.1 Le rang de $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$ ne dépend pas des cartes (V, ψ) de N et (U, φ) de M telles que $p \in U$ et $F(p) \in V$. appelée le rang de F en p noté par $rg_p F$.

Preuve. Soient (U', φ') et (V', ψ') d'autres cartes. Sur l'intersection des domaines :

$$\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})$$

et donc

$$D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(x) = D(\psi' \circ \psi^{-1}) \circ D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(x)$$

Comme $D(\psi' \circ \psi^{-1})$ et $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})$ sont des isomorphismes, alors on obtient

$$rg D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(p)) = rg D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Lire le coordonnées locales, l'application F devient :

$$F^{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^m) = (F^1(x^1, \dots, x^m), \dots, F^n(x^1, \dots, x^m))$$

et le rang de F en p est correspond à la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{x(p)}$$

Le rang permet de caractériser les difféomorphismes. ■

Définition 1.5.1 Une application $F : M \longrightarrow N$ est une immersion si F est différentiable et $rg F = \dim M$ en tout point de M . alors $\dim M \leq \dim N$.

Définition 1.5.2 On dit que l'application $F : M \longrightarrow N$ est une submersion si F est différentiable et $rg F = \dim N$ en tout point de M , Dans ce cas on a alors : $\dim M \geq \dim N$.

Remarque 1.5.1 Une immersion n'est pas nécessairement injective.

1.6 Espaces tangent

Définition 1.6.1 (*Courbes Paramétrées sur une Variété*)

Soit une application $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow M$ de domaine $I \subset \mathbb{R}$ est une courbe paramétrée sur M .

Dans une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ son expression locale est la courbe :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}^1(t), \dots, \tilde{\gamma}^m(t)) = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^m(\gamma(t)))\end{aligned}$$

La courbe Υ est régulière en $t \in I$ ($x = \Upsilon(t) \in M$), si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que U contient le point P , son expression locale $\tilde{\Upsilon} = \varphi \circ \Upsilon$ est une courbe régulière en t , signifié comme suite :

$$\dot{\tilde{\Upsilon}}(t) = \frac{d\tilde{\Upsilon}}{dt}(t) \neq \vec{0}$$

.

Remarque 1.6.1 Si Υ est une courbe régulière en x , on peut toujours changer sa paramétrisation pour avoir $\Upsilon(0) = x$. Localement, autour de x , nous pouvons choisir une carte φ telle que $\varphi(x) = (0, \dots, 0) \equiv \vec{0} \in \mathbb{R}^m$. donc on avoir une courbe locale $\tilde{\Upsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ régulière en $\tilde{\Upsilon}(0) = \vec{0}$.

1.6.1 vecteur tangent

Considérons une variété différentiable M et un point x de M . On s'intéresse aux courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par x .

$$\begin{aligned}\Upsilon :]-\epsilon, \epsilon[&\longrightarrow M \quad \text{avec } \Upsilon(0) = x \\ t &\longmapsto \Upsilon(t)\end{aligned}$$

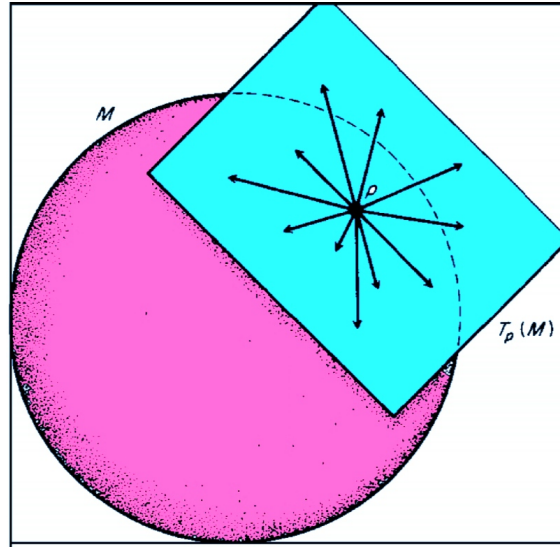


FIGURE 1.2

Définition 1.6.2 Deux courbes Υ_1 et Υ_2 sont tangente au point x s'il existe une carte locale (U, φ) telle que $x \in U$ et

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \Upsilon_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \Upsilon_2)(0)$$

La définition ne dépend pas de la carte choisie.

En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de x , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \Upsilon_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \Upsilon_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \Upsilon_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \Upsilon_2)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \Upsilon_2)(0) \end{aligned}$$

Ainsi, on considère une relation d'équivalence¹ sur l'ensemble des courbes passant par x : $\Upsilon_1 \sim \Upsilon_2$ si elles sont tangentes en x . Cela signifie que cette relation définit deux courbes Υ_1 et Υ_2 comme équivalentes si elles ont même vecteur tangent en 0 dans $\times$ sur n'importe quelle carte locale.

1. relation d'équivalence est une relation transitive, symétrique et réflexive

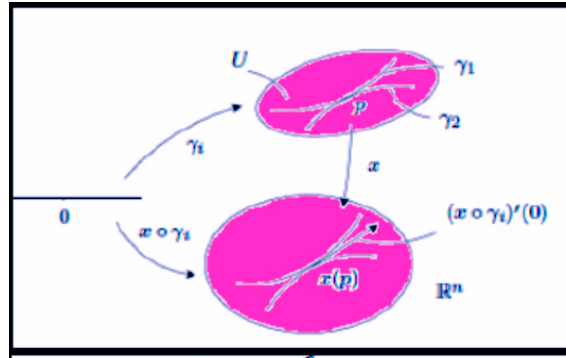


FIGURE 1.3

1.6.2 La Dérivation

Définition 1.6.3 On appelle la dérivation en x est l'application linéaire $D_x : C_x^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz.

une autre définition, D_x est une dérivation si, pour tous réels α et β , et toutes fonctions $\tilde{f}, \tilde{g}$ dans $C_x^1(M)$,

1. $D_x \cdot (\alpha f + \beta g) = \alpha D_x \cdot f + \beta D_x \cdot g$ (linéarité)

2. $D_x \cdot (f \cdot g) = g(x) D_x \cdot f + f(x) D_x \cdot g$ (Leibniz)

Exemple 1.6.1 $M = \mathbb{R}^n$. Si $\Upsilon = (\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe lisse et $\Upsilon'(t) = (\Upsilon'_1(t), \dots, \Upsilon'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ est la dérivée de Υ au point p , alors

$$\dot{\Upsilon}_t f = (f \circ \Upsilon)'(t) = f'(p) \Upsilon'(t) = \Upsilon'(t) \cdot \nabla f(p).$$

généralement, l'application $\dot{\Upsilon}_t$ satisfait à

$$1/\dot{\Upsilon}_t(af + bg) = a\dot{\Upsilon}_t f + b\dot{\Upsilon}_t g$$

$$2/\dot{\Upsilon}_t(fg) = g(p)\dot{\Upsilon}_t f + f(p)\dot{\Upsilon}_t g$$

Pour tout $f, g \in C^\infty(p)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. $\dot{\Upsilon}_t$ est une dérivation.

Définition 1.6.4 *l'espace tangent en x à M , $T_x M$, est l'espace vectoriel des dérivations sur $C_x^1(M)$.*

Définition 1.6.5 *Un vecteur tangent à M en x est une classe d'équivalence de courbe tangentes en x .*

On note l'espace tangent à M en x par $T_x M$, qui est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x . défini par :

$T_x M = \{[\Upsilon] \text{ classe d'équivalence : } \Upsilon \in C(M, \Upsilon), \text{ avec } \Upsilon(0) = x\} = C(M, \Upsilon)/_R$
l'espace quotient.

Définition 1.6.6 (Fibré tangent)

Un fibré tangent à M , noté par TM , est la réunion de tous les espaces tangents $T_x M$

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

On peut identifier chaque élément de TM à un couple (x, X_x) , où $x \in M$ et $X_x \in T_x M$.

