Table des matières

UTILISATION DES NOEUDS UNITAIRES DANS LA CONSTRUCTION DES DILATATIONS UNITAIRES DE CONTRACTIONS

TADJ MOUSTAFA
Mémoire de Master en Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle et EDP

Juin/2018

0.1 Introduction

Définition 0.1.1 *Soit T une contraction dans un Hilbert séparable H, on appelle dilatation de T, tout opérateur linéaire V, défini dans un espace de Hilbert $\widetilde{H}$, contenant H comme sous-espace et vérifiant :*

$$T^{\,n}(h) = P_H V^{\,n}(h) \qquad \forall h \in H, \quad \forall n = 0,\ 1,\ 2\ldots, \tag{1}$$

P_H désigne l'orthoprojecteur de $\widehat{H}$ sur H. La dilatation est dite isométrique (respectivement, unitaire) si l'opérateur V est isométrique (respectivement unitaire).

Historiquement, Julia G. ([6, 7, 8]) fut le premier à établir que pour toute contraction définie dans un espace H, il existe une isométrie V, définie un espace $\widetilde{H}$, contenant H comme sous-espace et vérifiant :

$$T\ (h) = P_H V\ (h) \qquad \forall h \in H \tag{2}$$

Halmos P. R. ([5]), remarqua que dans 2, l'opérateur V pouvait être choisi égal à un opérateur unitaire U. Nagy-Béla S. ([10]) montra que l'opérateur unitaire U pouvait être choisi tel que la relation 1 soit vérifiée pour tout naturel n.

Le but du présent mémoire est de proposer une méthode de construction des dilatations unitaires basée sur la notion de noeud unitaire. Cette notion que nous exposons au chapitre 2, consiste à regarder une contraction donnée dans un espace H, comme un élément d'une matrice unitaire, définie sur un espace plus large. Un exemple concret et illustratif de construction de noeud et de dilatation unitaires est aussi traité dans le quatrième et dernier chapitre.

Notons enfin que, tous les espaces utilisés sont des espaces de Hilbert séparables complexes. Si H_1 et H_2 sont deux tels espaces, on désignera par $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'espace vectoriels des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2. On sait que $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2) \Longrightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|\ =\ 1} \|A(x)\|$$

Si $H_1 = H_2 = H$, $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ devient une algèbre de Banach qu'on notera $\mathcal{B}(H)$ ([1], [3] *et* [9]).

Chapitre 1

Définitions générales

1.1 Opérateurs isométriques et unitaires

Définition 1.1.1 *On opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est appelé isométrie si :*

$$\prec T(x_1), \ T(x_2) \succ = \prec x_1, \ x_2 \succ \qquad \forall \ x_1, \ x_2 \in H \tag{1.1}$$

Si de plus, T^* est aussi une isométrie alors, T est dit unitaire.

Proposition 1.1.2 *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors,*

1. $$T \text{ isométrie} \Longleftrightarrow T^*T = Id_H \tag{1.2}$$

   .

2. $$T \text{ unitaire } \Longleftrightarrow T^*T = Id_H \ = TT^* \Longleftrightarrow T \ \text{ inversible et } T^* = T^{-1} \tag{1.3}$$

1.2 Opérateurs de contractions

Définition 1.2.1 *On opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est appelé contraction si,*

$$\|T(x)\| \leq \|x\| \qquad \forall x \in H \tag{1.4}$$

Définition 1.2.2 *Une contraction T définie dans l'espace H est dite simple (on dit aussi complètement non unitaire) s'il n'existe aucun sous-esoace de H, invariant pour T et T^* à la fois et dans lequel, T induit un opérateur unitaire.*

On a le théorème de décomposition canonique suivant.

