الجـمـهـوريـة الجـزائـريـة الديمـقـراطيـة الـشـعـبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التـــعـليـم العـالي و البـحث العـلـمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Salhi Ahmed- Naama
Institut des sciences et technologies
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle et EDP

Intitulé

Fonctions caractéristiques et applications

Présenté par :
BENSALEH Hichem

Soutenu : Juillet 2021

Devant le jury composé de :

Dr.DAOUDI Hamza	MCA	Univ Béchar	Présédent
Dr.KENOUZA Jamel	MCB	C-Univ Naâma	Examinateur
Dr.BELGUERNA Abderrahmane	MCA	C-Univ Naâma	Encadreur

Année universitaire 2020/2021

Remerciement

Ce travail est ma première expérience de rédiger un mémoire de master, il n'aurait pas été aussi fructueux sans l'aide de plusieurs personnes.
je vais donc m'essayer a trouver les mots justes pour exprimer spécifiquement ma reconnaissance a tous ceux qui ont contribué de près ou de loin a la réalisation de ce modeste travail. Avant tout, je tient a remercier allah le tout puissant qui m'a aidée et donnée la santé, la volonté et la patience pour achever mon travail.
Je tiens a remercier mon encadreur Dr.Abderrahmane BELGUERNA pour le suivi et l'aide qu'il m'a apporté pour l'élaboration et pour ses précieux conseils.
Je voudrai également remercier les membres de jury Dr.Jamel KENOUZA et Dr.Zeyneb LAALA maîtres de conférences au centre universitaire Salhi Ahmed de Naâma, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.
Merci a toutes et a tous.

Table des matières

Introduction **5**

1 Lois des probabilités **6**

1.1 Les lois de probabilités usuelles 6

1.2 Les lois discrètes 6

1.2.1 La loi uniforme discrète 6

1.2.2 La loi de Bernoulli $\mathcal{B}$(p) 7

1.2.3 Le processus de bernoulli et la loi binomiale B(n,p) :x $\sim$ B(n,P) . 8

1.3 Les lois géométriques G(p) et binomiale négative BN(r,p) 10

1.3.1 Loi hypergéométrique :H(N,n,P) 15

1.3.2 La loi multinomiale : 18

1.3.3 Le processus et la loi de poisson p(λ) : 18

1.4 Les lois continues : 20

1.4.1 La loi exponentielle : 20

1.4.2 La loi continue uniforme U[a,b] : 21

1.4.3 Loi gamma G(α,λ) : 21

1.4.4 Loi normale : 22

1.4.5 Loi de Paréto : 24

1.4.6 Loi log-normale : 25

1.4.7 La Loi Bêta : $X \sim B(\alpha, B)$ 27

1.4.8 Loi de weibull : 28

1.4.9 La loi de Gumbel : 30

1.4.10 La loi Khi-deux : 31

1.4.11 La loi student 33

1.4.12 La loi de Fisher 34

2 Fonctions caractéristiques **38**

2.1 fonctions caractéristiques : 38

2.2 Fonctions caractéristique des lois usuelles 39

2.2.1 Fonction caractéristique d'une loi uniforme discrète 40

2.2.2 Fonction caractéristique de la loi de Bernoulli 40

2.2.3 Fonction caractéristique de la loi géométrique 40
2.2.4 Fonction caractéristique de la loi binomiale 41
2.2.5 Fonction caractéristique de la loi binomiale négative 41
2.2.6 Fonction caractéristique d'une loi de poisson 42
2.2.7 Fonction caractéristique de la loi continue uniforme 43
2.2.8 Fonction caractéristique d'une loi exponentielle 43
2.2.9 Fonction caractéristique de la loi de gamma 43
2.2.10 Fonction caractéristique de la loi normale 44
2.2.11 Fonction caractéristique de loi Beta 45
2.2.12 Fonction de caractéristique de la loi Khi-deux 47
2.2.13 Fonction caractéristique de loi Gumbel 48
2.3 Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles 49

3 Application **50**
3.1 Le cas discret 50
3.2 Le cas continue 51
3.3 Fonction caractéristique conjointe 54

Conclusion **55**

Bibliographie **55**

Liste des tableaux

1.1 Espérance et variance 16

2.1 Fonctions caractéristiques des lois usuelles 49

Introduction

La théorie des probabilités est un peu par tout, dans les assurances, le diagnostic médical, les sondages d'opinion, les prévisions météorologique ou économiques, fiabilité des équipements et installations industrielles.
Plusieurs domaines sont des champs d'application de la science du hasard. Sans le calcul et la théorie des probabilités il ne serait pas possible de formaliser les mécanismes de la génétique, pas plus que la mécanique quantique ou la thermodynamique. Dans le domaine des sciences sociales, le poids de ces mathématiques n'a cessé pas de grandir ; des choix politiques importants concernant les technologies ou l'économie sont soumis à des analyses fondées sur le calcul des probabilités.
C'est pourquoi les notions clés de la théorie des probabilités doivent faire partie de notre culture. Le propos de ce mémoire est donc de présenter les fonctions caractéristiques ses propriétés et ses applications comme une partie très importantes de la théorie des probabilités.
Ce travail se décompose en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous donnons les notions de bases des probabilités en particulier les lois usuelles de probabilités, la détermination et la description de chaque modèle 1. Dans le deuxième chapitre on entame les notions sur les fonctions caractéristiques et ses propriétés, en calculons on détail les fonctions caractéristiques des lois usuelles de probabilités 2. Dans le dernier chapitre on donne des applications de la fonction caractéristique dans plusieurs situation **??**. Et en fin on termine avec une conclusion 3.3.

Chapitre 1

Lois des probabilités

La théorie des probabilités est une branche des mathématiques qui trait des propriétés de certaines structures modélisant des phénomènes où le 'hasard' intervient en tant que théorie mathématiques abstraite, elle repose sur une axiomatique et se développe de façon autonome par rapport à la réalité physique . Seul les noms des concepts utilisées (événement, variable....) servent à modéliser des phénomènes par exemple nous allons voir par la suite la modélisation d'un phénomène par le schéma de Bernoulli.

1.1 Les lois de probabilités usuelles

Nous abordons ici une sorte de catalogue des lois les plus utilisées dans la modélisation statistique. Nous testons l'utilité de ces lois en précisant le type de situation ou elles sont appropriées.
De façon générique et sauf mention expresse on notera X une v.a. qui suit la loi décrite. Chaque loi fera l'objet d'un symbole spécifique par exemple, la loi binômiale de paramètre n et p sera notée $\mathcal{B}$(n, p) et on écrira $X \sim \mathcal{B}$(n, p) pour dire que X suit cette la loi $\mathcal{B}$(n, p).
On envisage deux types de lois des probabilités, les lois discrètes et les lois continues ou à densité.

1.2 Les lois discrètes

Dans cette section on étudiera les lois discrètes, marquées par leurs supports discrets. La section suivante est réservée pour les lois à densité marquées par leurs supports continues.

1.2.1 La loi uniforme discrète

L'ensemble des valeurs possibles est 1, 2,3,.. r, r étant un paramètre de la loi uniforme signifie que chaque valeur reçoit la même probabilité $1/r$. En fait cette loi est peu utilisée

en tant que modèle statistique, mais mérite d'être présentée en raison de sa simplicité. On la rencontre dans les jeux de hasard, par exemple dans le lancement d'un dé. X est le nombre de points obtenus et $r = 6$. Si le dé est parfaitement symétrique chaque face, et donc chaque nombre de points, a la probabilité $1/6$ d'apparaître.
Pour une v.a. X qui suit cette loi, on a :

$$E(X) = \frac{r+1}{2}$$
$$V(X) = \frac{1}{12}\left(r^2 - 1\right).$$

En effet :
$$E(X) = \frac{1}{r}(1 + 2 + \cdots + r) = \frac{1}{r}\frac{r(r+1)}{2} = \frac{r+1}{2}.$$

Et, sachant que $1^2 +\ 2^2 + \ldots\ldots + r^2 = \frac{1}{6}r$ (r + 1)(2r + 1), on peut calculer la variance par la formule suivante :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)^2\right)$$
$$V(X) = \frac{1}{r}\left(\ 1^2 +\ 2^2 + \ldots\ldots +\ r^2\right) \cdot \left(\frac{r+1}{2}\right)^2$$
$$V(X) = \frac{1}{6}(r+1)(2r+1) - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}(r^2 - 1).$$

Ainsi, pour le jet d'un dé, l'espérance mathématique du nombre de points est $\frac{7}{2}$ et sa variance $\frac{35}{12}$.

Démonstration de formule d'espérance et de variance

$E(X) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2}$
V(X) = $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$ - $E\left(X\right)^2$ = $\frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ - $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ =$\frac{\left(n^2-1\right)}{12}$

1.2.2 La loi de Bernoulli $\mathcal{B}$(p)

C'est la loi la plus simple que l'on puisse envisager puisqu'il n'y a que deux valeurs possible, Codées 1 et 0. On note p la probabilité associée à la valeur 1, p étant le paramètre de la loi (la probabilité 1 - p associée à la valeur 0 est souvent notée q). On écrit X $\sim \mathcal{B}$(p) et donc :

$$X \sim B\ (p) \Longleftrightarrow X \begin{cases} \quad valeurspossible & 1 \qquad 0 \\ Probabilits & \quad p \qquad 1-p \end{cases}$$

On a
E(X) = p et V(X) = p(1-p) puisque :

E(X) = 0.(1-p) + 1.p=p

V(X) = E (X^2) - $(E(X))^2$ = 0^2 .(1- p) + 1^2 .p - $p^2 = p(1-p)$.

En pratique la v.a X sera utilisée comme fonction indicatrice d'un événement donné au cours d'une expérience aléatoire (par exemple avoir un appareil tombant en panne avant l'expiration de la garantie, être infecté au cours d'une épidémie, être bénéficiaire pour une entreprise). X prend la valeur 1 si l'évènement se produit et 0 s'il ne se produit pas a l'issue de l'expérience dans ce contexte, p représente la probabilité de l'événement considéré. La v.a X sera une variable de comptage lors de répétitions de l'expérience constituant le processus de Bernoulli décrit ci -après et conduisant notamment à la loi binômiale.

Par convention la réalisation de l'événement sera appelée « succès » et sera codée 1, si non la réalisation sera appelée « échec » et sera codée 0.

1.2.3 Le processus de bernoulli et la loi binomiale B(n,p) :x $\sim$ B(n,P)

Le processus consiste en une suite de répétition de l'expérience aléatoire de Bernoulli, toutes ces répétition successives étant indépendantes les unes des autres. La probabilité de succès à chaque répétition est p. Un processus de Bernoulli est donc modélisé par une suite $X_{1,}X_2, X_3 \ldots\ldots$ de v.a. iid., chacune de loi B(p). Dans se processus on peut s'intéresser à différents type de comptages, menant à différents loi. Nous verrons les plus courants : comptage des succès en s'arrêtant à un nombre de répétitions fixé à l'avance (loi binomiale), comptage des échecs avant d'atteindre le premier succès (loi géométrie), ou le r$^{\text{iéme}}$ succès (loi binomiale négative).