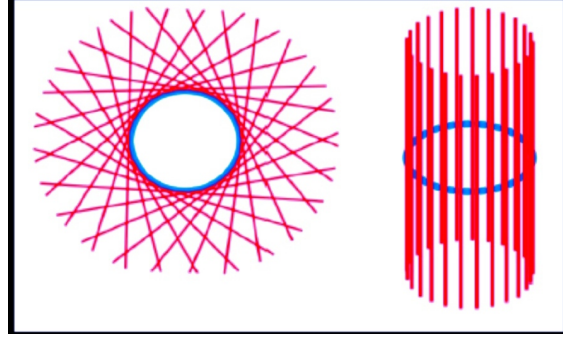


FIGURE 1.4

Définition 1.6.7 (Fibré cotangent)

On définit le fibré cotangent par :

$$\bullet T^*M = \cup_{x \in M} T_x^*M \text{ à } M.$$

1.6.3 Application tangente linéaire

Définition 1.6.8 Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, M et N deux variété différentiable l'application tangente linéaire de f en $x \in M$ est

$$\begin{aligned} df : T_x M &\longrightarrow T_{f(x)} N \\ x &\longmapsto df(x) = \frac{d}{dt}(f \circ \Upsilon)(0) \end{aligned}$$

ou Υ est une courbe passant par x et $\Upsilon'(0) = x$

1.6.4 Structures différentielles de TM et de T^*M

Soient $(M, \mathfrak{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I})$ une variété différentiable de dimension n et de classe C^k avec $k \geq 1$. Soit TM le fibré tangent à M . $\forall (U_i, \varphi_i) \in \mathfrak{A}$, on pose

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= \pi^{-1}(U_i) = \{(x, X_x) \in TM \mid \pi(x, X_x) = x \in U_i\} \\ \text{et, soit } \tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n, \text{ définie par :} \\ \tilde{\varphi}_i(x, X_x) &= (\varphi_i(x), d(\varphi_i)_x(X_x)), \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On vérifie que $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ est un atlas de classe C^{k-1} . Alors, on a :

1. les applications $\tilde{\varphi}_i$ sont des bijections, la bijection réciproque de $\tilde{\varphi}_i$ est :

$$\tilde{\varphi}_i^{-1}(y, v) = (\varphi_i^{-1}(y), [d(\varphi_i)_x]^{-1}(v))$$

$$2. \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i = TM$$

$$3. (\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})(y, v) = ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_y v) \text{ donc on a bien que la famille } (\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$$

est un atlas de classe C^{k-1} qui donne au fibré tangent TM une structure de variété différentiable de dimension $2n$ et de classe C^{k-1} . On pose

$$g_{ij}(x) = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_{\varphi_j(x)},$$

nous vérifions les relations suivantes :

1. $g_{ii} = id_{\mathbb{R}^n}$.
2. g_{ij} est une application différentiable de classe C^k de $U_i \cap U_j$ à valeurs dans le groupe linéaire $Gl(n, \mathbb{R})$.
3. $g_{ij}(x)g_{jl}(x) = g_{il}(x)$ pour tous $i, j, l \in I$ et $x \in U_i \cap U_j \cap U_l$.

Alors, les applications g_{ij} définissent un cocycle différentiable sur M à valeurs dans le groupe linéaire $Gl(n, \mathbb{R})$ subordonné au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$.

On définit la structure canonique de variété différentiable sur le fibré cotangent de même manière

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M = \{(x, \omega_x) \mid x \in M \text{ et } \omega_x \in T_x^*M\}$$

nous désignons par $\pi : T^*M \longrightarrow M$ la projection canonique :

$$\pi(x, \omega_x) = x$$

$\forall (U_i, \varphi_i) \in \mathfrak{A}$, notons par $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ et par $\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$, l'application définie par :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_i(x, \omega_x) &= (\varphi_i(x), (\varphi_i^{-1})^*(\omega_x)) \\ \text{or } (\varphi_i^{-1})^*(\omega_x) &= \omega_x \circ d(\varphi_i^{-1}) \varphi_i(x) = \omega_x \circ [d\varphi_i(x)]^{-1} : \\ T_{\varphi_i(x)}^* \mathbb{R}^n &\xleftarrow{(\varphi_i^{-1})^*} T_x^* M,\end{aligned}$$

donc on note $\varphi_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}), \omega_x = a_1 dx_{i1}(x) + \dots + a_n dx_{in}(x)$ on a pour tout $j(j = 1, \dots, n)$:

$$\langle e_j, (\varphi_i^{-1})^*(\omega_x) \rangle = \langle d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(e_j), \omega_x \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right), \omega_x \right\rangle = a_j$$

Donc :

$$\tilde{\varphi}_i(x, a_1 dx_{i1}(x) + \dots + a_n dx_{in}(x)) = (\varphi_i(x), a_1, \dots, a_n).$$

Ainsi nous vérifions que la famille $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ définit un atlas de classe C^{k-1} qui donne au fibré tangent TM une structure de variété différentiable de dimension $2n$ et de classe C^{k-1} .

1.7 Champs de vecteurs

Considérons une variété de M de dimension m .

Définition 1.7.1 Soit l'application différentiable $X : M \rightarrow TM$ Un champ de vecteurs différentiable sur M à un point $x \in M$, associe un couple formé de x et d'un vecteur tangent à M en $x : X(x) = (x, X_x)$. En d'autres termes, $\pi \circ X = id_M$.

On note l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M par $\Gamma(TM)$.

un vecteur tangent en x définit une dérivation sur l'ensemble des germes $C^\infty(x)$.

un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions de M dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ , En effet :

$$\begin{aligned}C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ g &\longmapsto X \cdot g, t.q. X \cdot g(x) = X_x \cdot g\end{aligned}$$

définie par un champ de vecteurs X est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble $\Gamma(TM)$ s'identifie donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur $C^\infty(M)$.

Remarque 1.7.1 La base de $T_x M$ est donné par : $\left\{ \frac{\partial}{\partial p^i}(x) \right\}_{1 \leq i \leq n}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées au voisinage de x

$$\forall x \in M, X_x \in T_x M \Rightarrow X_x = \sum_{i=1}^n X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \stackrel{\text{convention}}{=} X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \dim T_x M = \dim M = n$$

$$X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Avec :

$$x \mapsto X_x^i$$

1.7.1 Fonction coordonnées du champ de vecteur.

la base de $T_x^* M$ $\{dx_i\}_{i=1, \dots, n}$: est un espace Dual de $T_x M$.

$T_x^* M$: est appelé un espace cotangent à M au point x .

$$T_x^* M = \{ \text{forme linéaire sur } T_x M \}.$$

$T_x M$ et $T_x^* M$: $\mathbb{R}$ -espace vectoriel telque $\dim T_x^* M = \dim T_x M$.

Définition 1.7.2 Soient X un champ de vecteurs sur M et $F : M \longrightarrow N$ une application difféomorphisme .Alors le transport de X par F , noté $F_* X$, est le champ de vecteurs sur N défini par :

$$F_* X = dF(X) \circ F^{-1} \text{ ou } F_* X(q) = dF_{F^{-1}(q)} (X (F^{-1}(q)))$$

1.8 Crochet de Lie

Dans cette section on définit quelque notions sur les champs de vecteurs appelé le crochet de Lie qui sera utilisé dans les sections suivantes du deuxième chapitre pour définir les concepts de torsion et courbure d'une connexion linéaire.

Définition 1.8.1 soit l'application $[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ définit le crochet de Lie telque :

$$[X, Y]_x f = X_x(Yf) - Y_x(Xf), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), x \in M$$

Les champs de vecteurs X et Y commutent si $[X, Y] = 0$.

Le crochet de Lie mesure la non commutativité entre les champs de vecteurs.

1.8.1 Coordonnées locales de crochet de Lie

En coordonnées locales, le crochet de Lie prend la forme :

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Propriété 1.8.1 1. $\mathbb{R}$ -linéaire : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \\ [Z, aX + bY] &= \alpha[Z, X] + \beta[Z, Y] \end{aligned}$$

2. Antisymétrie :

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. La somme cyclique est nulle (identité de Jacobi) :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Le crochet de Lie n'est pas $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire, Car $[fX, gY] \neq fg[X, Y]$.

Nous avons

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X_g)Y - g(Y_f)X, \quad \forall g, f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Exemple 1.8.1 Considérons sur $\mathbb{R}^2$ les champs de vecteurs $X = \partial_1, Y = x^1 \partial_2$, appelé les champs de vecteurs Grushin. Alors $[X, Y] = \partial_2 \neq 0$, et donc X et Y ne commutent pas.