Theorème 1.2.3 *[10]Pour toute contraction T définie dans un espace de Hilbert H, il existe une décomposition unique de H en somme orthogonale $H = H_0 \oplus H_1$ de deux sous-espaces invariants telle que, la restriction T_0 de T à H_0 est un opérateur unitaire et la restriction T_1 de T à H_1 est un opérateur simple. Deplus,*

$$H_0 = \{x \in H : \ \|T^{\ n}(x)\| = \|x\| = \|T^{\ *n}(x)\|, \quad n \in \mathbb{N}\} \tag{1.5}$$

$$H_1 = \overline{vect\{T^{\ p}(Id_H - TT^*)\, x, \quad T^{\ *q}(Id_H - T^*T)\, y : \quad x, \ y \in H, \quad p, \ q \in \mathbb{N}\}} \tag{1.6}$$

Remarque. L'opérateur T_0 est appelé partie unitaire de T et T_1 sa partie simple. ■
On a les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition 1.2.4 *La contraction T est simple si et seulement si, la contraction adjointe T^* est aussi simple.*
Preuve. *découle directement des formules 1.5 et 1.6.* ■

Proposition 1.2.5 *Une contraction simple ne peut avoir de valeurs propres situées sur le cercle unité.*
Preuve. *Supposons le contraire. Il existe donc un vecteur non nul $u \in H$ et un complexe α, vérifiant,*

$$|\alpha| = 1 \quad et \quad T(u) = \alpha.u$$

On a alors,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\overline{\alpha}.u - T^*(u)\|^2 = \prec \overline{\alpha}.u - T^*(u),\ \overline{\alpha}.u - T^*(u) \succ \\ &= \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha} \ \prec u,\ T^*(u) \succ) + \|T^*(u)\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha} \ \prec T(u),\ u \succ) + \|T^*(u)\|^2 \\ &= -\|u\|^2 + \|T^*(u)\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{\alpha}.u - T^*(u) = 0$ et donc, $T^*(u) = \overline{\alpha}.u$.
Considérons maintenant le sous-espace H_u engendré par le vecteur u :

$$H_u = \{\lambda.u : \ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

C'est un sous-espace de dimension finie $(\dim(H_u) = 1)$, donc fermé. De plus, il est invariant pour T et T^*. Finalement, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} T^*T(\lambda.u) = T^*((\alpha\lambda).u) = \alpha\lambda T^*(u) = \alpha\lambda\overline{\alpha}.u = \lambda.u \\ \qquad et \\ TT^*(\lambda.u) = T((\overline{\alpha}\lambda).u) = \overline{\alpha}\lambda a.u = \lambda.u \end{cases}$$

En d'autres termes, dans H_u, l'opérateur T induit un opérateur unitaire. Or ceci contredit l'hypothèse que T est simple. ■

Proposition 1.2.6 *Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée alors, la contraction T est simple.*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T^{\,n}(x) = 0 \ \ \forall x \in H \qquad ou \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} T^{\,*\,n}(x) = 0$$

Preuve. *Dans le cas contraire, le sous-espace H_0 (1.5), contiendrait au moins un vecteur non nul a pour lequel seront vérifiées les conditions contradictoires suivantes :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T^n(a)\| = 0 \qquad et \qquad \|T^n(a)\| = \|a\| \qquad \forall n$$

ou,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T^{\,*\,n}(a)\| = 0 \qquad et \qquad \|T^{\,*\,n}(a)\| = \|a\| \qquad \forall n$$

■

Corollaire 1.2.7 *Si $\|T\| \prec 1$ alors T est une contraction simple.*
Preuve. *En effet, dans ce cas,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T^n(a)\| \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T^n\| \|a\| \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T\|^n \|a\| = 0$$

■

Définition 1.2.8 *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit positif si,*

$$\prec T(x), \ x \succ \geq 0 \qquad \forall x \in H \tag{1.7}$$

Theorème 1.2.9 *Pour tout opérateur positif T, il existe un unique opérateur, noté $T^{\frac{1}{2}}$ (appelé racine carrée de T) et tel que :*

$$\left(T^{\frac{1}{2}}\right)^2 = T^{\frac{1}{2}} \circ T^{\frac{1}{2}} = T \tag{1.8}$$

De plus [11], il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ telle que :

$$T^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} P_n(T) \qquad (convergence\ dans\ \mathcal{B}(H)) \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Noeuds unitaires

2.1 Définition et propriétés

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. On désigne par $\prec .,\ . \succ_i$ le produit scalaire dans $.H_i \quad (i = 1, 2)$. Considérons l'espace de Hilbert :

$$H_1 \oplus H_2 = \{x = (x_1,\ x_2) :\ x_i \in H_i\} \tag{2.1}$$

muni du produit scalaire :

$$\prec (x_1,\ x_2)\, ,\ (y_1,\ y_2) \succ\ = \ \prec x_1,\ y_1 \succ_1 + \ \prec x_2,\ y_2 \succ_2 \tag{2.2}$$