La loi binomiale est la loi de la v.a. X correspondant au nombre de succès au cours de n répétitions du processus de Bernoulli. L'application la plus fréquente se situe dans le domaine des sondages. Ayant sélectionné au hasard n individus dans une grande population, on peut « estimer » la proportion p d'individus ayant un caractère donné (succès) si le taux de sondage est faible, on a vu que l'on pouvait admettre que le tirage sans remise est très proche du tirage avec remise. Pour ce dernier la probabilité de succès à chaque tirage est p et il y a indépendance des tirages. La v.a. X correspond au nombre d'individus ayant le caractère d'intérêt parmi n individus sélectionnés.

La loi binomiale a deux paramètre n et p, et l'ensemble des valeurs possibles est $\{$ 0, 1,2. . . . n$\}$ .Calculons directement la probabilité p(x) d'obtenir x succès parmi n répétition.

Toute suite contenant x succès et n-x échecs a une probabilité $p^x\,(1-p)^{n-x}$ en raison de l'indépendance des répétitions successives, et ceci quel que soit l'ordre d'apparition des succès et des échecs. Imaginons que nous écrivions la succession des résultats avec une séquence de lettres **S** et **E**(succès, échec). Combien y-a-t-il d'écritures possibles .une suite particulière étant parfaitement définie par la position occupées par les x lettres **S**, il suffit de dénombrer combien il y a de choix de x positions parmi n positions. C'est le nombre de combinaisons à x éléments que l'on peut Former à partir de n éléments :

$\binom{n}{x} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

D'où p(x) = $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, toutes ces suites étant distinctes et donc incompatible.

Définition :

On dit que la v.a. discrète X suit une loi binomiale B (n, p) si sa fonction de probabilité est :

P(x)= $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, x = 0, 1,2,. . . ., n

Proposition : soit $X_{1,}X_2 \ldots\ldots$, X_n une suite de v.a. iid de loi B(p),
alors $s_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi B (n, p) .

Ceci est la traduction du nombre de comptage des succès à travers la variable indicatrice de Bernoulli

De cette proposition on déduit que la somme de deux v.a. indépendantes de lois respectives B($n_1, p)$ et B ($n_2, p)$ est une v.a. de loi B $(n_2 + n_1, p)$. en effet cette somme peut être considérée comme celle de $n_2 + n_1$ répétitions indépendantes du processus de Bernoulli avec probabilité p de succès.

Espérance et variance de la loi binomiale

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$E(x) = np\ et\ V(x) = np(1-p)$$

Alors on a :

$$E(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k \cdot (1-P)^{n-k}$$
$$E(x) = n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} P^{k-1} \cdot (1-P)^{n-k}$$
$$on\ pose \begin{cases} K = k-1 \\ N = n-1 \end{cases} etN - K = n-k$$

$$E(x) = n \cdot P \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!\,(N-k)!} P^k \cdot (1-P)^{N-k}$$
$$E(x) = n \cdot P$$
$$Car : \sum_{K=0}^{N} \frac{N!}{K!\,(N-K)!} \cdot P^k\,(1-P)^{N-K} = 1$$

Pour la variance :

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$
$$E\left(x^2\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot P^k \cdot (1-P)^{n-k}$$
$$E\left(x^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot P^k \cdot (1-P)^{n-k}.$$
$$E\left(x^2\right) = n \cdot P \cdot \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} P^{k-1}\,(1-P)^{n-k}$$

on pose :$K = k-1;\ N = n-1;\ N - K = n-k$

$$E\left(x^2\right) = n \cdot P \cdot \sum_{K=0}^{N} (1+K) \cdot \frac{N!}{K!\,(N-K)!} P^K \cdot (1-P)^{N-K}$$
$$E\left(x^2\right) = n \cdot P \cdot \sum_{K=0}^{N} \cdot \frac{N!}{K!\,(N-K)!} P^K \cdot (1-P)^{N-K} + n \cdot p \cdot \sum_{K=0}^{N} K \cdot \frac{N!}{K!\,(N-K)!} P^K \cdot (1-P)^{N-K}$$
$$E\left(x^2\right) = nP + nP \cdot (n-1) = n^2 \cdot P^2 + nP\,(1-P)$$
$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2 = n^2 P^2 + nP\,(1-P) - (nP)^2 = n \cdot P\,(1-P)$$

1.3 Les lois géométriques G(p) et binomiale négative BN(r,p)

Soit un processus de Bernoulli de paramètre p. la loi géométrique g(p), ou loi de pascal, est la loi de la v.a. X (nombre d'échecs avant de parvenir au premier succès).l'ensemble des valeurs possibles est n et la fonction de probabilité est :
P(x)= p $(1-p)^x$, x $\in$ N, car il n'y a qu'une séquence possible : x échecs suivis d'un sucées. On a alors : E(X) = $\frac{1-p}{p}$
V(X) = $\frac{1-p}{p^2}$ La loi binomiale négative est une généralisation de loi géométrique où l'on considère X (nombre d'échecs avant de parvenir au r$^{\text{éme}}$ sucées). Sa fonction de probabilité est : P(X) = $\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} p^r\,(1-p)^x$, x $\in$ N,
En effet pour toute séquence de x échecs et r succès la probabilité est $p^r\,(1-p)^x$ .sachant que le dernier résultat de la séquence doit être un succès, il reste à dénombrer les

séquences avec x échecs et r-1 succès ce qui revient à dénombrer les possibilités de choix de x positions parmi x + r - 1 position, soit $\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix}$.

On a alors : $E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \quad ET \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Démonstration de formule espérance et variance de la loi binômiale négative $\mathcal{BN}$(r, p) :

$$P\left(x\right)=\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix}p^{r}\cdot\left(1-p\right)^{x}, x\in N$$

$$E\left(x\right)=\sum_{x=1}^{\infty}x\cdot\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix}p^{r}\cdot\left(1-p\right)^{x}$$

$$\begin{aligned} x\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} &= x\cdot\frac{(r+x-1)!}{(r-1)!x!} \\ &= x\cdot\frac{(r+x-1)!}{\frac{r!}{r}\cdot x\left(x-1\right)!}\ ,\ r!=r\left(r-1\right)!,\ \left(r-1\right)!=\frac{r!}{r} \\ &= r\frac{(r+x-1)!}{r!\left(x-1\right)!} \\ &= r\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$E\left(x\right)=\sum_{x=1}^{\infty}r\cdot\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x-1 \end{pmatrix}\cdot p^{r}\cdot\left(1-p\right)^{x}$$

$$on\ a\ :\sum\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix}p^{r}\cdot\left(1-p\right)^{x}=1$$

$$\text{posons} : y = x - 1, g = r + 1$$

$$\text{alors} : r + x - 1 = g - 1 + y + 1 - 1 = g + y - 1$$

$$E(x) = r \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \begin{pmatrix} g + y - 1 \\ y \end{pmatrix} \overset{g-1}{p} \cdot (1-p)^{y+1}$$

$$E(x) = \frac{r(1-p)}{p} \cdot \sum_{y=0}^{\infty} \begin{pmatrix} g + y - 1 \\ y \end{pmatrix} p^g \cdot (1-p)^y$$

$$E(x) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad car \qquad \sum_{y=0}^{\infty} \begin{pmatrix} g + y - 1 \\ y \end{pmatrix} p^g \cdot (1-p)^y \ = 1$$

$Pour\ la\ variance$:

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$

$on\ a$

$$E(x(x-1)) = E\left(x^2 - x\right) = E\left(x^2\right) - E(x) ; E\left(x^2\right) = E(x(x-1)) + E(x)$$

$$V(x) = E(x(x-1)) + E(x) - (E(x))^2$$

$Alors;$

$$E(x(x-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \cdot \begin{pmatrix} r + x - 1 \\ x \end{pmatrix} \overset{r}{p} \cdot (1-p)^x \ .$$

$$x(x-1) \cdot \begin{pmatrix} r + x - 1 \\ x \end{pmatrix} = x(x-1) \cdot \frac{(r+x-1)!}{(r-1)! \cdot x!}$$

on déduit :

$$, x! = x(x-1)(x-2)\ldots 1$$

$$(x-2)\ldots 1 = (x-2)!$$

$$x! = x(x-1)(x-2)!$$

$$(x+1)! = (r+1)\, r\, (r-1)!$$

$$, (r-1)! = \frac{(r+1)!}{r(r+1)}$$

$$r+x-1-(x-2)=r+1$$

$$Alors\ on\ a$$

$$\begin{aligned}
x\,(x-1)\cdot\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} &= x\,(x-1)\,\frac{(r+x-1)!}{\frac{(r+1)!}{r(r+1)}\cdot x\,(x-1)\,(x-2)!} \\
&= r\,(r+1)\,\frac{(r+x-1)!}{(r+1)!\,(x-2)!} \\
&= r\,(r+1)\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x-2 \end{pmatrix} \\
E\,(x\,(x-1)) &= \sum_{x=2}^{\infty} r\,(r+1)\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x-2 \end{pmatrix} p^r\cdot(1-p)^x \\
E\,(x\,(x-1)) &= r\,(r+1)\sum_{x=2}^{\infty}\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x-2 \end{pmatrix} \overset{r}{p}\cdot(1-p\ )^x \\
avec\ \sum_{x=2}^{\infty}&\begin{pmatrix} r+x-1 \\ x-2 \end{pmatrix} p^r\cdot(1-p)^x = 1
\end{aligned}$$

on pose

$$y=x-2; x=y+2;$$

$$g=r+2, r=g-2;$$

$$r+x-1=g-2+y+2-1=g+y-1$$

$$E\,(x\,(x-1)) = r\,(r+1)\sum_{y=0}^{\infty}\begin{pmatrix} g+y-1 \\ y \end{pmatrix} p^{g+2}\cdot(1-p)^{y+2}$$

$$E\,(x\,(x-1)) = \frac{r\,(r+1)\cdot(1-p)^2}{p^2}\sum_{y=0}^{\infty}\begin{pmatrix} g+y-1 \\ y \end{pmatrix} p^{g}\cdot(1-p)^{y}$$

$avec:$

$$\sum_{y=0}^{\infty}\begin{pmatrix} g+y-1 \\ y \end{pmatrix} p^{g}\cdot(1-p)^{y} = 1$$

$$V(x) = E(x(x-1)) + E(x) - (E(x))^2$$
$$V(x) = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p} - \left(\frac{r(1-p)}{p}\right)^2$$
$$V(x) = \frac{r(1-p)}{p}\left[\frac{(r+1)(1-p)}{p} + 1 - \frac{r(1-p)}{p}\right]$$
$$V(x) = \frac{r(1-p)}{p}\left[\frac{(r+1)(1-p) + p - r(1-p)}{p}\right]$$
$$V(x) = \frac{r(1-p)}{p^2}(r - rp + 1 - p + p - r + rp)$$
$$V(x) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Espérance et variance de la loi Géométrique :

$$G(P), P(x=k) = p(1-p)^{k-1}.$$
$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(x=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1}$$
$$E(x) = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}$$
$$= p \cdot \left[1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \cdots + n(1-p)^{n-1}\right] .. (1)$$
$$(1-p) \cdot E(x) = p \cdot \left[(1-p) + 2(1-p)^2 + \cdots\cdots\right] \cdots (2)$$
$$(1) - (2)$$
$$E(x) - (1-p)E(x) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^n\right]$$
$$E(x) - (1-p)E(x) = p\left[1 \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\right] = p \cdot \frac{1}{p} \quad ,$$
$$avec : \left(\lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0\right)$$
$$on\ a :\ (1) - (2)$$