1.9 Formes différentielles

On définit le différentiel d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ en tout point x par

$$(df)_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(df)_x(v) = v(f) \quad \forall v \in T_x M.$$

En coordonnées locales $(x^1, \dots, x^m)$ prend la forme $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, où $\{dx^i\}$ la base duale de $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ de $T_x M$, on écrit :

$$dx^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. L'espace engendré par $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ appelé l'espace cotangent de M en x , notée $T_x^* M$. Les éléments de $T_x^* M$ appelés covecteurs. Le différentiel df est un exemple de 1-forme. En général, une forme différentielle ω sur une variété M est une application qui assigne à chaque point $x \in M$ un élément $\omega_x \in T_x^* M$. une 1-forme a une coordonnées locales comme :

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$$

où $\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ est le i éme coordonnée de la forme par rapport à la base $\{dx^i\}$ L'ensemble des 1-formes sur la variété M notée : $\Gamma(T^* M)$.

1.10 Tenseurs

Soient $T_x M$ l'espace tangent et $T_x^* M$ l'espace cotangent de M au point x . Nous utilisons les notations suivantes :

$$(T_x^* M)^r = \underbrace{T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{s \text{ fois}}, \quad (T_x M)^s = \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{r \text{ fois}}.$$

Définition 1.10.1 On appelle la fonction $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinéaire

$$T : (T_x M)^r \times (T_x^* M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

Un tenseur de type (r, s) en un point $x \in M$.

Définition 1.10.2 Un champ de tenseur $\mathcal{T}$ de type (r, s) est une application différentiable, qui à tout point $x \in M$ associé un tenseur de type (r, s) $\mathcal{T}_x$ sur M au point x .

Comme $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \right\}_{i_1 < \dots < i_s}$ et $\{dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_r}\}_{j_1 < \dots < j_r}$ sont des bases des espaces vectoriels $(T_x M)^r$ et $(T_x^* M)^s$, relativement, le champ de tenseur $\mathcal{T}$ écrit à l'aide des coordonnées locales

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{i_1 i_2 \dots i_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

où " $\otimes$ " le produit tensoriel . Cela signifie que $\mathcal{T}$ agit sur les r champs vecteurs et les s 1-formes

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= \mathcal{T}_{i_1 i_2 \dots i_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(\omega^1) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(\omega^r) \otimes dx^{j_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}(X_s) \\ &= \mathcal{T}_{i_1 \dots i_s}^{i_1 \dots i_r} X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r. \end{aligned}$$

Le tenseur $\mathcal{T}$ est r covariant et s contra-variant. on intéressé par les exemples particuliers de tenseurs suivants :

1. Tout 1-forme ω est un champ de tenseur de type $(0, 1)$. pour tout champ de vecteur X

$$\omega(X) = \omega_i dx^i(X) = \omega_i dx^i \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i X^i$$

En particulier, la différentielle, df , est champ de tenseur de type $(0, 1)$;

2. Tout champ de vecteurs X est un champ de tenseur de type $(1, 0)$ sur M , avec $X(\omega) = \omega(X) = \omega_i X^i, \quad \forall \omega$;

3. Une s - forme différentielle est un champ de tenseur antisymétrique de type $(0, s)$. En particulier, une 2-forme est un champ de tenseur Ω 2-covariant dans les coordonnées satisfait :

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$$

après la démonstration que $\mathcal{T}$ est un champ de tenseur, en pratique, nous vérifions la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéarité pour chaque controverse. Par exemple, si, $\mathcal{T}$ est 2-covariant, ainsi on montre que $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est de champs de vecteurs X_1, X_2, Y_1, Y_2

nous avons :

$$\mathcal{T}(f_1 X_1, f_2 X_2) = f_1 f_2 \mathcal{T}(X_1, X_2)$$

$$\mathcal{T}(X_1 + Y_1, X_2) = \mathcal{T}(X_1, X_2) + \mathcal{T}(Y_1, X_2)$$

$$\mathcal{T}(X_1, X_2 + Y_2) = \mathcal{T}(X_1, X_2) + \mathcal{T}(X_1, Y_2)$$

Si le champ de tenseur $\mathcal{T}(X, Y) = \mathcal{T}(Y, X)$ est symétrique, il est obligé de montrer les relations antérieures que dans le première controverse. Si nous avons montrer qu'un champ de tenseur, ou une expression tensorielle nulle, alors. il suffit de montrer qu'il est nulle dans un système de coordonnées.

Variétés Riemanniennes

2.1 Métrique Riemannienne sur une variété différentiable

Définition 2.1.1 Une métrique Riemannienne g sur une variété différentiable M est une application

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

, de champ de tenseur de type $(0, 2)$, telque

1. g est $C^\infty(M)$ -bilinéaire.
2. g est définie positive : $g(U, U) \geq 0, \forall U \in \Gamma(TM)$.
3. g application symétrique : $g(U, V) = g(V, U) \forall U, V \in \Gamma(TM)$.
4. g non dégénérée : $g(U, V) = 0, \text{ pour tout } V \in \Gamma(TM) \Rightarrow U = 0_{\Gamma(TM)}$.

Remarque 2.1.1 Soit une carte $(U, \varphi) \in A$, $(U, x_1, x_2, \dots, x_n)$ système de coordonnées de X et $\left(U, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$. Le repère de l'espace tangent et dx_i la base de l'espace dual.

1. on note $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. la matrice associée à g , comme g est symétrique :

$$g_{ij} = g_{ji} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

2. g est définie positive i.e $\det(g_{ij}) > 0$.
3. g est non dégénérée i.e $\det(g_{ij}) \neq 0$.

Exemple 2.1.1 Sur $M = \mathbb{R}^3$, on pose $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. La matrice associée à g est : $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- g est bilinéaire. car : soient $U_1, U_2, V_1, V_2 \in \Gamma(TM)$, et $f, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
 g(fU_1 + hU_2, V) &= (dx)^2(fU_1 + hU_2, V) + (dy)^2(fU_1 + hU_2, V) + (dz)^2(fU_1 + hU_2, V) \\
 &= dx(fU_1 + hU_2) dx(V) + dy(fU_1 + hU_2) dy(V) + dz(fU_1 + hU_2) dz(V) \\
 &= f dx(U_1) dx(V) + h dx(U_2) dx(V) + f dy(U_1) dy(V) \\
 &\quad + h dy(U_2) dy(V) + f dz(U_1) dz(V) + h dz(U_2) dz(V) \\
 &= fg(U_1, V) + hg(U_2, V) = g(U, fV_1 + hV_2) \\
 &= (dx)^2(U, fV_1 + hV_2) + (dy)^2(U, fV_1 + hV_2) + (dz)^2(U, fV_1 + hV_2) \\
 &= fg(U, V_1) + hg(U, V_2)
 \end{aligned}$$

2- $\det(g_{ij}) = 1 \neq 0$ alors g est non dégénérée.

3- $g_{12} = g_{21} = 0$ et $g_{13} = g_{31} = 0$ et $g_{23} = g_{32} = 0$ alors g est symétrique.

4- $\det(g_{ij}) = 1 > 0$ alors g est définie positive.

Donc g est une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.1.2 Soit $g = \alpha^2(dx)^2 + \alpha(dy)^2 + (dz)^2$. est-elle métrique riemannienne.

La matrice associée à g est $g_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. g est bilinéaire.

2. g est non dégénérée.

3. g est symétrique.

4. $\det(g_{ij}) = \alpha^3 > 0$ si $\alpha > 0$ donc g est définie positive si $\alpha > 0$.

Alors g est une métrique Riemannienne si et seulement si $\alpha > 0$.

2.2 Variétés Riemanniennes

Définition 2.2.1 Soit M une variété différentiable et g une métrique Riemannienne, Une variété Riemannienne est le couple (M, g) .

Exemple 2.2.1 $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique $g = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ est une variété Riemannienne.

2.3 Connexion linéaire

Définition 2.3.1 Une connexion linéaire sur M est une application

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (U, V) &\rightarrow \nabla_U V\end{aligned}$$

telle que, pour tout $U, V, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

1. $\nabla_{fU} V = f \nabla_U V$.
2. $\nabla_U (V + Z) = \nabla_U V + \nabla_U Z$.
3. $\nabla_{U+V} (Z) = \nabla_U Z + \nabla_V Z$.
4. $\nabla_U (fV) = U(f)V + f \nabla_U V$.

Remarque 2.3.1 Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété différentiable M . Dans un système de coordonnées (x^i) sur M , ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

En effet, si

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

alors :

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$\nabla_U(V)$ est appelée dérivation du champ de vecteur V dans la direction du vecteur tangent U .