Il est clair que H_1 et H_2 peuvent être regardés comme des sous-espaces orthogonaux de $H_1 \oplus H_2$ grâce aux identifications :

$$x \in H_1 \longmapsto (x,\ 0) \qquad et \qquad y \in H_2 \longmapsto (0,\ y) \tag{2.3}$$

Définition 2.1.1 *Un noeud unitaire est un ensemble*

$$\Delta = \left(H,\ E,\ F,\ \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} \right)$$

constitué d'espaces de Hilbert séparables H, E et F, d'opérateurs linéaires bornés $T \in \mathcal{L}(H) = \mathcal{B}(H)\,,\ \Phi \in \mathcal{L}(E, H)\,,\ \Psi \in \mathcal{L}(H, F)\,,\ K \in \mathcal{L}(E, F)$ et vérifiant les relations :

$$\begin{bmatrix} T^* & \Psi^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & Id_E \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* & \Psi^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & Id_F \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

La relation 2.4 signifie que la matrice $\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}$ constitue une isométrie de $H \oplus E$ dans $H \oplus F \quad (U^*U = Id_{H \oplus E})$. Les relations 2.4 et 2.5 prises ensemble signifient que la matrice $\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}$ constitue un opérateur unitaire de $H \oplus E$ dans $H \oplus F \quad (U^*U = Id_{H \oplus E}$ et $UU^* = Id_{H \oplus F})$. De plus, elles sont équivalentes aux relations :

$$\begin{cases} T^*T + \Psi^*\Psi = Id_H \\ TT^* + \Phi\Phi^* = Id_H \end{cases}, \quad \begin{cases} T^*\Phi + \Psi^*K = 0 \\ T\Psi^* + \Phi K^* = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Phi^*\Phi + K^*K = Id_E \\ \Psi\Psi^* + KK^* = Id_F \end{cases} \tag{2.6}$$

Remarque. L'opérateur T et l'espace H sont respectivement appelés opérateur principal et espace intérieur du noeud unitaire Δ. ■

Notons que si Δ est un noeud unitaire alors son opérateur T est une contraction : $(\|T\| \leq 1)$. En effet, $\forall x \in H$,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - \|T(x)\|^2 &= \prec x,\ x \succ \ - \ \prec T(x),\ T(x) \succ = \prec (Id_H - T^*T)(x),\ x \succ \\ &= \prec \Psi^*\Psi(x),\ x \succ = \prec \Psi(x),\ \Psi(x) \succ \geq 0 \end{aligned}$$

Inversement, [4] pour toute contraction T dans un Hilbert H, il existe un noeud unitaire Δ, dont l'opérateur principal et l'espace intérieur sont respectivement T et H (on dit dans ce cas, qu'on a inclus la contraction T dans le noeud unitaire Δ). En effet, posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \overline{(Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} H} \\ F = \overline{(Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} H} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = (Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} \\ \Psi = (Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. , \quad K = -T^*_{|E} \tag{2.7}$$

Il est clair que,

$$\left\{ \begin{array}{l} Id_H - T^*T = \Psi^*\Psi \\ Id_H - TT^* = \Phi\Phi^* \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{l} Id_E - \Phi^*\Phi = K^*K \\ Id_F - \Psi\Psi^* = KK^* \end{array} \right.$$

Par ailleurs, d'après le théorème 1.2.9, il existe deux suites $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ telle que :

$$(Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} P_n(Id_H - T^*T) \quad (convergence\ dans\ \mathcal{B}(H))$$

et

$$(Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} Q_n(Id_H - TT^*) \quad (convergence\ dans\ \mathcal{B}(H))$$

Par conséquent, des relations :

$$\left\{ \begin{array}{c} T^*(Id_H - TT^*) = (Id_H - T^*T)T \Longrightarrow T^*Q_n = P_nT^* \\ et \\ T(Id_H - T^*T) = (Id_H - TT^*)T \Longrightarrow TP_n = Q_nT^* \end{array} \right. \quad \forall n,$$

découle que,

$$T^*(Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} = (Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} T^* \quad et \quad T(Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} = (Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} T$$