On déduit que :

$$E(x)(1 - 1 + p) = 1$$
$$(1) - (2) \Rightarrow E(x) = \frac{1}{p}.$$

Pour la variance : V(x)

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$
$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} - (E(x))^2$$
$$E\left(x^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P(1-p)^{k-1}$$
$$E\left(x^2\right) = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}.$$
$$\text{on a } : k^2 (1-p)^{k-1} = -\frac{d}{dp} \cdot \left(k(1-p)^k\right).$$
$$E\left(x^2\right) = -p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} \cdot \left(k \cdot (1-p)^k\right)$$
$$E\left(x^2\right) = -p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} \cdot \left(k(1-p)^k\right) \text{ avec } E(x) = \sum k \cdot p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$
$$E\left(x^2\right) = -P \cdot \frac{d}{dP} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(1-p)^{k-1} \cdot \frac{(1-p)}{p}\right]$$
$$E\left(x^2\right) = -p \cdot \frac{d}{dp} \cdot \frac{(1-p)}{p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1}.$$
$$E\left(x^2\right) = -p \cdot \frac{d}{dp} \cdot \frac{(1-p)}{p} \cdot \frac{1}{p}.$$
$$E\left(x^2\right) = -p \cdot \frac{d}{dp} \cdot \left(\frac{1-p}{p^2}\right).$$
$$\left(\frac{1-p}{p^2}\right)' = \frac{-p^2 - 2p(1-p)}{p^4}$$
$$\left(\frac{1-p}{p^2}\right)' = \frac{p^2 - 2p}{p^4} = \frac{p-2}{p^3}$$
$$E\left(x^2\right) = -p \cdot \frac{p-2}{p^3} \Rightarrow E\left(x^2\right) = \frac{2-p}{p^2}$$
$$\text{Alors, } V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \Rightarrow V(x) = \frac{1-p}{p^2}$$

1.3.1 Loi hypergéométrique :H(N,n,P)

Soit un ensemble de N individus dont n possèdent un certain caractère, que nous appellerons (succès) par analogie avec la loi binomiale, et N - n ne la possèdent pas. On effectue un tirage aléatoire sans remise de p individus dans cet ensemble. On entend par la que chacun des $\binom{N}{p}$ échantillons de taille n possibles a la même probabilité 1/ $\binom{N}{p}$ d'être sélectionné.

On considère la v.a X (nombre de succès observés parmi les p individus).on a alors la fonction de probabilité : P(x) = $\frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{p-x}}{\binom{N}{p}}$, $x = 0, 1, \ldots, n.$

Le numérateur correspond au nombre de choix de x individus parmi n et p-x parmi N-n. avec comme valeurs possibles $\{$ 0,1,. . . ., n$\}$ nous supposons que n et N-n sont supérieurs à p toutefois si p>n alors la plus grande valeur possible est n et si p> N-n la plus petite valeur possible est p-(N-n).

nous pouvons garder la formule générale ci-dessus en convenant que $\binom{a}{b} = 0 \; si \; a < b.$

Espérance et variance :

$E\left(x\right) = n \cdot p$ et $V\left(x\right) = n \cdot P\left(1 - P\right) \frac{N-n}{N-1}$

k	k'=k-1
1	0
.	.
.	.
n	n-1

TABLE 1.1 – Espérance et variance

Alors

$$E\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} = \frac{\alpha}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \sum_{k}^{n} \begin{pmatrix} a-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ n-k \end{pmatrix}$$

$$on\ pose \begin{cases} k' = k-1 \\ k = k'+1. \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{a}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \sum_{k'=0}^{n-1} \begin{pmatrix} a-1 \\ k' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ n-1-k' \end{pmatrix}$$

ou

$$E(x) = \frac{a}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} a-1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ n-1-k \end{pmatrix}$$

$$E(x) = \frac{a}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} a-1+b \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

Appliquant la formule de VDM (vendermoon)

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{a}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a \cdot (N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!} \cdot \frac{n!\,(N-n)!}{N!} \\ E(x) &= \frac{a \cdot n}{N} = n \cdot p \quad , \left(\frac{a}{N} = p\right) \end{aligned}$$

Pour la variance :

$$\begin{aligned} E(x(x-1)) &= E\left(x^2 - x\right) \\ &= E\left(x^2\right) - E(x) \\ V(x) &= E\left(x^2\right) - (E(x))^2 \\ V(x) &= n \cdot P(1-P) \times \frac{N-n}{N-1} \end{aligned}$$

$$p\,(x=k)=\frac{\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

$$changement\ d'indice\ P\,(x=k)=\frac{\begin{pmatrix} NP \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N\,(1-p) \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

1.3.2 La loi multinomiale :

Il s'agit d'une extension de la situation binaire (succès, échec) de la loi binomiale, à une situation à c catégories, de probabilités respectives $p_1 + p_2$,. . . , p_c $avec$ $\sum_{k=1}^{c} p_k$ =1. On s'intéresse aux fréquences observées $N_1 + N_2$,. . . , N_c des différentes catégories au cours de n observations répétées indépendantes.la fonction de probabilité conjointe des v.a. $N_1 + N_2$,. . . , N_c est : P ($N_1 = n_1$, $N_2 = n_2$,. . . ., $N_c = n_c$) = $\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_c!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}$ . . . . $p_c^{n_c}$ Si tous les n_k (k de 1 à c) appartiennent à { 0, 1,2,. . . ..., n} et vérifient la contrainte $\sum_{k=1}^{c} n_k$ = n, la probabilité étant nulle sinon. Ceci s'établit par le même type de raisonnement que pour la loi binomiale. Le terme $p_1^{n_1} p_2^{n_2}$ . . . . $p_c^{n_c}$ correspond à la probabilité de toute série de n répétitions avec n_1 d'entre elles donnant la catégorie 1, n_2 donnant la catégorie 2 ,. . . .et n_c donnant la catégorie c. le terme avec les factoriels correspond au nombre de séries de ce type possibles (nombre de façons d'occuper n_1 position parmi les n successions pour la catégorie 1, n_2 positions pour la catégorie 2,. . . .., n_c pour la catégorie c).

On donne $E(X) = n\,p_i$ et $V(X) = n\,p_i(1 - \ p_i)$

1.3.3 Le processus et la loi de poisson p(λ) :

On considère un processus d'occurrences d'un événement donné sur l'échelle du temps, par exemple l'arrivée des appels à un standard téléphonique. Pour un temps t > 0 fixé (à partir d'une certaine origine des temps) on définit la variable aléatoire X(t) (nombre d'occurrence dans l'intervalle]0,t[ ) par commodité on pose

p_k (t) = p(X(t) = k), où k $\in$ N.

En bref, on dit qu'on a un processus de poisson si : -il y a une invariance temporelle, à savoir que p_k (t) ne dépend pas de l'origine des temps, mais dépend uniquement de la longueur t de l'intervalle, quels que soient k et t; -il y a indépendance des nombres d'occurrences pour deux intervalle disjoints; -pour un très petit intervalle la probabilité d'avoir deux occurrences ou plus est négligeable devant la probabilité d'avoir une occurrence exactement et cette dernière est proportionnelle à la longueur de cet intervalle plus

formellement : p_1 (h) = λ h +o(h) $\sum_{k=2}^{\infty} p_k$ (h) = o(h) Où, rappelons-le, o(h) est une fonction telle que $\frac{o(h)}{h}$ N $\rightarrow 0$ quand h $\rightarrow 0$. Le paramètre λ > 0 caractérise l'intensité de fréquence des occurrences sous ces hypothèses on démontre que : p_k (t) = $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k)}{k!}$, k $\in$ N. La loi de poisson est la loi du nombre d'occurrences dans une unité de temps, donc pour t=1 dans la formulation ci-dessous. Par conséquent on dit que la v.a. X suit une loi de poisson p(λ) si sa fonction de probabilité est : p (k) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, k $\in$ N Sachant que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ = e^{λ} , la somme des probabilités est bien égale à 1.on a alors :
E(X) = λ
et
V(X) = λ.

Espérance et variance :

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = \lambda$$

$$E(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(x^2) = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$D'ou\ \ V(x) = \lambda$$

1.4 Les lois continues :

1.4.1 La loi exponentielle :

$$E(x) = \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot t e^{-\lambda t} dt$$

$$Posons\; u(t) = t \quad , \quad u^{'}(t) = 1 \;, (uv)' = u^{'}v + v'u \;.$$

$$V^{'}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$V^{'}(t) = -\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right), V(t) = -e^{-\lambda t}, \int uv^{'} = uv - \int u^{'} \cdot v.$$

$$E(x) = \left[-t \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t} dt$$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{-1}{\lambda} \int_0^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{-1}{\lambda} \left[e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda}\left[0 - e^0\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

$$Alors : E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$pour\;\; la\; variance$

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$

$$E\left(x^2\right) = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

$$u(t) = t^2, u'(t) = 2t$$

$$V'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, V(t) = -e^{-\lambda t}$$

$$E\left(x^2\right) = \left[-t^2 \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2t \cdot e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-\lambda t} dt.$$

$$E\left(x^2\right) = \int_0^{+\infty} 2t \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda},\; E(x) = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Alors} \;, \quad E\left(x^2\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{Alors,} \;\; V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

1.4.2 La loi continue uniforme U[a,b] :

F(x) = $\begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \ \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$

$$E\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{B-a}\mathbb{1}_{[a,b]}\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{B-a}dx$$
$$E\left(x\right)=\frac{1}{B-a}\cdot\left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{a}^{B}=\frac{B^{2}-a^{2}}{2\left(B-a\right)}=\frac{a+B}{2}$$

Pour la variance :

$$E\left(x^{2}\right)=\frac{B^{3}-a^{3}}{3\left(B-a\right)}=\frac{B^{2}+a\cdot B+a^{2}}{3}$$
$$V\left(x\right)=E\left(x^{2}\right)-\left(E\left(x\right)\right)^{2}$$
$$V\left(x\right)=\frac{B^{2}+a\cdot B+a^{2}}{3}-\frac{\left(a+B\right)^{2}}{4}$$
$$V(x)=\frac{(B-a)^{2}}{12}$$