Définition 2.3.2 Soient (N^n, h) une variété Riemannienne, de dimension n , M^m une variété différentiable, de dimension m , et $f : M \longrightarrow N$ une immersion. Alors :

$$f^*h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$ par :

$$f^*h(U, V)_x = h_{f(x)}(d_x f(U_x), d_x f(V_x))$$

est une métrique sur M , appelée métrique inverse.

Remarque 2.3.2 Soient (U, φ) une carte de M de base associée $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ et (V, ψ) une carte de N de base associée $(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$, alors :

$$(f^*h)_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} (h_{\alpha\beta} \circ f).$$

Où $f^\alpha = y^\alpha \circ \varphi$ et $h_{\alpha\beta} = h(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta})$.

Proposition 2.3.1 Soit g une métrique Riemannienne sur une variété différentiable M . L'application

$$\sharp : \Gamma(T^*M) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par :

$$g(\sharp\omega, V) = \omega(V),$$

pour tout $\omega \in \Gamma(TM^*)$ et $V \in \Gamma(TM)$, est un isomorphisme $C^\infty(M)$ -linéaire.

Remarque 2.3.3 Localement, si $\omega = \omega_i dx^i$ et $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, on a :

$$\sharp\omega = g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}) .

Définition 2.3.3 une section $V \in \Gamma(TM)$ est dite parallèle par rapport à la connexion ∇ si :

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

2.4 Torsion de la variétés Différentiables :

Définition 2.4.1 Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M . La torsion de ∇ est une application $C^\infty(M)$

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par :

$$T(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$$

pour tous $U, V \in \Gamma(TM)$. La connexion ∇ est dite sans torsion si $T = 0$.

2.4.1 Expression en coordonnées locale de T

$$U = U^i \frac{\partial}{\partial x_i}, V = V^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned} T(U, V) &= \nabla_{U^i \frac{\partial}{\partial x_i}} V^j \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{V^j \frac{\partial}{\partial x_j}} U^i \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[U^i \frac{\partial}{\partial x_i}, V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= U^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - V^j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= U^i (V^j) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - V^j (U^i) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + V^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= (U^i V^j - V^i U^j) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 .

1. T est un champ de tenseur de type $(1, 2)$.
2. $T(U, V) = -T(V, U)$ pour tout $U, V \in \Gamma(TM)$ (T est antisymétrique).

2.5 Notion de la connexion Riemannienne

Soit (M, g) une variété Riemannienne.

Définition 2.5.1 Soit g une métrique Riemannienne sur une variété différentiable M , alors ∇ est dite compatible avec la métrique g si :

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W),$$

pour tout $V, W, U \in \Gamma(TM)$.

Théorème 2.5.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

définie par la formule de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V, Z) = & U(g(V, Z)) + V(g(Z, U)) - Z(g(U, V)) \\ & + g(Z, [U, V]) + g(V, [Z, U]) - g(U, [V, Z]) \end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur M , appelée connexion de Levi-Civita.

Théorème 2.5.2 (Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne)

Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g .

Théorème 2.5.3 Soit (M, g) une variété Riemannienne, il existe une connexion unique ∇ sur M telle que :

1. ∇ est symétrique. (i.e : $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U, \forall U, V \in \Gamma(TM)$).

2. ∇ est compatible avec g .

La connexion ∇ est appelée la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g .

Dans les coordonnées locales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

les symboles Christoffel pour cette connexion sont :

$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$, où g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (u, φ) et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ est la matrice inverse de g_{ij} .

Preuve. .

1- On a $T \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$.

En effet

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\text{car } \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \right) \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ telle que } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ T \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= 0 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0, \left(\text{car } \frac{\partial}{\partial x_k} \neq 0 \right) \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \end{aligned}$$

Donc la connexion ∇ est la torsion T nulle.

2- $\nabla_U g = 0, \forall U \in \Gamma(TM)$.

Soit $U, V, Z \in \Gamma(TM)$. on a

$$U(g(V, Z)) = g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z) \dots \dots (1)$$

$$V(g(U, Z)) = g(\nabla_V U, Z) + g(U, \nabla_V Z) \dots \dots (2)$$

$$Z(g(U, V)) = g(\nabla_Z U, V) + g(U, \nabla_Z V) \dots \dots (3)$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) + (3) &= g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z) - g(\nabla_V U, Z) - g(U, \nabla_V Z) \\ &+ g(\nabla_Z U, V) + g(U, \nabla_Z V) \\ &= g(\nabla_U V - \nabla_V U, Z) + g(U, \nabla_Z V - \nabla_V Z) + 2g(V, \nabla_Z U) + g(V, \nabla_U Z - \nabla_Z U) \end{aligned}$$

$$\text{Car } 2g(V, \nabla_Z U) + g(V, \nabla_U Z - \nabla_Z U) = g(V, \nabla_U Z) + g(\nabla_Z U, V)$$

Et comme g symétrique on a :

$$(1)-(2)+(3) = g([U, V], Z) + g(U, [Z, V]) + 2g(V, \nabla_Z U) + g(V, [U, Z]).$$

par suite :

$$2g(\nabla_Z U, V) = U(g(V, Z)) - V(g(U, Z)) + Z(g(U, V)) - g([U, V], Z) - g(U, [Z, V]) - g(V, [U, Z])$$

Alors

$$g(\nabla_Z U, V) = \frac{1}{2}(U(g(V, Z)) - V(g(U, Z)) + Z(g(U, V)) - g([U, V], Z) - g(U, [Z, V]) - g(V, [U, Z]))$$

Donc on a montré l'existence et l'unicité de ∇ .

On détermine les symboles de Christoffel associées à la connexion Riemannienne ∇ :

On a :

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \right. \\ &\quad \left. - g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right], \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right]\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right]\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} \right). \end{aligned}$$

car

$$\left(-g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right], \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right]\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right]\right) \right) = 0$$

$$\text{Donc } \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} \right) \Rightarrow \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g_{lk}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right) \dots$$

(4) ■

Exemple 2.5.1 trouver les symboles de christoffel de : $g = \sin^2 \varphi (d\theta)^2 + (d\varphi)^2$.

La matrice de g s'écrit donc : $g = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elle est bilinéaire symétrique, définie positive et non dégénérée.

(pour $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$) on obtient :

$$l = 1$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \varphi$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\sin^2 \varphi)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \cos \varphi.$$

$$l = 2$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi.$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

La formule (1) donne $\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.6 Les courbures

2.6.1 Tenseur de courbure

Définition 2.6.1 Soit M une variété différentiable muni d' une connexion linéaire ∇ . On définit le tenseur de courbure

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

associé à ∇ , par :

$$R(U, V)X = \nabla_U \nabla_V X - \nabla_V \nabla_U X - \nabla_{[U, V]} X,$$

pour tout $U, V, X \in \Gamma(TM)$.

Proposition 2.6.1 .

1. courbure R est $C^\infty(M) - 3$ linéaire.
2. $R(U, V)X = -R(V, U)X$ pour tout $U, V, X \in \Gamma(TM)$ (antisymétrique).

Définition 2.6.2 Sur une variété Riemannienne (M, g) , le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \partial_l,$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i (\Gamma_{jk}^l) - \partial_j (\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \{ \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \}$$

où $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale de champs de vecteurs sur M .

Proposition 2.6.2 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :

1. *Identité de Bianchi* : $R(U, V, Z, W) + R(V, Z, U, W) + R(Z, U, V, W) = 0$.
2. *Anti-symétrie en (U, V)* : $R(U, V, Z, W) = -R(V, U, Z, W)$.
3. *Anti-symétrie en (Z, W)* : $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$.
4. *Symétrie dans les couples (U, V) et (Z, W)* , $R(U, V, Z, W) = -R(Z, W, U, V)$.