Donc,

$$\begin{aligned} T^*\Phi + \Psi^*K &= (Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} T^* - (Id_H - T^*T)^{\frac{1}{2}} T^* = 0 \\ & et \\ T\Psi^* + \Phi K^* &= (Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} T - (Id_H - TT^*)^{\frac{1}{2}} T = 0 \end{aligned}$$

Remarque. L'opération d'inclusion d'une contraction dans un noeud unitaire n'est pas unique. En effet, soit

$$\Delta = \left(H,\ E,\ F,\ \left[\begin{array}{cc} T & \Phi \\ \Psi & K \end{array} \right]\right)$$

un noeud unitaire et soient $\widetilde{E}$ et $\widetilde{F}$, deux espaces Hilbert séparables vérifiant : il existe un opérateur unitaire A de $\widetilde{E}$ dans E et un opérateur unitaire B de $\widetilde{F}$ dans F. Alors, l'ensemble,

$$\widetilde{\Delta} = \left(H,\ \widetilde{E},\ \widetilde{F},\ U = \left[\begin{array}{cc} T & \Phi A \\ B^*\Psi & B^*KA \end{array} \right]\right)$$

est aussi un noeud unitaire. ■

Proposition 2.1.2 *Soit* $\Delta = \left(H,\ E,\ F,\ \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}\right)$ *un noeud unitaire. Posons,*

$$H_\Delta = \overline{vect\left\{T^{\ p}\Phi\left(x\right),\quad T^{\ *\ q}\Psi^*\left(y\right):\quad x\in E,\quad y\in F,\qquad p,\ q\in\mathbb{N}\right\}} \tag{2.8}$$

Alors, H_Δ *est invariant pour* T *et* T^**. De plus, l''ensemble*

$$\Delta_1 = \left(H_\Delta,\ E_1 = \Phi^*\left(H_\Delta\right),\ F_1 = \Psi\left(H_\Delta\right),\ U_1 = \begin{bmatrix} T_1 = TP_\Delta & P_\Delta\Phi \\ \Psi P_\Delta & K \end{bmatrix}\right) \tag{2.9}$$

est un noeud unitaire (P_Δ *est l'orthoprojecteur de* H *sur* H_Δ*).*
Preuve. *Montrons que* H_Δ *est invariant pour* T *(son invariance se démontre de manière tout à fait analogue). Il suffit pour cela de montrer que :*

$$T\left(T^{\ p}\Phi\left(x\right)\right)\in H_\Delta\quad\forall\left(p,x\right)\in\mathbb{N}\times E\ ,\qquad et\qquad T\left(T^{\ *\ q}\Psi^*\left(y\right)\right)\in H_\Delta\quad\forall\left(q,y\right)\in\mathbb{N}\times F \tag{2.10}$$

La première appartenance dans 2.9 est triviale. Pour montrer la seconde appartenance, remarquons tout d'abord que,

$$\Phi\left(x\right)\in H_\Delta\qquad\forall x\in E$$

D'autre part,

$$q=0\Longrightarrow T\left(T^{\ *\ q}\Psi^*\left(y\right)\right) = T\Psi^*\left(y\right) = -\Phi K^*\left(y\right)\in H_\Delta$$

et

$$q\neq 0\Longrightarrow T\left(T^{\ *\ q}\Psi^*\left(y\right)\right) = TT^{\ *}\ \left(T^{\ *\ q-1}\Psi^*\left(y\right)\right) = T^{\ *\ q-1}\Psi^*\left(y\right) - \Phi\Phi^*\left(T^{\ *\ q-1}\Psi^*\left(y\right)\right)\in H_\Delta$$

Montrons maintenant que la formule 2.9, définit un noeud unitaire. On a,

$$Id_{H_\Delta} - T_1^*T_1 = Id_{H_\Delta} - T_1^*T_1 = P_\Delta - P_\Delta T^*TP_\Delta = P_\Delta\left(Id_H - T^*T\right)P_\Delta = P_\Delta\Psi^*\Psi P_\Delta$$