1.4.3 Loi gamma G(α,λ) :

par définition on a :
$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot e^{-\lambda x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot\mathbb{1}_{R_+^*}(x)$

$$E\left(x\right)=\int_{R}x\cdot f_{X}\left(x\right)dx.$$
$$E\left(x\right)=\int_{R}x\cdot\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\cdot e^{-\lambda x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot\mathbb{1}_{x>0}dx$$
$$E\left(x\right)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\cdot x^{\alpha}\cdot e^{-\lambda x}dx\quad,\quad V^{'}\left(x\right)=e^{-\lambda x},\ \mathrm{V}\left(x\right)=\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}$$
$$u^{'}\left(x\right)=\alpha\cdot x^{\alpha-1},\ \ u\left(x\right)=x^{\alpha}.$$
$$E\left(x\right)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\cdot\left(\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\cdot x^{\alpha}\right]_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}dx\right)$$
$$E\left(x\right)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\cdot\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}dx;\ \ y=\lambda x;\ \Gamma\left(\alpha\right)=\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx.$$

$$Alors\,;\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-y}\cdot\frac{1}{\lambda}dy;\;\; dy=\lambda dx;\; dx=\frac{1}{\lambda}dy;\; x=\frac{y}{\lambda}$$

$$\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda\cdot\lambda^{\alpha-1}}\int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1}\cdot e^{-y}dy \quad \text{avec} \quad \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}dy=\Gamma(\alpha)$$

$$E(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\cdot\Gamma(\alpha)=\frac{\alpha}{\lambda}$$

Pour la variance :

$$V(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2}\cdot f(x)\,dx-(E(x))^{2}$$

$$V(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}x^{\alpha+1}\;\mathrm{d}x-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty} e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha+1}\cdot\frac{dy}{\lambda}-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}};$$

posons $y=\lambda x$.

$$V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{\alpha+1}\cdot dy-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}.$$

$$V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{\lambda^{\alpha-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{\alpha+1}dy-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}$$

$$V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{\lambda^{-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{\alpha+1}dy-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}$$

$$V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^{2}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{\alpha+1}dy-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}$$

$$V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^{2}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha+2)-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}=\frac{1}{\lambda^{2}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}$$

$$\text{Ona}\;\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx$$

$$\text{et}\;\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\text{et}\;:\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$$

$$\text{Alors}\,:V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^{2}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}$$

$$V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^{2}\cdot\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}=\frac{(\alpha+1)\cdot\alpha}{\lambda^{2}}-\frac{\alpha^{2}}{\lambda^{2}}=\frac{\alpha^{2}+\alpha-\alpha^{2}}{\lambda^{2}}=\frac{\alpha}{\lambda^{2}}$$

1.4.4 Loi normale :

il s'agit ,comme on de sait, de la loi de probabilité fondamentale de la statistique .
On dit que la variable aléatoire x suit une loi de gauss, ou loi normale, notée N(μ,σ^2), si elle a pour densité :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^{2}}{\sigma^{2}}},x\in R$$

Les paramètres sont notés $\mu\ et\ \sigma^2$ du fait qu'ils correspondent respectivement à la moyenne et à la variance de la loi, σ étant donc son écart-type. Le graphe de la densité est la fameuse courbe en cloche symétrique autour de la valeur μ. Pour μ =0 et σ^2 = 1 on a la loi de gauss centrée -réduite N(0;1) .

Espérance de la loi normale :

$$\begin{aligned} & E(x) = \mu. \\ ie: \quad & E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx. \\ & E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \end{aligned}$$

Changement de variable :

$$\begin{aligned} & \frac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \sigma t + \mu \Rightarrow dx = \sigma dt \\ & E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \sigma \cdot dt \\ & \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\sigma \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt\right) \\ & E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} -t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \sqrt{2\pi} \cdot \mu\right) \\ & \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\sigma \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \sqrt{2\pi}\mu\right) \\ \text{dc : } & E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \mu \\ \Rightarrow & E(x) = \mu. \end{aligned}$$

Pour la variance

$$Var(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$

sachant que

$$\begin{aligned}
E(x) &= \mu \\
E\left(x^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx,
\end{aligned}$$

posons $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \sigma t + \mu \Rightarrow dx = \sigma dt$

$$\begin{aligned}
E\left(x^2\right) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma^2 \cdot t^2 + \mu^2 + 2\sigma\mu t\right) e^{-\frac{1}{2}\cdot t^2} \sigma dt \\
E\left(x^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + 2\sigma\mu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt\right) \\
J &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -2 \int_0^{+\infty} t\,(-t)\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
U &= t \Rightarrow dU = dt; \;\; dv = (-t)\, e^{-\frac{1}{t}t^2} dt \Rightarrow V = e^{-\frac{1}{2}t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors : } J &= -2\left(\left[t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}t^2} dt\right) \\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \Rightarrow J = \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\text{Alors : } E\left(x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sigma^2 \cdot \sqrt{2\pi} + \mu^2 \cdot \sqrt{2\pi}\right) = \sigma^2 + \mu^2$$

d' ou : $\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$

Alors : $si\ x \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

alors :

$E(x) = \mu$ et $v(x) = \sigma^2$

1.4.5 Loi de Paréto :

Cette loi a été introduite pour modéliser la distribution de revenus supérieurs à un seuil donné, puis s'est avérée utile pour d'autres phénomènes (par exemple la distribution de la taille de gains de sable passés au travers d'un tamis). Elle a deux paramètre strictement positive, le paramètre de seuil a et un paramètre de forme θ . La fonction de densité est donné par :

$$
\begin{aligned}
f_{a,\theta}(x) &= \frac{\theta}{a} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{\theta+1} \cdot \mathbb{1}_{]a,+\infty[} \\
E_{a,\theta}(x) &= \int_a^{+\infty} x \cdot \frac{\theta}{a} \cdot \frac{a^{\theta+1}}{x^{\theta+1}} dx = \int_a^{+\infty} \theta \cdot x^{1-\theta-1} \cdot a^{-1+\theta+1} dx \\
E_{a,\theta}(x) &= \theta \cdot a^{\theta} \int_a^{+\infty} x^{-\theta} dx \\
E_{a,\theta}(x) &= \theta \cdot a^{\theta}. \left[\frac{1}{1-\theta} \cdot x^{1-\theta}\right]_a^{\infty} = \theta \cdot a^{\theta} \left[a - \frac{1}{1-\theta} \cdot a^{1-\theta}\right] \\
E_{a,\theta}(x) &= \frac{\theta \cdot a^{\theta+1-\theta}}{\theta-1} = \frac{\theta \cdot a}{\theta-1} \\
E_{a,\theta}\left(x^2\right) &= \int_a^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\theta}{a} \cdot \frac{a^{\theta+1}}{x^{\theta+1}} dx \\
&= \int_a^{+\infty} \theta \cdot a^{-1+\theta+1} \cdot x^{2-\theta-1} \cdot dx \\
E_{a,\theta}\left(x^2\right) &= \theta . a^{\theta} \cdot \int_a^{+\infty} x^{1-\theta} \cdot dx \\
&= \theta \cdot a^{\theta} \left[\frac{1}{2-\theta} \cdot x^{2-\theta}\right]_a^{+\infty} = \theta \cdot a^{\theta} \left[0 - \frac{1}{2-\theta} a^2\right] \\
E_{a,\theta}\left(x^2\right) &= \frac{\theta \cdot a^{\theta+2-\theta}}{\theta-2} = \frac{\theta \cdot a^2}{\theta-2} \\
V_{a,\theta}(x) &= E_{a,\theta}\left(x^2\right) - \left(E_{a,\theta}(x)\right)^2 \\
&= \frac{\theta \cdot a^2}{\theta-2} - \left(\frac{\theta \cdot a}{\theta-1}\right)^2 \\
&= \frac{\theta \cdot a^2 \cdot (\theta-1)^2 - \theta^2 \cdot a^2}{(\theta-1)^2 \cdot (\theta-2)} \\
V_{a,\theta}(x) &= \frac{\theta \cdot a^2 \cdot (\theta^2 - 2\theta + 1) - \theta^3 a^2 + 2\theta^2 \cdot a^2}{(\theta-1)^2 \cdot (\theta-2)} \\
V_{a,\theta}(x) &= \frac{\theta \cdot a^2}{(\theta-1)^2 \cdot (\theta-2)}
\end{aligned}
$$

1.4.6 Loi log-normale :

Cette loi fournit souvent un bon modèle pour les variables strictement positives
Soit X une v.a. à valeurs strictement positive, on dit qu'elle suit une loi log-normale de paramètre de paramètre μ et σ^2 ,
notée LN(μ , σ^2) , si lnX $\sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1(\ln \cdot x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx, y = \ln x - \mu, y \in (-\infty, +\infty)$$

et : $y + \mu = \ln x \Rightarrow x = e^{y+\mu}$

$$\Rightarrow dx = xdy = e^{y+\mu} \cdot dy$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{y+\mu} \cdot dy$$

$$E(x) = e^{\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} \cdot dy \cdots (*) .$$

Alors : $ona \qquad -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot y^2 + y = a \cdot y^2 + by + c$

$$On\ applique: \ ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

Alors : $-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot y^2 + 1y + 0$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\left(y + \frac{1}{2\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)}\right)^2 + 0 - \frac{1}{4\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)^2}\right)$$

ie : $\frac{-1}{2\sigma^2} y^2 + 1y + 0$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \left(\left(y - \sigma^2\right)^2 - \sigma^4\right)$$

on obitent : $(*) \Rightarrow e^{\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\left(y-\sigma^2\right)^2} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}} \cdot dy$

$$(*) \Rightarrow e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-\sigma^2\right)^2} dy$$

d' ou : $E(x) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ car : $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-\sigma^2\right)^2} \cdot dy = 1$

pour la variance :

$$V(x) = E\left(x^2\right) - \left(E(x)\right)^2 .$$

$$E\left(x^2\right) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot x \cdot e^{\frac{-(\ln \cdot x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx;\ y = \ln x - \mu; x = e^{y+\mu}; dx = e^{y+\mu} dy$$

$$E\left(x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{y+\mu} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{y+\mu} \cdot dy$$

$$= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+2y} \cdot dy \ldots . (*)$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot y^2+2y+0 &= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\left(y+\frac{2}{2\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}\right)^2+0-\frac{4}{4\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)^2}\right)\\
&= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\left(y-2\sigma^2\right)^2-4\sigma^2\right)\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-2\sigma^2\right)^2+2\sigma^2\\
(*) \Rightarrow e^{2\mu+2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} & e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-2\sigma^2\right)^2}\cdot dy = e^{2\mu+2\sigma^2}\\
car \quad \int_{-\infty}^{+\infty} & e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-2\sigma^2\right)^2}dy=1\\
d^{'}ou: \quad V(x) &= e^{2u+2\sigma^2}-e^{2u+\sigma^2}=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)
\end{aligned}
$$

1.4.7 La Loi Bêta : $X \sim B(\alpha, B)$

Cette loi fournit un modèle pour les mesures comprises entre 0 et 1, en particulier pour des taux ou des proportions .sa densité est :