Preuve. . 1.

$$\begin{aligned} R(U, V, Z, W) + R(V, Z, U, W) + R(Z, U, V, W) &= g(R(U, V)Z, W) + g(R(V, Z)U, W) \\ &\quad + g(R(Z, U)V, W) \\ &= g(R(U, V)Z + R(V, Z)U + R(Z, U)V, W) = 0 \end{aligned}$$

$$2. R(U, V, Z, W) = g(R(U, V)Z, W) = g(-R(V, U)Z, W) = -R(V, U, Z, W).$$

$$3. \Leftrightarrow R(U, V, Z, Z) = 0. \Rightarrow R(U, V, Z, Z) = 0,$$

nous avons

$$R(U, V, Z + W, Z + W) = 0 \Leftrightarrow R(U, V, Z, W) + R(U, V, W, Z) = 0.$$

$\Leftarrow$) En utilisant le fait que la connexion de Levi-Civita est compatible avec le métrique, nous avons

$$\begin{aligned}
U.g(\nabla_V Z, Z) &= g(\nabla_U \nabla_V Z, Z) + g(\nabla_V Z, \nabla_U Z) \text{ et } [U, V].g(Z, Z) = 2g(\nabla_{[U, V]} Z, Z) \\
\tilde{R}(U, V, Z, Z) &= g(R(U, V)Z, Z) \\
&= g(\nabla_U \nabla_V Z, Z) - g(\nabla_V \nabla_U Z, Z) - g(\nabla_{[U, V]} Z, Z) \\
&= U \cdot g(\nabla_V Z, Z) - g(\nabla_V Z, \nabla_U Z) - V.g(\nabla_U Z, Z) + g(\nabla_U Z, \nabla_V Z) - \frac{1}{2}[U, V] \cdot g(Z, Z) \\
&= \frac{1}{2}U \cdot (V.g(Z, Z)) - \frac{1}{2}V \cdot (U.g(Z, Z)) - \frac{1}{2}[U, V] \cdot g(Z, Z) \\
&= \frac{1}{2}[U, V] \cdot g(Z, Z) - \frac{1}{2}[V, V] \cdot g(Z, Z) = 0
\end{aligned}$$

d'après (1) on obtient

$$\begin{aligned}
R(U, V, Z, W) + R(V, Z, U, W) + R(Z, U, V, W) &= 0 \\
R(V, Z, W, U) + R(Z, W, V, U) + R(W, V, Z, U) &= 0 \\
R(Z, W, U, V) + R(W, U, Z, V) + R(U, Z, W, V) &= 0 \\
R(W, U, V, Z) + R(U, V, W, Z) + R(V, W, U, Z) &= 0
\end{aligned}$$

En ajoutant ceux-ci et en utilisant (3), on a

$$R(Z, U, V, W) + R(W, V, Z, U) + R(U, Z, W, V) + R(V, W, U, Z) = 0$$

D'après (2) et (3) on trouve

$$2R(Z, U, V, W) - 2R(V, W, Z, U) = 0$$

■

2.6.2 Expression en coordonnées locale de R

Soit $x \in M$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales de x

$$\forall U = U^i \partial_i, V = V^j \partial_j, W = W^l \partial_l \text{ et } Z = Z^k \partial_k$$

$$\begin{aligned}
R(U, V)Z &= R(U^i \partial_i, V^j \partial_j) V^k \partial_k \\
&= U^i V^j Z^k (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k) \\
&= U^i V^j Z^k (\nabla_{\partial_i} \Gamma_{jk}^m \partial_m - \nabla_{\partial_j} \Gamma_{ik}^m \partial_m) \\
&= U^i V^j Z^k (\partial_i \Gamma_{jk}^m (\partial_m)) + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l \partial_l - \partial_j \Gamma_{ik}^m (\partial_m) - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \partial_l \\
&= U^i V^j Z^k [(\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m) \partial_m + (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \partial_l] \\
&= X^i Y^j Z^k [(\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) \partial_l] \\
&= (R_{kij}^l U^i V^j Z^k) \partial_l, \text{ avec } R_{kij}^l = \partial_i (\Gamma_{jk}^l) - \partial_j (\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l)
\end{aligned}$$

Exemple 2.6.1 le même exemple précède : $g = \sin^2 \varphi (d\theta)^2 + (d\varphi)^2$.

- On va calculer R_{ijk}^l , pour $i, j, k, l = 1, 2$ telle que $R_{ijk}^l = \partial_i (\Gamma_{jk}^l) - \partial_j (\Gamma_{ik}^l) + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$

Pour $l = 1$

$$\begin{aligned}
 R_{111}^1 &= \partial_1 (\Gamma_{11}^1) - \partial_1 (\Gamma_{11}^1) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) = 0 \Rightarrow R_{111}^1 = 0 \\
 R_{112}^1 &= \partial_1 (\Gamma_{12}^1) - \partial_1 (\Gamma_{12}^1) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1) - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1) = 0 \Rightarrow R_{112}^1 = 0 \\
 R_{121}^1 &= \partial_1 (\Gamma_{21}^1) - \partial_2 (\Gamma_{11}^1) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^1) = \partial_1 \left(\frac{1}{2} (\cos \varphi) \right) = 0 \Rightarrow R_{121}^1 = 0 \\
 R_{122}^1 &= \partial_1 (\Gamma_{22}^1) - \partial_2 (\Gamma_{12}^1) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1) \\
 &= -\partial_2 \left(\frac{1}{2} (\cos \varphi) \right) - \left(\frac{1}{2} (\cos \varphi) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi) - \left(\frac{1}{2} (\cos \varphi) \right)^2 = \frac{2 - \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \Rightarrow R_{122}^1 = \frac{2 - \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \\
 R_{211}^1 &= \partial_2 (\Gamma_{11}^1) - \partial_1 (\Gamma_{21}^1) + (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^1) - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1) = -\partial_1 \left(\frac{1}{2} \cos \varphi \right) = 0 \Rightarrow R_{211}^1 = 0 \\
 R_{212}^1 &= \partial_2 (\Gamma_{12}^1) - \partial_1 (\Gamma_{22}^1) + (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1) - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1) = -R_{122}^1 = \frac{-2 + \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \\
 R_{221}^1 &= \partial_2 (\Gamma_{21}^1) - \partial_2 (\Gamma_{21}^1) + (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1) = 0 \Rightarrow R_{221}^1 = 0 \\
 R_{222}^1 &= \partial_2 (\Gamma_{22}^1) - \partial_2 (\Gamma_{22}^1) + (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^1) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^1) = 0 \Rightarrow R_{222}^1 = 0
 \end{aligned}$$

Pour $l = 2$

$$\begin{aligned}
 R_{111}^2 &= \partial_1 (\Gamma_{11}^2) - \partial_1 (\Gamma_{11}^2) + (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^1) - (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^1) = 0. \Rightarrow R_{111}^2 = 0 \\
 R_{112}^2 &= \partial_1 (\Gamma_{12}^2) - \partial_1 (\Gamma_{12}^2) + (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1) - (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1) = 0 \Rightarrow R_{112}^2 = 0 \\
 R_{121}^2 &= \partial_1 (\Gamma_{21}^2) - \partial_2 (\Gamma_{11}^2) + (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1) - (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1) \\
 &= -\partial_2 (-\sin \varphi \cos \varphi) + (-\sin \varphi \cos \varphi) \left(\frac{1}{2} \cos \varphi \right) \\
 &= \cos 2\varphi \Rightarrow R_{121}^2 = \cos 2\varphi. \\
 R_{211}^2 &= \partial_2 (\Gamma_{11}^2) - \partial_1 (\Gamma_{21}^2) + (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1) - (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1) \\
 &= \partial_2 (-\sin \varphi \cos \varphi) - (-\sin \varphi \cos \varphi) \left(\frac{1}{2} \cos \varphi \right) = -R_{121}^2 \Rightarrow R_{211}^2 = -\cos 2\varphi \\
 R_{122}^2 &= \partial_1 (\Gamma_{22}^2) - \partial_2 (\Gamma_{12}^2) + (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1) - (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^1) = 0. \Rightarrow R_{122}^2 = 0 \\
 R_{212}^2 &= \partial_2 (\Gamma_{12}^2) - \partial_1 (\Gamma_{22}^2) + (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^1) - (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1) = -R_{122}^2 = 0 \\
 R_{221}^2 &= \partial_2 (\Gamma_{21}^2) - \partial_2 (\Gamma_{21}^2) + (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^1) - (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^1) = 0 \Rightarrow R_{221}^2 = 0 \\
 R_{222}^2 &= \partial_2 (\Gamma_{22}^2) - \partial_2 (\Gamma_{22}^2) + (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1) - (\Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1) = 0. \Rightarrow R_{222}^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Propriété 2.6.1 .