De même,

$$H_\Delta\ \text{ invariant pour } T\ \text{ et }\ T^*\Longrightarrow TP_\Delta = P_\Delta T\quad\text{et}\quad T^*P_\Delta = P_\Delta T^*$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left(P_\Delta\Phi\right)\left(P_\Delta\Phi\right)^* &= P_\Delta\Phi\Phi^*P_\Delta = P_\Delta\left(Id_H - TT^*\right)P_\Delta = P_\Delta - P_\Delta TT^*P_\Delta \\ &= P_\Delta - \left(TP_\Delta\right)\left(P_\Delta T\right)^* = Id_{H_\Delta} - T_1T_1^*\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{cases} T_1^*P_\Delta\Phi + \left(\Psi P_\Delta\right)^*K = T^*P_\Delta + P_\Delta\Psi^*K = P_\Delta T^* + P_\Delta\Psi^*K = P_\Delta\left(T^* + \Psi^*K\right) = 0 \\ T_1P_\Delta\Psi^* + P_\Delta\Phi K^* = TP_\Delta\Psi^* + P_\Delta\Phi K^* = P_\Delta T\Psi^* + P_\Delta\Phi K^* = P_\Delta\left(T\Psi^* + \Phi K^*\right) = 0 \end{cases}$$

De plus, pour tout $x\in H_\Delta$*,*

$$\begin{aligned}\Phi^*\left(x\right) - K^*K\Phi^*\left(x\right) &= \Phi^*\left(x\right) + K^*\Psi T^*\left(x\right) = \Phi^*P_\Delta\left(x\right) - \Phi^*P_\Delta TT^*\left(x\right) = \\ &= \Phi^*P_\Delta\left(x\right) - \Phi^*P_\Delta\left(Id_H - \Phi\Phi^*\right)\left(x\right) = \Phi^*P_\Delta\Phi\Phi^*\left(x\right)\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$Id_{\Phi^*\left(H_\Delta\right)} - K^*K = \left(P_\Delta\Phi\right)^*\left(P_\Delta\Phi\right)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\Psi(x) - KK^*\Psi(x) &= \Psi(x) + K\Phi^*T(x) = \Psi P_\Delta(x) - \Psi P_\Delta T^*T(x)\\ &= \Psi P_\Delta(x) - \Psi P_\Delta(Id_H - \Psi^*\Psi)(x) = \Psi P_\Delta \Psi^*\Psi(x)\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$Id_{\Psi(H_\Delta)} - K^*K = (\Psi P_\Delta)(\Psi P_\Delta)^*$$

■

Définition 2.1.3 *Le noeud unitaire Δ est dit simple si $H_\Delta = H$.*

Proposition 2.1.4 *Si la contraction T est simple alors, le noeud unitaire Δ est aussi simple.*
Preuve. *découle du fait que l'espace H_1 (formule 1.6) est inclus dans l'espace H_Δ.* ■

2.2 Fonction caractéristique d'un noeud unitaire

Définition 2.2.1 *Etant donné un noeud unitaire*

$$\Delta = \left(H,\ E,\ F,\ \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}\right),$$

on appelle fonction caractèristique de Δ la fonction S_Δ définie sur le disque unité ouvert par :

$$z \longmapsto S_\Delta(z) = K^* + z\Phi^*(Id_H - zT^*)^{-1}\Psi^* \qquad |z| \prec 1 \tag{2.11}$$

On a les propriétés suivantes [4] :

1. Pour tout $z \quad (|z| \prec 1)$, la fonction caractéristique définit un opérateur borné de F dans E.
2. $S_\Delta(z)$ est holomorphe sur le disque unité. En d'autres termes, la fonction scalaire

$$F(a,b,z) \prec S_\Delta(z)(a),\ b \succ (|z| \prec 1)$$

est holomorphe pour tout couple fixé $(a,\ b) \in F \times E$.