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{B-1}}{B(\alpha,B)}\cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\\
B(\alpha,B) &= \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(B)}{\Gamma(\alpha+B)}\\
\Gamma(\mu) &= \int_0^{\infty} x^{\mu-1}\cdot e^{-x}dx\\
\Gamma(\mu+1) &= \mu\Gamma(\mu).\\
&\forall\mu\in N^*,\Gamma(\mu)=(\mu-1)!\\
E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot\frac{x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{B-1}}{B(\alpha,B)}\cdot dx.\\
E(x) &= \frac{B(\alpha+1,B)}{B(\alpha,B)}\cdot\int_0^1\frac{x^{(\alpha+1)-1}\cdot(1-x)^{B-1}}{B(\alpha+1,B)}dx\\
E(x) &= \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(B)}{\Gamma(\alpha+1+B)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(B)}{\Gamma(\alpha+B)}}\cdot 1 \qquad car \quad \int_0^1\frac{x^{(\alpha+1)-1}\cdot(1-x)^{B-1}dx}{B(\alpha+1,B)}=1\\
E(x) &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+B)}{(\alpha+B)\Gamma(\alpha+B)}=\frac{\alpha}{\alpha+B}\\
E\left(x^2\right) &= \int_0^1 x^2\cdot\frac{x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{B-1}}{B(\alpha,\beta)}dx=\frac{B(\alpha+2,B)}{B(\alpha,B)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(x^2\right) &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+B)}{\Gamma(\alpha+B+2)} \\
\Gamma(\alpha+2) &= (\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\,\alpha\Gamma(\alpha) \\
E\left(x^2\right) &= \frac{\alpha(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+B)}{(\alpha+B)(\alpha+B+1)\,\Gamma(\alpha+B)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+B)(\alpha+B+1)}
\end{aligned}
$$

Pour la variance :

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$

$$V(x) = \frac{\alpha B}{(\alpha+B)^2 \cdot (\alpha+B+1)}$$

1.4.8 Loi de weibull :

Cette loi généralise la loi exponentielle pour modéliser des durées de vie. Elle intervient également dans les problèmes dits de valeurs extrêmes (par exemple l'occurrence de crues exceptionnelle d'une rivière) la fonction de densité de cette loi, notée W($\lambda, \alpha)$ où $\lambda et \lambda$ sont deux paramètres strictement positives,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha \cdot \lambda \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x^\alpha} \text{si } x > 0 \;. \\
E(x) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x^\alpha} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \alpha \cdot \lambda \cdot x^{\alpha} \cdot e^{-\lambda x^\alpha} dx.
\end{aligned}
$$

On pose $y = \lambda x^\alpha \Rightarrow x^\alpha = \dfrac{y}{\lambda} \Rightarrow x = \left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

Alors : $dx = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{\lambda} \cdot \left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot dy \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\alpha\lambda} \cdot \left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot dy$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} \alpha \cdot y \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$$

$$E(x)=\frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^{+\infty}y\cdot e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot dy=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot y^{1+\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot dy$$

$$E(x)=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot y^{\frac{1}{\alpha}}\cdot dy$$

Alors : $\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot y^{\frac{1}{\alpha}}\cdot dy$, $g'=e^{-y}\rightarrow g=-e^{-y}, f=y^{\frac{1}{\alpha}}\rightarrow f'=\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}$

$$\int_0^{+\infty}e^{-y}\cdot y^{\frac{1}{\alpha}}dy=\left[-y^{\frac{1}{\alpha}}\cdot e^{-y}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha}\cdot y^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot e^{-y}\cdot dy$$

$$=0-0+\frac{1}{\alpha}\cdot\int_0^{+\infty}y^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot e^{-y}\cdot dy$$

Alors : $E(x)=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}y^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot e^{-y}dy$

posons $\frac{1}{\alpha}=B$ on obtient : $E(x)=\frac{1}{\lambda^B}\cdot B\int_0^{+\infty}y^{B-1}\cdot e^{-y}\cdot dy$

dc : $E(x)=\frac{1}{\lambda^B}.B.\Gamma(B)=\frac{B\Gamma(B)}{\lambda^B}=\frac{\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}]$

Pour la variance :

$$V(x)=E\left(x^2\right)-(E(x))^2$$

$$V(x)=E\left(x^2\right)-\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2$$

$$E\left(x^2\right)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\alpha\cdot\lambda\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x^\alpha}dx=\int_0^{+\infty}\alpha\cdot\lambda\cdot x^{1+\alpha}\cdot e^{-\lambda x^\alpha}dx;\ y=\lambda x^\alpha$$

$$E\left(x^2\right)=\int_0^{+\infty}\alpha\cdot y\cdot\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot e^{-y}\cdot\frac{1}{\alpha\lambda}\cdot\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot dy$$

$$E\left(x^2\right)=\frac{1}{\lambda\cdot\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\int_0^{+\infty}y\cdot(y)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot e^{-y}\cdot y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot dy$$

$$E\left(x^2\right)=\frac{1}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}\cdot\int_0^{+\infty}y^{\frac{2}{\alpha}}\cdot e^{-y}\cdot dy$$

$$E\left(x^2\right)=\frac{1}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}\cdot\int_0^{+\infty}y^{\frac{2}{\alpha}}\cdot e^{-y}\cdot dy$$

on a : $\int_0^{+\infty}y^{\frac{2}{\alpha}}\cdot e^{-y}\cdot dy, g'=e^{-y}\rightarrow g=-e^{-y}, f=y^{\frac{2}{\alpha}}\rightarrow f'$

$=\frac{2}{\alpha}\cdot y^{\frac{2}{\alpha}-1}$

$$\int_0^{+\infty}y^{\frac{2}{\alpha}}\cdot e^{-y}\cdot dy=\left[-y^{\frac{2}{\alpha}}\cdot e^{-y}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2}{\alpha}\cdot y^{\frac{2}{\alpha}-1}\cdot e^{-y}dy$$

$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}y^{\frac{2}{\alpha}-1}\cdot e^{-y}\cdot dy$$

$$dc : E\left(x^2\right) = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}} \cdot \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} y^{\frac{2}{\alpha}-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

on pose $\dfrac{2}{\alpha} = B$. on obtient :

$$E\left(x^2\right) = \frac{1}{\lambda^{\beta}} \cdot B \cdot \int_0^{+\infty} \cdot y^{B-1} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

Alors : $V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^{\beta}} \cdot B \cdot \int_0^{+\infty} y^{B-1} \cdot e^{-y} \cdot dy - (E(x))^2$$

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^{B}} \cdot B \cdot \Gamma(B) - (E(x))^2$$

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}} \cdot \frac{2}{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)^2}{\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2}$$

$$V(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2}$$

$$V(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}$$

$$V(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}$$

1.4.9 La loi de Gumbel :

C'est une autre loi de modélisation de valeurs extrêmes dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} . e^{-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}, \qquad x, \mu \in R, \sigma > 0$$

On montre que sa moyenne est $\mu + \sigma\gamma$ et que sa variance est $\frac{\pi^2}{6} \cdot \sigma^2$

$$E(x) = \mu + \sigma\gamma. \quad , v(x) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sigma^2$$

Espérance et variance :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \cdot e^{-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}} dx$$

$$y = e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}, dy = \left(\frac{-1}{\sigma}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} dx, x = \mu - \sigma \ln \cdot y.$$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} (\mu - \sigma \ln y) e^{-y} \cdot dy$$
$$E(x) = \mu - \sigma \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[y^\alpha \cdot e^{-y}\right]_{\alpha=0} dy = \mu - \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_0^{+\infty} y^\alpha \cdot e^{-y} \cdot dy\right]_{\alpha=0}$$
$$E(x) = \mu - \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} [\Gamma(\alpha+1)]_{\alpha=0} = \mu - \sigma\Gamma'(\alpha+1)|_{\alpha=0} = \mu - \sigma\Gamma'(1)$$
$$E(x) = \mu - \sigma(-\gamma) = \mu + \sigma\gamma.$$
$$\text{Note } : f(y, \alpha) = y^\alpha \cdot e^{-y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = y^\alpha \cdot \log(y) \cdot e^{-y}.$$

Pour la variance :

$$V(x) = E\left(x^2\right) - (E(x))^2$$
$$V(x) = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sigma^2$$

1.4.10 La loi Khi-deux :

Soient $x_1 \ldots, x_k, \kappa$ variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de moyennes 0 et d'écart-type 1 ,alors par d définitions la variable x , tell que :

$$X := \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

Suit une loi du χ^2 a k degrés de liberté on notera $\chi^2(k)$ ou χ^2_κ la loi de x La densité de probabilité de x notée f_X sera : $f_x(x;k) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ Pour tout x positif ou Γ est la fonction gamma

$$(1)\, \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{n-1} dx$$
$$(2)\, \frac{\Gamma(x)}{a^n} = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot x^{n-1} dx$$
$$(3)\, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Démonstration de formule espérance et variance :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx$$
$$E(x) = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\left(\frac{k}{2}+1\right)-1} \cdot dx.$$
$$E(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1}}$$
$$car : \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n} \cdot \text{avec} \ : \quad a = \frac{1}{2}, n = \frac{k}{2}+1$$
$$Alors :$$
$$E(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\frac{k}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$E(x) = \frac{k}{2} \cdot 2 = k \ .$$

Pour la variance :

$$V(x) = E\left(x^2\right) - \left(E(x)\right)^2$$
$$E\left(x^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$$
$$E\left(x^2\right) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx$$
$$E\left(x^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\left(\frac{k}{2}+2\right)-1} \cdot dx$$
$$E\left(x^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}+2}}$$
$$Car :$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot x^{n-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n} . \text{avec } a = \frac{1}{2} \text{ et } n = \frac{k}{2}+2$$
$$Alors :$$
$$E\left(x^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$E\left(x^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right) \cdot \frac{k}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\frac{1}{4}}$$
$$= \left(\frac{k}{2}+1\right) \cdot \frac{k}{2} \cdot (4)$$

$$\mathbb{E}\left(x^2\right) = k^2 + 2k.$$

Alors

$$\mathbb{V}(x) = E\left(x^2\right) - \left(E(x)\right)^2 = k^2 + 2k - k^2$$
$$\mathbb{V}(x) = 2k.$$

1.4.11 La loi student

une variable aléatoire X suit la loi de student à n degrés de liberté si elle est absolument continue et admet pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}, -\infty < t < +\infty$$

Espérance et variance :

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot tdt.$$
$$\text{on a} : g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{n\pi}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot tdt.$$

et

$$g(-t) = -g(t) \Rightarrow g(t) \text{ est impair}$$
$$dc : E(t) = 0.$$
$$var(t) = E\left(t^2\right) - \left(E(t)\right)^2 = E\left(t^2\right)\ car \left(E(t)\right)^2 = 0$$
$$var(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t) \cdot dt$$

On pose

$$
\begin{aligned}
&: \frac{t^2}{n} = p, t = \sqrt{np}, dt = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{p}} \cdot dp. \\
var\,(t) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{n \cdot \pi}} (1+p)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot (np) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{p}} \cdot dp \\
var\,(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}} \left(\frac{p}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot dp. \\
\text{on pose } &: \frac{p}{1+p} = r \Rightarrow p = r + r \cdot p \Rightarrow p = \frac{r}{1-r}\,. \\
var \cdot (t) &= \int_0^{1} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{r} \cdot (1-r)^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\frac{(1-r)\cdot(1) - r\,(-1)}{(1-r)^2}\right] dr \\
var\,(t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_0^1 r^{\frac{1}{2}} \cdot (1-r)^{\frac{n}{2}-2}\, dr\right] \cdot, B \text{ fonction}, B\left(\frac{3}{2}, \frac{n}{2} - 1\right) \\
\text{var }\ (t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
Dc : var\,(t) &= \frac{n}{n-2}
\end{aligned}
$$