1) R est bilinéaire dans $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$

$$R(fU_1 + gU_2, V)Z = fR(U_1, V)Z + gR(U_2, V)Z$$

Et

$$R(U, fV_1 + gV_2)Z = fR(U, V_1)Z + gR(U, V_2)Z, \forall U_1, U_2, V_1, V_2, V \in \Gamma(TM), \forall f, g, h \in C^\infty(M)$$

2) $\forall U, V \in \Gamma(TM)$, l'opérateur $R(U, V) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ est linéaire.

$$R(U, V)(Z + W) = R(U, V)Z + R(U, V)W$$

$$3) R(U, V)(fZ) = fR(U, V)Z.$$

Preuve. .

1) R est bilinéaire, car :

$$\begin{aligned} R(fU_1 + gU_2, V)Z &= \nabla_{fU_1 + gU_2} \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_{fU_1 + gU_2} Z - \nabla_{[fU_1 + gU_2, V]} Z \\ &= (\nabla_{fU_1} + \nabla_{gU_2}) \nabla_V Z - \nabla_V ((\nabla_{fU_1} + \nabla_{gU_2}) Z - f\nabla_{[U_1, V]} Z - g\nabla_{[U_2, V]} Z) \\ &= f(\nabla_{U_1} \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_{U_1} Z - \nabla_{[U_1, V]} Z) + g(\nabla_{U_2} \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_{U_2} Z - \nabla_{[U_2, V]} Z) \\ &= fR(U_1, V)Z + gR(U_2, V)Z. \end{aligned}$$

2)

$$R(U, V)(Z + W) = \nabla_U \nabla_V (Z + W) - \nabla_V \nabla_U (Z + W) - \nabla_{[U, V]} (Z + W)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla_U \nabla_V Z + \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]} Z - \nabla_{[U, V]} W \\ &= \nabla_U \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_{[U, V]} Z + \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U, V]} W \\ &= R(U, V)Z + R(U, V)W \end{aligned}$$

3) On a

$$\nabla_V \nabla_U (fZ) = \nabla_V (f\nabla_U Z + (Uf)Z) = f\nabla_V \nabla_U Z + (Vf)(\nabla_U Z) + (Uf)(\nabla_V Z) + (V(Uf)Z)$$

Et tant que

$$\nabla_V \nabla_U (fZ) - \nabla_U \nabla_V (fZ) = f(\nabla_V \nabla_U - \nabla_U \nabla_V)Z + ((VU - UV)f)Z$$

Alors

$$R(U, V)(fZ) = f\nabla_U \nabla_V Z - f\nabla_V \nabla_U V + ([V, U]f)Z - f\nabla_{[U, V]}Z + ([U, V]f)Z = fR(U, V)Z.$$

■

2.6.3 La 2^{ième} identité de Bianchi sur une variété Riemannienne

$$(\nabla_U R)(V, Z) + (\nabla_V R)(Z, U) + (\nabla_Z R)(U, V) = 0, \forall U, V, Z \in \Gamma(TM)$$

où

$$\begin{aligned} \nabla_U V : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (U, V, Z) &\mapsto (\nabla_U R)(V, Z, W) \end{aligned}$$

définie par :

$$((\nabla_U R)(V, Z))(W) = \nabla_U(R(V, Z))(W) - (R(\nabla_U V, Z))(W) - (R(V, \nabla_U Z))(W) - R(V, Z)(\nabla_U W)$$

i) $\nabla_U V$ est $C^\infty(M)$ -trilinéaire : (evident).

Montrons la 2^{ième} identité de Bianchi

$$(\nabla_U R)(V, Z) + (\nabla_V R)(Z, U) + (\nabla_Z R)(U, V) = 0$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} (\nabla_U R)(V, Z)(W) &= \nabla_U(R(V, Z)(W)) - (R(\nabla_U V, Z))(W) \\ &\quad - (R(V, \nabla_U Z))(W) - R(V, Z)(\nabla_U W) \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(Z, U)(W) &= \nabla_V(R(Z, U)(W)) - (R(\nabla_V Z, U))(W) \\ &\quad - (R(Z, \nabla_V U))(W) - R(Z, U)(\nabla_V W) \dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(U, V)(W) &= \nabla_Z(R(U, V)(W)) - (R(\nabla_Z U, V))(W) \\ &\quad - (R(U, \nabla_Z V))(W) - R(U, V)(\nabla_Z W) \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) + (5) + (6) &= \nabla_U(R(V, Z)(W)) + \nabla_V(R(Z, U)(W)) + \nabla_Z(R(U, V)(W)) \\ &\quad + R(\nabla_V U - \nabla_U V, Z)(W) + R(\nabla_U Z - \nabla_Z U, V)(W) \\ &\quad + R(\nabla_Z V - \nabla_V Z, U)(W) - R(V, Z)(\nabla_U W) \\ &\quad - R(Z, U)(\nabla_V W) - R(U, V)(\nabla_Z W) \dots (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* &= \nabla_U (\nabla_V (\nabla_Z W)) - \nabla_U (\nabla_Z (\nabla_V W)) - \nabla_U (\nabla_{[V,Z]} W) + \nabla_V (\nabla_Z (\nabla_U W)) \\
&- \nabla_V (\nabla_U (\nabla_Z W)) - \nabla_V \nabla_{[Z,U]} W + \nabla_Z (\nabla_U (\nabla_V W)) - \nabla_Z (\nabla_V (\nabla_U W)) \\
&- \nabla_Z ((\nabla_{[U,V]} W)) + R([V, U], Z)(W) + R([U, Z], V)(W) + R([Z, U], V)(W) \\
&- \nabla_V (\nabla_Z (\nabla_U W)) + \nabla_Z (\nabla_V (\nabla_U W)) + \nabla_{[V,Z]} (\nabla_U W) - \nabla_Z (\nabla_U (\nabla_V W)) + \nabla_U (\nabla_Z (\nabla_V W)) \\
&+ \nabla_{[Z,V]} (\nabla_V W) - \nabla_U (\nabla_V (\nabla_Z W)) + \nabla_V (\nabla_U (\nabla_Z W)) + \nabla_{[U,V]} (\nabla_Z W) \\
&= -\nabla_U (\nabla_{[V,Z]} W) - \nabla_V (\nabla_{[Z,U]} W) - \nabla_Z (\nabla_{[U,V]} W) + \nabla_{[V,U]} (\nabla_Z W) - \nabla_Z (\nabla_{[V,U]} W) \\
&- (\nabla_{[[V,U],Z]} W) + \nabla_{[U,Z]} (\nabla_V W) - \nabla_V (\nabla_{[U,Z]} W) - \nabla_{[[U,Z],V]} W + \nabla_{[Z,V]} (\nabla_U W) \\
&- \nabla_U (\nabla_{[Z,V]} W) - (\nabla_{[[Z,V],U]} W) + \nabla_{[V,Z]} (\nabla_U W) + \nabla_{[Z,U]} (\nabla_V W) + \nabla_{[U,V]} (\nabla_Z W) \\
&= -\nabla_{[[V,U],Z]} W - \nabla_{[[U,Z],V]} W - \nabla_{[[Z,V],U]} W = -\nabla_{[[V,U],Z] + [[U,Z],V] + [[Z,V],U]} W = 0
\end{aligned}$$

■

Cela on utilise la définition de tenseur de courbure R , on faite $T = 0$ de la connexion Riemannienne

$$\text{i.e : } \nabla_V U - \nabla_U V = [U, V]$$

2.6.4 Expression en coordonnées locale de deuxième identité de Bianchi

$$\begin{aligned}
(\nabla_U R)(V, Z) + (\nabla_V R)(Z, U) + (\nabla_Z R)R(U, V) &= \Gamma_{jk}^s (\partial_i \Gamma_{lm}^k) - \Gamma_{lk}^s (\partial_i \Gamma_{jm}^k) + \Gamma_{lk}^s (\partial_j \Gamma_{im}^k) \\
&- \Gamma_{ik}^s (\partial_j \Gamma_{lm}^k) + \Gamma_{ik}^s (\partial_l \Gamma_{jm}^k) - \Gamma_{jk}^s (\partial_l \Gamma_{lm}^k)
\end{aligned}$$

- Sur la variété Riemannienne on a

$$R_{ilm}^s = \partial_j \Gamma_{lm}^s - \partial_l \Gamma_{jm}^s + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{lk}^s \Gamma_{jm}^k$$