3. Un calcul direct donne,

$$Id_F - S^*_\Delta(\lambda) S_\Delta(\mu) = (1-\lambda\overline{\mu})\Psi(Id_H - \overline{\mu}T^*)^{-1}(Id_H - \lambda T^*)^{-1}\Psi^*, \qquad |\lambda| \prec 1,\ |\mu| \prec 1 \tag{2.12}$$

4. Pour tout $z \quad (|z| \prec 1),\ \ \|S_\Delta(\mu)\| \leq 1$.

Pour une connaissance plus approfondie des noeuds unitaires et leurs fonctions caractéristiques, le lecteur peut consulter [4]. Cependant, nous retiendrons de cet article le résultat fondamental suivant :

Theorème 2.2.2 *Deux noeuds unitaires simples*

$$\Delta_1 = \left(H_1,\ E,\ F,\ U_1 = \begin{bmatrix} T_1 & \Phi_1 \\ \Psi_1 & K \end{bmatrix}\right) \quad et \quad \Delta_2 = \left(H_2,\ E,\ F,\ U_2 = \begin{bmatrix} T_2 & \Phi_2 \\ \Psi_2 & K \end{bmatrix}\right)$$

ont la même fonction caractéristique si et seulement si, ils sont unitairement équivalents. En d'autres termes, il existe un opérateur unitaire $A : H_1 \longrightarrow H_2$ tel que :

$$T_1 = A^{-1}T_2A, \qquad \Psi_1 = \Psi_2 A, \qquad \Phi_1 = A^{-1}\Phi_2 \tag{2.13}$$

Chapitre 3

Dilatations unitaires des contractions

3.1 Introduction

Rappelons qu'étant donnée une contraction T dans un Hilbert séparable H, on appelle dilatation de T tout opérateur linéaire V, défini dans un espace de Hilbert $\widetilde{H}$, contenant H comme sous-espace et vérifiant :

$$T^{\,n}(h) = P_H V^{\,n}(h) \qquad \forall h \in H, \quad \forall n = 0,\ 1,\ 2\ldots, \tag{3.1}$$

P_H désigne l'orthoprojecteur de $\widehat{H}$ sur H. La dilatation est dite isométrique (respectivement, unitaire) si l'opérateur V est isométrique (respectivement unitaire).

Comme déjà noté dans l'introduction, Julia G. ([6, 7, 8]) fut historiquement le premier à établir que pour toute contraction définie dans un espace H, il existe une isométrie V, définie un espace $\widetilde{H}$, contenant H comme sous-espace et vérifiant :

$$T\ (h) = P_H V\ (h) \qquad \forall h \in H$$

Halmos P. R. ([5]), remarqua que V pouvait être choisi égal à un opérateur unitaire U. Nagy-Béla S. ([10]) montra que l'opérateur unitaire U pouvait être choisi tel que la relation 3.1 soit vérifiée. Dans ce chapitre, nous proposons la méthode des noeuds unitaires pour la construction d'une dilatation unitaire.

3.2 Méthode des noeuds unitaires

Soient T une contraction dans H et

$$\Delta = \left(H,\ E,\ F,\ \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} \right)$$

un noeud unitaire dont l'opérarteur principal est T, c'est à dire que les relations suivantes sont

satisfaites :

$$\begin{cases} T^*T + \Psi^*\Psi = Id_H \\ TT^* + \Phi\Phi^* = Id_H \end{cases}, \qquad \begin{cases} T^*\Phi + \Psi^*K = 0 \\ T\Psi^* + \Phi K^* = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \Phi^*\Phi + K^*K = Id_E \\ \Psi\Psi^* + KK^* = Id_F \end{cases}$$

Considérons l'ensemble :

$$l^2(E) = \left\{ x_- = (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1}) : x_{-k} \in E \quad et \quad \sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \|x_k\|_E^2 \prec +\infty \right\} \tag{3.2}$$

On définit la somme et la multiplication par un scalaire dans $l^2(E)$ comme suit :

1.

$$\left\{ \begin{array}{c} x_-^{(1)} = \left(\ldots,\ x_{-2}^{(1)},\ x_{-1}^{(1)}\right) \in l^2(E) \\ et \\ x_-^{(2)} = \left(\ldots,\ x_{-2}^{(2)},\ x_{-1}^{(2)}\right) \in l^2(E) \end{array} \right. \Longrightarrow x_-^{(1)} + x_-^{(2)} = \left(\ldots,\ x_{-2}^{(1)} + x_{-2}^{(2)},\ x_{-1}^{(1)} + x_{-1}^{(2)}\right)$$

2.