1.4.12 La loi de Fisher

On dit qu'une variable aléatoires x suit la loi de Fisher de paramètres n_1 et n_2 si elle admet une densité qui vaut

$$
f\,(F) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot F^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) \left[1 + \frac{n_1}{n_2}\right]^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \quad , \quad 0 \leq F \leq +\infty
$$

Espérance et variance

$$E\left(F\right)=\int_{0}^{+\infty}F\cdot f\left(F\right)dF.$$

$$E\left(F\right)=\int_{0}^{+\infty}F\cdot\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\cdot F^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

$$E\left(F\right)=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}\frac{F^{\frac{n_1}{2}+1-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}dF.$$

$On\ pose:$

$$y=\frac{n_1}{n_2}\cdot F,\frac{n_2}{n_1}y=F,dy=\frac{n_1}{n_2}dF,\frac{n_2}{n_1}dy=dF.$$

$$E\left(F\right)=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}y\right)^{\frac{n_1}{2}+1-1}}{(1+y)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}\cdot\frac{n_2}{n_1}dy$$

$$E\left[F\right]=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\cdot\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}+1-1}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\cdot\frac{n_2}{n_1}\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{y^{\frac{n_1}{2}+1-1}\cdot dy}{(1+y)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}$$

$$E\left(F\right)=\frac{\frac{n_2}{n_1}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}\frac{y^{\frac{n_1}{2}+1-1}}{(1+y)^{\frac{n_1}{2}+1+\frac{n_2}{2}-1}}dy$$

$$E\left(F\right)=\frac{\frac{n_2}{n_1}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\cdot B\left(\frac{n_1}{2}+1,\frac{n_2}{2}-1\right)$$

$$E\left(F\right)=\frac{\frac{n_2}{n_1}}{\frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}\right)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1+\frac{n_2}{2}-1\right)}$$

$$E\left(F\right)=\frac{\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n_2}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}$$

$$E(F)=\frac{n_2}{2\frac{n_2}{2}-1}=\frac{n_2}{2\cdot\frac{n_2-2}{2}}=\frac{n_2}{n_2-2}$$

Pour la variance : $(Var)(F)=E\left(F^2\right)-(E(F))^2$

$$E\left(F^2\right)=\int_0^{+\infty}F^2\cdot f(F)\,dF.$$

$$E\left(F^2\right)=\int_0^{+\infty}\frac{F^2\cdot\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\cdot F^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}dF.$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{F^{\frac{n_1}{2}+2-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}F\right)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}dF.$$

on pose : $y=\dfrac{n_1}{n_2}F, dy=\dfrac{n1}{n_2}\mathbf{dF}\,,\ \dfrac{n_2}{n_1}dy=dF, \dfrac{n_2}{n_1}y=F$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\cdot y\right)^{\frac{n_1}{2}+2-1}\cdot\frac{n_2}{n_1}}{(1+y)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}\cdot dy$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}+2-1}\cdot\frac{n_2}{n_1}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{n_1}{2}+2-1}}{(1+y)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\cdot B\left(\frac{n_1}{2}+2,\frac{n_2}{2}-2\right)$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}\right)}}\frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+2\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+2+\frac{n_2}{2}-2\right)}$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{n_1}{2}+2-1}}{(1+y)^{\frac{n_1}{2}+2+\frac{n_2}{2}-2}}dy$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\left(\frac{n_2}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-1\right)}$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cdot\left(\frac{n_1}{2}+1\right)\cdot\frac{n_1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n_2}{2}-1\right)\left(\frac{n_2}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-2\right)}$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cdot\left(\frac{n_1}{2}+2\right)\cdot\frac{n_1}{2}}{\left(\frac{n_2-2}{2}\right)\left(\frac{n_2-4}{2}\right)}$$

$$E\left(F^2\right)=\frac{n_2^2\left(n_1+2\right)}{n_1\cdot\left(n_2-2\right)\left(n_2-4\right)}$$

$$V(F) = E\left(F^2\right) - \left(E(F)\right)^2$$

$$V(F) = \frac{n_2^2 (n_1 + 2)}{n_1 (n_2 - 2)(n_2 - 4)} - \left(\frac{n_2}{n_2 - 2}\right)^2$$

$$V(F) = \frac{2n_2^2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 (n_2 - 4)(n_2 - 2)^2}$$

Chapitre 2

Fonctions caractéristiques

2.1 fonctions caractéristiques :

définition : Soit X une variable aléatoire on appelle fonction caractéristique de X la fonction φ_X définie sur R ,à valeurs complexe , par $\varphi_X(t) = E(e^{itx})$),
Quelle que soit t $\in$ **R.**
En pratique, suivant les cas, la formule est différente :
-si X est une variable discrète finie : $\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{itx_j}.p(X = x_j)$.
- si X est une variable discrète dénombrable, $\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j}.p(X = x_j)$.
- si X est une variable réelle, $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} . f(x)\, dx$
Ainsi, dans le cas d'une variable aléatoire à densité, la fonction caractéristique est la transformée de fourier inverse (à un facteur 2 π prés dans l'exponentielle suivant la convention) de la densité probablement pour cette raison , il arrivé que l'on choisisse une convention différente, à savoir $\varphi_X(t) = E[e^{2i\pi tx}$], on notera que bien que l'usage dans la communauté des probabilités soit de parler de transformée de fourier , il s'agit en toute rigueur de la transformation de fourier inverse .
Plus généralement, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X à valeurs dans R^d est la fonction à valeurs complexes définie sur R^d par $\varphi_X(t) = E[e^{i<t,x>}]$ **.**
Où $< t, x >$ est le produit scalaire de t avec x .lorsque la variable aléatoire x est discrète, on définit sa fonction génératrice par g(z) = $[z^x]$ **.**
Avec z complexe (quand cela a un sens). Avec les notations précédentes, on a donc $\varphi_X(t) = g(e^{it})$ **;** Cette fonction g est donc en fait un prolongement de φ_X **. .**
Propriétés : Désignons par φ la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X .alors
. φ est Une fonction définie et continue pour tout nombre réel t;
. φ est bornée, et en fait, pour tout t réel, on a : $|\varphi(t)| \leq \varphi(0)$ **= 1 ;**
. φ est une fonction hermitique, c'est -à-dire pour tout nombre réel t on a :
$\varphi(-\mathrm{t})$ = $\overline{\varphi(\mathrm{t})}$; il en résulte que si une fonction caractéristique est réelle, alors elle est

paire ;
. Pour tout a, b réels, on a, pour tout réel t, l'identité : $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$;
. Si la loi de X est symétrique, c'est -à-dire si L (-X)= L (X), alors φ_X est une fonction réelle, donc paire ; **.** toute combinaison convexe de fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique
Démonstrations
Soit X un v.a et t $\in$ **R**

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] \\ |\varphi(t)| \leq \quad 1 \quad |\varphi(t)| &= \left|E\left[e^{itX}\right]\ \right| \leq \left|E\left[e^{itX}\right]\ \right| \end{aligned}$$

Inégalité de Jensen , fonction convexe = 1

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi_X(0) &= E\left[e^{it.0}\right] \\ &= E\left[e^{0}\right] \ = E\left[1\right] \ = \ 1(l'espranced'unconstant) \\ \varphi_X(-t) &= \overline{\varphi_X(t)} \\ e^{it} &= cos(t) + i.sin(t) \\ \overline{e^{it}} &= cos(t) - i.sin(t) \\ a + i.\overline{b} &= a - i.b \\ \varphi_X(-t) &= E\left[e^{-it.x}\right] \\ &= E\left[\cos(-tx) + \ i.sin(-tx)\right] \\ &= E\left[\cos(tx) - \ i.sin(tx)\right] \end{aligned}$$

les propriétés de la cosinus et la sinus

$$\begin{aligned} & E\left[\overline{e^{itx}}\right] = \overline{\varphi_X(\mathrm{t})} \\ & \varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \ . \ \varphi_x(at) \\ & \varphi_{aX+b}(t) = E\left[e^{it(ax+b)}\right] \ = E\left[e^{i(at)x}.e^{itb}\right] \ = e^{itb}.E\left[e^{i(at)x}\right] \\ & \qquad \text{alors}\varphi_{aX+b}(t) \qquad\qquad\qquad\qquad = e^{itb} \ . \ \varphi_X(at) \end{aligned}$$

2.2 Fonctions caractéristique des lois usuelles

Nous allons maintenant donner les fonctionnes caractéristique des lois déjà vues , il faut mieux calculer la fonction caractéristique dans chaque cas.

2.2.1 Fonction caractéristique d'une loi uniforme discrète

alors on a :

$$x \sim u(\Omega), n \in N^*.$$
$$x(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}.$$
$$\forall k \in x(-2)\, P(x = k) = \tfrac{1}{n}$$

Soit : $t \in R$.

$$\mathbb{E}\left[e^{itx}\right] = \sum_{k=1}^{n} e^{itk} \cdot P(x = k)$$
$$E\left[e^{itx}\right] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(e^{it}\right)^k$$
$$E\left[e^{itx}\right] = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{it.1} - e^{it(n+1)}}{1 - it} = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^{it}\left(1 - e^{itn}\right)}{1 - e^{it}}$$

On Obtient : $\varphi_x(t) = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{1-e^{it}}$

2.2.2 Fonction caractéristique de la loi de Bernoulli

Nous avons :

$$x \sim B(P), P \in [0, 1], x(\Omega) = \{0, 1\}$$
$$P(x = 1) = p; P(x = 0) = 1 - P = q$$
$$\forall t \in R, \varphi_x(t) = E\left[e^{itx}\right]$$
$$\varphi_x(t) = e^{it\cdot 0} \cdot P(x = 0) + e^{it\cdot 1} \cdot p(x = 1) = q + P.e^{it}$$
$$\text{On obtient : } \varphi_x(t) = 1 - p + p \cdot e^{it}$$

2.2.3 Fonction caractéristique de la loi géométrique

Nous avons : $x \sim g(p), p \in [0, 1], q = 1 - p, x(\Omega) = N^*$

$$\forall k \in N^*, P(x = k) = q^{k-1} \cdot p \cdot$$
$$\forall t \in R, \varphi_x(t) = E\left[\overset{itx}{e}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \overset{itx}{e} \cdot p(x = k)$$
$$\varphi_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} q^{k-1} \cdot p$$
$$onposel = k - 1.$$
$$\varphi_x(t) = p \cdot e^{it} \cdot \sum_{l=0}^{+\infty} \left(e^{it} \cdot q\right)^l$$

Alors on a une série géométrique de raison $\left(e^{it \cdot q}\right)^{l}$.

$$\textbf{On déduit que :} \left|e^{it} \cdot q\right| = \left|e^{it}\right| \cdot |q|$$
$$= q \; car \; \left|e^{it}\right| = 1, q > 0 \; .$$
$$\varphi_x(t) = p \cdot e^{it}, \frac{1-0}{1-e^{it} \cdot q} = \frac{p \cdot e^{it}}{1-q \cdot e^{it}}$$
$$\textbf{On obtient :} \; \varphi_x(t) = \frac{p \cdot e^{it}}{1-(1-p) \cdot e^{it}}$$