Avec

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \partial_l = \frac{\partial}{\partial x_l}, \partial_m = \frac{\partial}{\partial x_m}$$

Et

$$\nabla_i = \nabla_{\partial_i}, \nabla_j = \nabla_{\partial_j}, \nabla_l = \nabla_{\partial_l} \text{ et } \nabla_m = \nabla_{\partial_m}$$

2.6.5 Courbure de Ricci

Définition 2.6.3 *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M_m, g) de dimension m est un tenseur de type $(0; 2)$ défini par :*

$$\text{Ric}(U, V) = \text{trace } R(*, U)V = \sum_{i=1}^m g((R(e_i, U)V, e_i))$$

$\forall U, V \in \Gamma(TM)$, où (e_i) est une base orthonormée locale sur M , et

$$\begin{aligned} R(*, U)V : \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ U &\mapsto R(Z, U)V \end{aligned}$$

posant :

$$\begin{aligned} \text{Ric} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (U, V) &\mapsto \text{Ric}(U, V) \end{aligned}$$

La courbure de Ricci, Ric est bilinéaire symétrique, en effet

$$\begin{aligned} \text{Ric}(U; V) &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, U)V, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m g(R(V, e_i)e_i, U) \\ &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, V)U, e_i) \\ &= \text{Ric}(V, U) \end{aligned}$$

Relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1\dots m}$, les composantes du tenseur de Ricci sont donnés par

$$\begin{aligned}
 Ric_{ij} &= Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= \text{trace } R\left(*, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} \\
 &= g^{kl} g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
 &= g_{kl} R_{kij}^s g_{ls} \\
 &= \delta_k^s R_{kij}^s \\
 &= R_{kij}^k
 \end{aligned}$$

Définition 2.6.4 Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M^m, g) , est un tenseur de type $(1, 1)$, défini par

$$Ricci(U) = \sum_{i=1}^m R(U, e_i) e_i$$

$\forall X \in \Gamma(TM)$, où $(e_i)_{i=1\dots m}$ est une base orthonormée locale sur M .

Remarque 2.6.1 Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, de dimension m . $\forall U, V \in \Gamma(TM)$ on a $Ric(U, V) = g(Ricci(U), V)$

2.6.6 Courbure scalaire

Définition 2.6.5 . On appelle courbure scalaire d'une variété riemannienne (M^m, g) la fonction définie sur M par

$$S = \text{trace}_g Ric = \sum_{i,j=1}^m g(R(e_i, e_j) e_j, e_i)$$

où $(e_i)_{i=1\dots m}$ une base orthonormée locale sur M .

Proposition 2.6.3 *Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante K si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$R(U, V)Z = K(g(V, Z)U - g(U, Z)V).$$

pour tout U, V et $Z \in \Gamma(TM)$

Corollaire 2.6.1 *Si (M^m, g) est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante K , alors $\forall U, V \in \Gamma(TM)$ on a*

1. $\text{Ricci}(U) = (m - 1)KU$,
2. $\text{Ricci}(U, V) = (m - 1)Kg(U, V)$,
3. $S = m(m - 1)K$

Exemple 2.6.2 *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du repère canonique $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$,*

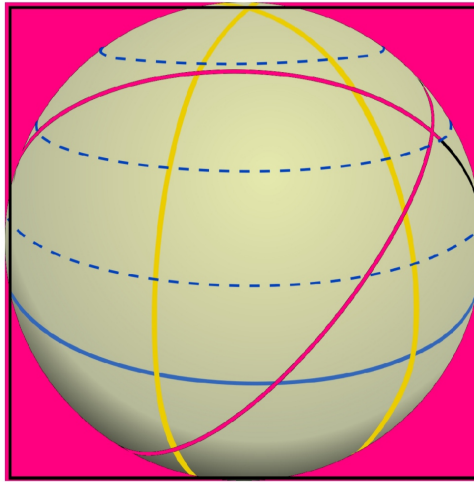
du produit scalaire euclidien $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$, où $g_{ij} = \delta_{ij}$.

On vérifie que $\Gamma_{ij}^k = 0$, $R_{ijk}^l = 0$

donc $R = 0$.

En particulier, la courbure sectionnelle de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ est nulle.

Exemple 2.6.3 (la sphère S^2)

FIGURE 2.1 – la sphère S^2

Soit $M = S^n$ on va calculer sa courbure scalaire, premièrement on va passer par le tenseur de Ricci qui est calculé à partir du tenseur de Riemann, et cela dépend des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\varphi}^{\theta} \varphi = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{\varphi}^{\theta} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

La métrique pour une sphère est

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

où r est le rayon constant de la sphère, donc

$$g_{\theta\theta} = r^2$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$$

donc on a trouvé le tenseur $R_{\theta\phi\theta\phi}$, calculée à partir de

$$R_{jlm}^i = \partial_l \Gamma_{mj}^i - \partial_m \Gamma_{lj}^i + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{lk}^i - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{km}^i$$

nous avons

$$\begin{aligned}
R_{\theta\varphi\theta\varphi} &= g_{\theta i} R_{\varphi\theta\varphi}^i \\
&= g_{\theta\theta} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta \\
&= r^2 (\partial_\theta \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta - \partial_\varphi \Gamma_{\theta\varphi\varphi}^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\theta}^\theta - \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta) \\
&= r^2 (-\cos 2\theta - 0 + 0 - \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta) \\
&= r^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
&= r^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

on conclut que le tenseur de Ricci est

$$R_{ij} = g^{ab} R_{aibj}$$

Puisque la métrique est diagonale et g^{ab} est l'inverse de g_{ab} , nous avons

$$\begin{aligned}
g^{\theta\theta} &= \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \frac{1}{r^2} \\
g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

la métrique est diagonale et g^{ab} est l'inverse de g_{ab} , alors nous avons

$$\begin{aligned}
g^{\theta\theta} &= \frac{1}{g_{\theta\theta}} = \frac{1}{r^2} \\
g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

donc on utilisant les symétries

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= g^{ab} R_{a\theta b\theta} \\
&= g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin 2\theta \\
&= 1 \\
&= R_{\theta\theta} = g^{ab} R_{a\varphi b\varphi} \\
&= g^{\theta\theta} R_{\theta\varphi\theta\varphi} \\
&= \sin^2 \theta \\
&= R_{\theta\varphi} = R_{\varphi\theta} = 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir la version du tenseur de Ricci à l'étage supérieur :

$$\begin{aligned}R^{\theta\theta} &= g^{\theta i} g^{\theta j} R_{ij} \\&= g^{\theta\theta} g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} \\&= \frac{1}{r^4} \\R^{\varphi\varphi} &= g^{\varphi\varphi} g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} \\&= \frac{1}{r^4 \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

Le courbure scalaire est

$$\begin{aligned}R &= g_{ij} R^{ij} \\&= r^2 \frac{1}{r^4} + r^4 + r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \\&= \frac{2}{2r}\end{aligned}$$

donc la courbure d'une sphère diminue à mesure que son rayon augmente.

Opérateurs sur une variété Riemannienne

3.1 L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne

Définition 3.1.1 (*L'opérateur gradient*)

Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par

$$\begin{aligned} \text{grad} : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto \text{grad } f = \sharp df \end{aligned}$$

où df est la différentielle de la fonction f .

Proposition 3.1.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m , (U, φ) une carte sur M avec les champs de base associée $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, alors pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$(\text{grad } f)|_U = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Preuve. Appliquons la définition de l'application $\sharp$, et la définition de la différentielle la fonction $f \in C^\infty(M)$ relativement à (U, φ) sur M , on a

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ \sharp df &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

où $dx^1, \dots, dx^m$ est la base duale. ■

Propriété 3.1.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a

1. $\text{grad}(f + h) = \text{grad } f + \text{grad } h$
2. $\text{grad}(fh) = h \text{grad } f + f \text{grad } h$
3. $(\text{grad } f)(h) = (\text{grad } h)(f)$

3.2 L'opérateur Divergence sur les champs de vecteur

Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteur sur une variété Riemannienne (M, g) , on a

$$\begin{aligned} \nabla X : \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\mapsto \nabla_Z X \end{aligned}$$

est une application C^∞ linéaire

si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla X)_x : T_x M &\rightarrow \Gamma(TM) \\ v &\rightarrow (\nabla_v X)_x \end{aligned}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel .

Définition 3.2.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée par $\operatorname{div} X$ est une fonction sur M définie par

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}_g(\nabla X)$$

on a pour tout $x \in M$:

$$(\operatorname{div} X)(x) = \operatorname{tr}_g((\nabla X)_x)$$

En coordonnée locale , on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= dx^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right) \\ &= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

Si (e_i) est une base orthonormée locale sur M on a

$$\operatorname{div} X = g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

Divergence d'une forme différentielle

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$ une 1-forme sur une variété Riemannienne (M, g) , on a

$$\begin{aligned} \nabla \omega : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(T^*M) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z \omega \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire ($\nabla \omega$ est un tenseur de type $(0, 2)$).

si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)_x : T_x M &\longrightarrow T_x^* M \\ v &\longmapsto (\nabla_v \omega)_x \end{aligned}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 3.2.2 Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'une 1-forme $\omega \in \Gamma(T^*M)$, notée $\text{div}(\omega)$ est une fonction sur M définie par

$$\text{div}(\omega) = \text{tr}_g(\nabla\omega)$$

pour tout $x \in M$, on a

$$(\text{div}(\omega))(x) = \text{tr}_g((\nabla\omega)_x)$$

on obtient localement

$$\begin{aligned} \text{div } \omega &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \omega)(e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

dans le cas d'un tenseur de type $(0, p)$ Si T est champ de tenseur de type $(0, r)$, on définit sa divergence par :

$$(\text{div } T)(X_1, \dots, X_r) = \text{tr}_g(Z \mapsto (\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_r)).$$

Expression locale de la divergence

Définition 3.2.3 Soit (M, g) une variété Riemannienne.

la divergence sur un champ de vecteur X_x noté $\text{div}(X_x)$ est une fonction sur M définie par $\text{div}(X_x) = \text{trace } \nabla X_x$.

Proposition 3.2.1 *Première expression locale de la divergence*

$$\text{div } X_x = \left(\frac{\partial X_x^i}{\partial x^i} + X_x^i \Gamma_{ij}^i \right)$$

Avec $X_x = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$.

Preuve. Sur une carte locale sur M

on a : $X_x = X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_x &= dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_x \right) \\ &= dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_x^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= dx_i \left(\frac{\partial X_x^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_x^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \left(\frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j \Gamma_{ij}^i \right). \end{aligned}$$

■

Propriété 3.2.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors :

1. $\operatorname{div} (X_x + Y_x) = \operatorname{div} X_x + \operatorname{div} Y_x$
2. $\operatorname{div} (\alpha X_x) = \alpha \operatorname{div} X_x, \forall X, Y \in T_x M \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$

Preuve. On applique la définition du divergence, on a :

1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (X_x + Y_x) &= dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (X_x + Y_x) \right) \\ &= dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (X_x) \right) + dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (Y_x) \right) \\ &= \operatorname{div} X_x + \operatorname{div} Y_x \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\alpha X_x) &= dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\alpha X_x) \right) \\ &= dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} X_x(\alpha) + \alpha \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (X_x) \right) \right) \\ &= dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} X_x(\alpha) + \alpha dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (X_x) \right) \\ &= X_x(\alpha) + \alpha \operatorname{div} X_x \\ &= \alpha \operatorname{div} X_x \end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.1 Une autre expression locale de la divergence est :

Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \right) = \sqrt{\det(g_{ij})} \Gamma_{lk}^l$$

Proposition 3.2.2 Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors :

$$\operatorname{div} X_x = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} X_x^k \right), \forall X \in T_x M$$

Preuve. D'après Lemme (2.7.1), on a :

$$\operatorname{div} X_x = \frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j \Gamma_{ij}^i$$

■

d'après la proposition (2.7.3) on trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X_x &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\sqrt{\det g_{ij}} \frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j \sqrt{\det g_{ij}} \Gamma_{ij}^i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\sqrt{\det g_{ij}} \frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{\det g_{ij}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\det g_{ij}} X_x^i \right) \end{aligned}$$

d'après la convention d'einstein, on déduit que :

$$\operatorname{div} X_x = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\det g_{ij}} X_x^i \right)$$

3.2.1 La Hessienne d'une fonction

Définition 3.2.4 Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. On appelle La Hessienne de la fonction f noté $\text{Hess}(f)$, une application $C^\infty(M)$ -bilinéaire, définie par :

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longmapsto g(\nabla_X \text{grad}(f), Y) \end{aligned}$$

Proposition 3.2.3 Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. $\text{Hess}(f)$, est une application symétrique.

Preuve. on considère que le tenseur de torsion associé à la métrique g est nul, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(X, Y) &= g(\nabla_X \text{grad}(f), Y) \\ &= X(g(\text{grad}(f), Y)) - g(\text{grad}(f), \nabla_X Y) \\ &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= [X, Y] + Y(X(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) \\ &= Y(g(\text{grad}(f), X)) - g(\text{grad}(f), \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y \text{grad}(f), X) \\ &= \text{Hess}(f)(Y, X) \end{aligned}$$

■

3.3 L'opérateur Laplacien sur une variété Riemannienne

Définition 3.3.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur laplacien noté Δ , sur M par :

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto \Delta(f) = \text{div}(\text{grad } f) \end{aligned}$$

Propriété 3.3.1 Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors :

1. $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$
2. $\operatorname{div}(h \operatorname{grad}(f)) = h\Delta f + g(\operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f)$
3. $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(\operatorname{grad} f; \operatorname{grad} h), \forall f, h \in C^\infty(M).$

Preuve. 1) Soit $f, h \in C^\infty(M)$, utilisant les propriétés des opérateurs div et grad et le fait que $X_x(f) = g(\operatorname{grad} f, X_x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(f + h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f + h)) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) \\ &= \Delta(f) + \Delta(h) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(h \operatorname{grad}(f)) &= h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\ &= h\Delta f + g(\operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f) \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) \\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f) \\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f) \\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\ &= f\Delta(h) + h\Delta(f) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.1 Première expression locale de Laplacien

Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors :

$$\Delta(f) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \forall f \in C^\infty(M)$$

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}
 \Delta(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
 &= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
 &= g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - g \left(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) \\
 &= g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \Gamma_{ij}^k \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \\
 &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).
 \end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.2 *autre expression locale de Laplacien est*

Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$, alors :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

La preuve est déduite de la proposition (4.1.9).

Exemple 3.3.1 $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne.

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall X_x = (X_{x_1}^1, \dots, X_{x_n}^n) \in T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ Alors :

$$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in T_x M$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(X_x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} \\
 \Delta(f) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}
 \end{aligned}$$

Exemple 3.3.2 Soient S^2 la sphère muni de la métrique $g_{S^2} = \sin^2 \varphi (d\theta)^2 + (d\varphi)^2$ en coordonnées sphériques et $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ , on a :

$$g_{11} = \sin^2 \varphi, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = 1$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{22}^1 = -\cos \theta \sin \theta$$

En utilisant la formule de la proposition (2.7.5) on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Azzouz Awane., *Cours de géométrie différentielle*, DEA.200162005 à la faculté des Sciences Ben M'sik. Casablanca. Maroc,2005, pp.214. cel-00277648
- [2] BOUKHEIRA Yamina., *Etude de quelques Propriétés sur les Variétés Riemanniennes et Applications*, Université Ahmed Draia D'Adrar, mémoire master .
- [3] BOUAZIZ Amina., *Variété pseudo Riemanniennes*, centre Université Salhi Ahmed-Naâma-, mémoire master .
- [4] BAKROU Siham., *Géodésique sur les variétés de Walker de dimension 3*, Université Dr Tahar Moulay-Saida, mémoire master.
- [5] DJAA Mostapha., *Géométrie différentielle-I variétés différentielles*, Publication du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017-2018
- [6] DEKICH Aicha., *Variétés Statistiques*, Université Dr Tahar Moulay-Saida, mémoire master .
- [7] DJEBBARI Oumelaid., *Principe de problème de Yamabe*, centre Université Salhi Ahmed-Naâma-, mémoire master .
- [8] Kobayashi S. and Nomizu K., *Fondation of Differential Geometry* ,vol.I. Interscience, New York-London 1963 .
- [9] Yano K. and Kon M., *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., Vol 3, World Sci., 1984
- [10] ZAGANE Abderrahim., *Métriques Naturelles et Connexion Linéaires*, Université Oran1 Ahmed Ben Bella , mémoire master .