2.2.4 Fonction caractéristique de la loi binomiale

-Première méthode : Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid $\sim B(P)$, alors $y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim B(n,p)$ Par ailleurs si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes Alors

$$\varphi_y(t) = \underset{\sum x_i}{\varphi}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) \quad ici, \quad \varphi_y(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = \left[\varphi_{x_1}(t)\right]^{n}$$

(L'indépendantes pour la premier égalité, et le « Id» pour la deuxième égalité). On obtient : $\varphi_y(t) = \left(q + p \cdot e^{it}\right)^{n} = \left(1 - p + p \cdot e^{it}\right)^{n}$ -Deuxième méthode :

$$\varphi_y(t) = E\left(e^{ity}\right)$$
$$\varphi_y(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} e^{itk},$$
$$\varphi_y(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(p \cdot e^{it}\right)^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$\varphi_y(t) = \left(1 - p + p \cdot e^{it}\right)^{n}$$

2.2.5 Fonction caractéristique de la loi binomiale négative

Alors on a : $x \sim$ Nég Bin (r,p)

La probabilité :

$$p_X(x) = \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot p^r \cdot (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots \infty$$

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itx}\right] = \sum_{x=r}^{\infty} \cdot e^{itx} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot p^r \cdot (1-p)^{x-r}.$$

$$\varphi_X(t) = p^r \cdot \sum_{x=r}^{\infty} \cdot e^{itx} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot (1-p)^{x-r}$$

$$\varphi_X(t) = p^r \cdot \sum_{x=r}^{\infty} \left(e^{it}\right)^{x-r+r} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot (1-p)^{x-r}$$

$$\varphi_X(t) = p^r \cdot \left(e^{it}\right)^r \cdot \sum_{x=r}^{\infty} \left(e^{it}\right)^{x-r} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot (1-p)^{x-r}$$

$$\varphi_x(t) = p^r \cdot \left(e^{it}\right)^r \cdot \sum_{x=t}^{\infty} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \left((1-p)\, e^{it}\right)^{x-r}$$

$on\ pose 1 - p^* = (1-p)\, e^{it}$

$$\varphi_x(t) = p^r \cdot \left(e^{it}\right)^r \cdot \sum_{x=r}^{\infty} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \overset{*}{p}\right)^{x-r} \cdot \frac{(p^*)^r}{(p^*)^r}$$

$$\varphi_x(t) = p^r \cdot \left(e^{it}\right)^r \frac{1}{(p^*)^r} \cdot \sum_{x=r}^{\infty} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot (\rho^*)^r \cdot (1-p^*)^{x-r}$$

$$\varphi_x(t) = \frac{p^r \left(e^{it}\right)^r}{(p^*)^r} \quad \text{car} \sum_{x=r}^{\infty} \begin{pmatrix} x-1 \\ r-1 \end{pmatrix} \cdot (p^*)^r \cdot (1-p^*)^{x-r} = 1$$

Alors : $\varphi_x(t) = \left(\dfrac{p \cdot \left(e^{it}\right)}{1 - (1-p)\, e^{it}} \right)^r$

2.2.6 Fonction caractéristique d'une loi de poisson

Nous avons :$x \sim P(\lambda), \varphi_X(t)?, P(x=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$soit $t \in R$.

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itx}\right]$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left[\lambda e^{it}\right]^k}{k!}$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^{it}} = e^{\lambda} \left(e^{it} - 1\right)$$

2.2.7 Fonction caractéristique de la loi continue uniforme

Alors on a :

$$x \sim u\left([a,b]\right), u < b \text{ et } f_X\left(x\right) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}
&\forall t \in R, \\
&\varphi_X\left(t\right) = \mathbb{E}\left[e^{itx}\right] \\
&\varphi_X\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f_x\left(x\right) dx \\
&\varphi_X\left(t\right) = \int_a^b e^{itx} \cdot \frac{1}{b-a} dx. \\
&\varphi_X\left(t\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{e^{itx}}{tx}\right]_a^b
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\varphi_X\left(t\right) = \frac{1}{\left(b-a\right)it}\left(e^{itb} - e^{ita}\right).$$

2.2.8 Fonction caractéristique d'une loi exponentielle

Nous avons : $x \sim \varepsilon\left(\lambda\right), \lambda > 0, x\left(\Omega\right) = R_+$

$$\begin{aligned}
\forall x \in R_+, f_X\left(x\right) &= \lambda \cdot e^{-\lambda x} \\
\forall t \in R, \varphi_X\left(t\right) &= \mathbb{E}\left[e^{itx}\right] \\
\varphi_X\left(t\right) &= \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot dx \\
\varphi_X\left(t\right) &= \lambda \cdot \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx. \\
\varphi_X\left(t\right) &= \lambda \cdot \left[\frac{1}{it-\lambda} \cdot e^{(it-\lambda)x}\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\varphi_X\left(t\right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

2.2.9 Fonction caractéristique de la loi de gamma

On a :

$$f_X\left(x\right) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma\left(\alpha\right)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \mathbb{1}_{R_+^*}$$

Pour :

$$\varphi_x(t) = \mathbb{E}\left[e^{itx}\right]$$

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{\lambda^\alpha \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx.$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-(\lambda - it)x} \cdot dx,$$

on pose $y = (\lambda - it)\, x$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda - it}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{\lambda - it} \cdot dy$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha) \cdot (\lambda - it)^\alpha} \cdot \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha) \cdot (\lambda - it)^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)$$

On obtient :

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - it)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha$$

2.2.10 Fonction caractéristique de la loi normale

Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Alors :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itx}\right]$$

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x)\, dx$$

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} .dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} .dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2 \cdot \sigma^2}\left((x-\mu)^2 - 2\sigma^2 \cdot itx\right)} \cdot dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-\mu)^2 - 2(x-\mu)it\sigma^2 + i^2 \cdot t^2 \cdot \sigma^4 - i^2 \cdot t^2 \cdot \sigma^4 - 2\mu it\sigma^2\right)} .dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\left((x-\mu)-it\sigma^2\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\left(t^2\sigma^4-2\mu\cdot i\cdot t\sigma^2\right)}.dx$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2\cdot\sigma^2}{2}+it\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\left(x-\mu-it\sigma^2\right)^2} dx$$

on pose : $z = \frac{x-\mu-it\sigma^2}{\sqrt{2}\cdot\sigma}$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{-\frac{t^2\cdot\sigma^2}{2}+itu}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cdot\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot dz \quad ; dx = \sqrt{2}\cdot\sigma dz$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}+it\mu} \cdot \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cdot\cdot\sigma dz$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2\cdot\sigma^2}{2}+it\mu}\sqrt{\pi}$$

car :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

On obtient :

$$\varphi_X(t) = e^{\frac{i^2\cdot t^2\cdot\sigma^2}{2}+it\mu}$$
$$\varphi_X(t) = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

2.2.11 Fonction caractéristique de loi Beta

Alors on a :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itx}\right]; f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{B-1}}{B(\alpha,B)}; 0<x<1; \alpha>0; B>0$$
$$\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} \cdot \frac{1}{B(\alpha,B)} \cdot x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{B-1}\cdot dx$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{B(\alpha,B)} \cdot \int_0^1 e^{itx}\cdot x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{B-1} dx.$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{B(\alpha,B)} \cdot \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{B-1}\right] dx$$

avec $\cdot e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{B(\alpha,B)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \left[\int_0^1 \frac{(itx)^k}{k!} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{B-1} \cdot dx \right]$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{B(\alpha,B)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(it)^k}{k!} \int_0^1 x^{\alpha+k-1} : (1-x)^{B-1} \cdot dx \right]$$

on a :

$$B(\alpha,B) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{B-1}\, dx$$

Alors :

$$B(\alpha+k,B) = \int_0^1 x^{\alpha+k-1} \cdot (1-x)^{B-1} \cdot dx$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{B(\alpha,B)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(it)^k}{k!} \cdot B(\alpha+k,B) \right]$$
$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(it)^k}{k!} \cdot \frac{B(\alpha+k,B)}{B(\alpha,B)} \right]$$

On a :

$$B(\alpha,B) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(B)}{\Gamma(\alpha+B)}, B(\alpha+k,B) = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(B)}{\Gamma(\alpha+B+K)}$$
$$\frac{B(\alpha+k,B)}{B(\alpha,B)} = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(B)}{\Gamma(\alpha+B+K)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+B)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(B)} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+B)}{\Gamma(\alpha+B+K)}$$

et :

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \alpha\Gamma(\alpha) \\
\Gamma(\alpha+2) &= (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \\
\Gamma(\alpha+3) &= (\alpha+2)\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha). \qquad . \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
&. \\
\Gamma(\alpha+K) &= (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\ldots\alpha\Gamma(\alpha) \quad avec\, k \geq 1. \\
\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} &= (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha \\
&= \prod_{r=0}^{k-1}(\alpha+r)\,\frac{\Gamma(\alpha+B+k)}{\Gamma(\alpha+B)} \\
&= \prod_{r=0}^{K-1}(\alpha+B+r) \\
\frac{B(\alpha+k,B)}{B(\alpha,B)} &= \frac{\prod_{r=0}^{k-1}(\alpha+r)}{\prod_{r=0}^{k-1}(\alpha+B+r)} = \prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}
\end{aligned}
$$

Alors on obtient :

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(it)^k}{k!}\cdot\frac{B(\alpha+k,B)}{B(\alpha,B)}\right] = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(it)^k}{k!}\cdot\frac{B(\alpha+k,B)}{B(\alpha,B)}\right] \\
\varphi_X(t) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(it)^k}{k!}\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+B+r}\right]
\end{aligned}
$$

2.2.12 Fonction de caractéristique de la loi Khi-deux

Nous avons la densité de la probabilité de x notée f_x sera :
$f_X(x,k) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot x^{\frac{k}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout x positif

Alors :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itx}\right].$$
$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot f_X(x,k) \cdot dx$$
$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot dx$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot dx$$

on applique :
$$\frac{r(n)}{a^n} = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot x^{n-1} \cdot dx$$

Alors ;

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}-it\right)x} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} dx \ avec \ a = \frac{1}{2} - it \ et \ n = \frac{k}{2}$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - it\right)^{\frac{k}{2}}}$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1(1-2it)^{\frac{k}{2}}}{\frac{k}{2}}}}$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}}$$
$$\varphi_X(t) = (1-2it)^{-\frac{k}{2}}$$

2.2.13 Fonction caractéristique de loi Gumbel

on a :
$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} e^{-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}, x, \mu \in R, \sigma > 0$$

Alors ;
$$\varphi_x(t) = \mathbb{E}\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \cdot e^{-e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}} \cdot dx.$$

on pose $\quad y = e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}, dy = \left(\frac{-1}{\sigma}\right) e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}} dx; x = \mu - \sigma ln \cdot y$

$$\varphi_x(t) = \int_0^{+\infty} -e^{it(\mu - \sigma ln \cdot y)} \cdot e^{-y} \cdot dy = e^{it\mu} \int_0^{+\infty} y^{-\sigma it} \cdot e^{-y} dy$$
$$\varphi_x(t) = e^{it\mu} \cdot \Gamma(1 - it\sigma).$$

2.3 Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles

Les fonctions caractéristiques des lois usuelles est données dans la table suivante :

Loi et symbole	Fonction caractéristique $\varphi_x(t) = E(e^{itx})$
Loi uniforme discrète	$\frac{1}{n} \cdot \frac{i^{it}\left(1-e^{itn}\right)}{1-e^{it}}$
Loi uniforme continue $]a, b[$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Bernoulli $B(P)$	$1 - P + P \cdot e^{it}$
Géométrique $G(P)$	$\frac{p \cdot e^{it}}{1-(1-p) \cdot e^{it}}$
Binomiale $B(n, P)$	$(1 - p + pe^{it})^n$
Binomiale négative $BN(r, P)$	$\left(\frac{p \cdot \left(e^{it}\right)}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r$
Poisson $P(\lambda)$	$e^{\lambda}(e^{it} - 1)$
Loi exponentielle	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$
Loi gamma $G(\alpha, \lambda)$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{\alpha}$
Loi normale $N(\mu, \sigma^2)$	$e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$
Loi de chi-deux	$(1 - 2it)^{\frac{-k}{2}}$
Loi de Gumbel	$e^{it\mu} \cdot (1 - it\sigma)$
Loi Beta $B(\alpha, B)$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(it)^k}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+B+r}\right)$

TABLE 2.1 – Fonctions caractéristiques des lois usuelles

Chapitre 3

Application

Lien entre fonction caractéristique et moment : Soit X une V.A et φ_X **sa fonction caractéristique, Alors** $\forall u \in R$,

$$\forall n \in N, \varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}\left[X^n\right]$$

3.1 Le cas discret

Soit $u \in R$.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iux}\right] \\
\varphi_X(u) &= \sum_{k \in X(\Omega)} e^{iuk} p(x=k) \\
\varphi_X^{'}(u) &= \sum_{k \in x(\Omega)} ik\, e^{iuk} p(x=k) \\
\varphi_X^{'}(u) &= i\mathbb{E}\left[xe^{iux}\right] \\
\varphi_X^{'}(0) &= i\mathbb{E}\left[x\right] \\
\varphi_X^{(n)}(u) &= \sum (ik)^n e^{iuk} \cdot p(x=k) \\
\varphi_X^{(n)}(u) &= i^n \cdot \mathbb{E}\left[x^k \cdot e^{iux}\right] \\
\varphi_X^{(n)}(0) &= i^n \mathbb{E}\left[x^k\right]
\end{aligned}$$

3.2 Le cas continue

$$\varphi_X(u) = \int_R e^{iux} \cdot f_X(x)\,dx$$
$$\varphi_X^{'}(u) = \int_R \frac{d \cdot e^{iux} \cdot f_X(x)}{du} dx$$
$$\varphi_X^{'}(u) = \int_R \cdot ix \cdot e^{iux} \cdot f_X(x)\,dx = i\mathbb{E}\left[xe^{iux}\right]$$

Application et démonstration :
Nous avons :

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iux}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \cdot f_X(x)\,dx$$
$$\mathbb{E}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$
$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iux}\right] = \mathbb{E}\left[1 + iux + \frac{(iux)^2}{2!} + \frac{(iux)^3}{3!} + \dots + \frac{(iux)^n}{n!}\right]$$

Avec

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$
$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(iux) + \mathbb{E}\left[\frac{(iux)^2}{2!}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{(iux)^3}{3!}\right] + \dots + \mathbb{E}\left[\frac{(iux)^n}{n!}\right]$$
$$\varphi_X(u) = 1 + iu\mathbb{E}[x] + \frac{(iu)^2}{2!} E\left[x^2\right] + \frac{(iu)^3}{3!}\mathbb{E}\left[x^3\right] + \dots + \frac{(iu)^n}{n!}\mathbb{E}[x^n]$$
$$m_0 = \mathbb{E}\left[x^0\right] = \mathbb{E}[1] = 1$$
$$m_1 = \mathbb{E}[x] \Rightarrow m_2 = \mathbb{E}\left[x^2\right]$$
$$n\varphi_X(u) = m_0 + m_1 iu + m_2\frac{(iu)^2}{2!} + m_3\frac{(iu)^3}{3!} + \dots + m_n\frac{(iu)^n}{n!}$$
$$\frac{d\varphi_X(u)}{du} = 0 + m_1 i + \frac{m_2}{2} \cdot i^2 2u + \frac{m_3}{3!}(i)^3 \cdot 3u^2 + \dots + \frac{m_n}{n!} \cdot i^n n.u^{n-1}.$$

Pour $u = 0$ on obtient

$$\frac{d\varphi_X(u)}{du}|_{u=0} = m_1(i).$$

$$m_1 = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} \cdot \frac{d\varphi_X(u)}{du}|_{u=0} \Rightarrow m_1 = (-i) \cdot \frac{d\varphi_X(u)}{du}|_{u=0}$$

$$\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2} = \frac{m_2}{2}(i)^2 .2 + \frac{m_3}{3!}(i)^3 \cdot 3(2u) + \cdots + \frac{m_n}{n!}(i)^n n(n-1)u^{n-1}$$

$$\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}|_{u=0} = m_2(i)^2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}|_{u=0}$$

$$\Rightarrow m_2 = (-i)^2 \cdot \frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}|_{u=0}$$

alors :

$$m_n = (-i)^n \cdot \frac{d^n \cdot \varphi_X(u)}{du^n}$$

Calcule de l'espérance et de la variance :

Exemple : 1 ($x \sim P(\lambda)$)

$P(x=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 1, 2, 3...n$

$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iux}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} P(x=k).$

$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iu} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$\varphi_X(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iuk})^k}{k!} = e^{-\lambda(1-e^{iu})}$

$\varphi_X'(u) = e^{-\lambda(1-e^{iu})} \lambda(i) e^{iu}$

$\varphi_X'(u) = \frac{i\lambda}{i} = \lambda = \mathbb{E}(x).$

Pour $u = 0$

$$\varphi_X''(u) = i\lambda \left[ie^{iu}e^{-\lambda(1-e^{iu})} + e^{iu}e^{iu}i\lambda e^{-\lambda(1-e^{iu})}\right]$$

$$\varphi_X''(0) = i^2\lambda(1+\lambda)$$

$$\mathbb{E}(x^2) = \frac{1}{i^2}\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}|_{u=0} = \lambda + \lambda^2.$$

Alors

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2.$$

Donc

$$\mathbb{V}(x) = \lambda$$

Exemple : 2 ($x \sim B(n,p)$)

$$
\begin{aligned}
P(x=k) &= C_k^n p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n \\
\varphi_X(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iux}\right] = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} p(x=k). \\
\varphi_X(u) &= \sum C_k^n \left(pe^{iu}\right)^k q^{n-k} \\
\varphi_X(u) &= \left(pe^{iu}+q\right)^n. \\
\frac{d\varphi_X(u)}{du} &= n\left(pe^{iu}+q\right)^{n-1}.pie^{iu} \\
\frac{1}{i}\frac{d\varphi_X(u)}{du}|_{u=0}\frac{in.p}{i} &= np = \mathbb{E}(x) \\
\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2} &= inp\left[(n-1)\left(pe^{iu}+q\right)^{n-2} pie^{iu} + \left(pe^{iu}+q\right)^{n-1} ie^{iu}\right] \\
\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}|_{u=0} &= i^2 np\left[(n-1)p+1\right] = i^2 np(np+q) \\
\frac{1}{i^2}\frac{d^2\varphi_X(u)}{du^2}|_{u=0} &= (np)^2 + npq = E\left(x^2\right).
\end{aligned}
$$

Pour la variance : $\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2 = n \cdot p \cdot q$

L'image d'une fonction caractéristique : $M_{ax+b}(t)$

Nous avons : $\forall a, b \in R, M_{ax+b}(t) = e^{t.b} \cdot M_x(at)$

Exemple :

$$
\begin{aligned}
M_x(t) &= \frac{-\alpha}{t-\alpha} \\
M_{2x+1}(t) &= e^t \cdot M_x(2t) = e^t \cdot \left(\frac{-\alpha}{2t-\alpha}\right) \\
\underset{2x+1}{M}(t) &= \frac{-\alpha.e^t}{2t-\alpha}
\end{aligned}
$$

3.3 Fonction caractéristique conjointe

X et Y sont indépendante

$$\underset{xy}{\varphi}(w_1, w_2) = \mathbb{E}\left[e^{iw_1x+iw_2y}\right]$$
$$\underset{xy}{\varphi}(w_1, w_2) = \mathbb{E}\left[e^{iw_1x}.e^{iw_2y}\right]$$
$$\underset{xy}{\varphi}(w_1, w_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw_1x+iw_2y}\cdot f_{xy}(x,y)\,dxdy$$
$$\underset{xy}{\varphi}(w_1, w_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw_1x}\cdot f_x(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw_2y} f_y(y)\,dy$$
$$\underset{xy}{\varphi}(w_1, w_2) = \underset{x}{\varphi}(w_1)\cdot\underset{y}{\varphi}(w_2)$$

Moment de $\varphi_{xy}(w_1, w_2)$:
$\varphi_{xy}(w_1, w_2) = E\left[e^{iw_1x+iw_2y}\right]$ =$\mathbb{E}\left[\left(1 + iw_1x + \frac{(iw_1x)^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + iw_2y + \frac{(iw_2y)^2}{2!} + \cdots\right)\right]$
On donne :
$\mathbb{E}\left[x^r y^L\right] = (-i)^{r+L}\,\frac{d^{r+L}\cdot\varphi_{xy}(w_1,w_2)}{dw_1^r\cdot dw_2^L}|_{w_1=0,w_2=0}.$

Conclusion

Les fonctions caractéristiques et ses applications jouent un rôle très important dans la théorie des probabilités. Elle possèdent des bonnes propriétés peuvent être utiliser dans plusieurs situations d'application et de calcul des probabilités.

Bibliographie

[1] Michel Lejeune, *Statistique La théorie et ses application* , 2002.

[2] Y Velenik, *Probabilité et Statistique* , 2012.

[3] Herné Carrieu, *Probabilité* , 2008.

[4] Eva Cantoni, *Maitriser l'aléatoire* , 2006.

[5] Corima Reicher, Raymond le blanc, Btuno remilland, *Théorie des probabilistes* , 2002.

[6] Alalonf Labelle, *Introduction a la statistique appliques* , 1995.

[7] Bernard goldfarb, *Introduction a la méthode statistique* , 2011.

[8] Stephane Baloc, Olivrer Mazet, *Introduction aux probabilités* , 2004.

[9] Jean Pierre Lecoutre, *Statistique et probabilités* , 2005.

[10] Gilbert Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistique* , 2006.

[11] Benjamin Jourdan, *Probabilité et statistique pour l'ingénieur* , 2018.

[12] Renée Veysseyre, *Aide mémoire statistique et probabilité pour l'ingénieur* , 2006.

[13] Pierre Dedron, *Cours de statistique inférentielle* , 2004.