$$x_- = (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1}) \in l^2(E) \quad et \quad \lambda \in \mathbb{C} \Longrightarrow \lambda.x_- = (\ldots,\ \lambda.x_{-2},\ \lambda.x_{-1})$$

On vérifie facilement que la somme ainsi définie de deux éléments de $l^2(E)$ est aussi un élément de $l^2(E)$. En effet, l'inégalité de Minkovski nous donne,

$$\sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \left\|x_k^{(1)} + x_k^{(2)}\right\|_E^2 \leq \left(\left(\sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \left\|x_k^{(1)}\right\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \left\|x_k^{(2)}\right\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \prec +\infty$$

De même, le produit par un scalaire de tout élément de $l^2(E)$ est aussi un élément de $l^2(E)$.

Remarque. On vérifie aussi que muni de ces deux opérations, l'ensemble $l^2(E)$ est un espace vectoriel complexe. ■

On définit un produit scalaire dans $l^2(E)$ en posant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_-^{(1)} = \left(\ldots,\ x_{-2}^{(1)},\ x_{-1}^{(1)}\right) \in l^2(E) \\ et \\ x_-^{(2)} = \left(\ldots,\ x_{-2}^{(2)},\ x_{-1}^{(2)}\right) \in l^2(E) \end{array} \right. \Longrightarrow \prec x_-^{(1)},\ x_-^{(2)} \succ_{l^2(E)} = \sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \prec x_k^{(1)},\ x_k^{(2)} \succ_E \tag{3.3}$$

La norme associée est donnée par la formule

$$x_- = (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1}) \in l^2(E) \Longrightarrow \|x_-\|_{l^2(E)} = \left(\sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \|x_k\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 3.2.1 $\left(l^2(E),\ \prec .,\ . \succ_{l^2(E)}\right)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve. *Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy pour la norme* $\|.\|_{l^2(E)}$ *converge dans* $l^2(E)$ *au sens de cette même norme. Soit donc* $\left(a^{(n)} = \left(\ldots, a_{-2}^{(n)}, a_{-1}^{(n)}\right)\right)_n$ *une suite de Cauchy. On a donc,*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ n \geq N_\varepsilon \quad et\ m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left\|a^{(n)} - a^{(m)}\right\|_{l^2(E)}^2 = \sum_{k\ =\ -\infty}^{-1} \left\|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}\right\|_E^2 \prec \varepsilon \tag{3.4}$$

Par conséquent,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ n \geq N_\varepsilon \quad et\ m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left\|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}\right\|_E^2 \prec \varepsilon \quad (\forall k = -1, -2,\ \ldots) \tag{3.5}$$

La formule 3.5 signifie que pour tout $k = -1, -2, \ ..., $ *la suite* $\left(a_k^{(n)}\right)_n$ *est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert (donc complet)* E*. Autrement dit, pour tout* $k = -1, -2, \ ...,$ *la suite* $\left(a_k^{(n)}\right)_n$ *admet une limite* $a_k \in E$*. En écriture mathématique,*

$$\forall k = -1, -2, \ ..., \forall \varepsilon \succ 0, \ \exists N_{k, \ \varepsilon} \in \mathbb{N} : \ n \geq N_{k, \ \varepsilon} \Longrightarrow \left\| a_k^{(n)} - a_k \right\|_E \prec 2^k \varepsilon$$

Posons : $a = (..., a_{-2}, a_{-1})$ *alors,* $a \in l^2(E)$*. En effet,*

$$\begin{aligned}
\sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \|a_k\|_E^2 &\leq \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \left\| a_k - a_k^{(N_{k, \ \varepsilon})} \right\|_E^2 + \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \left\| a_k^{(N_{k, \ \varepsilon})} \right\|_E^2 \\
&\leq \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} 2^k \varepsilon + \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \left\| a_k^{(N_{k, \ \varepsilon})} \right\|_E^2 = \sum_{k \ = \ 1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} + \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \left\| a_k^{(N_{k, \ \varepsilon})} \right\|_E^2 \\
&= \varepsilon + \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \left\| a_k^{(N_{k, \ \varepsilon})} \right\|_E^2 \prec +\infty \quad (car, \ a^{(N_{k, \ \varepsilon})} = \left(..., a_{-2}^{(N_{k, \ \varepsilon})}, \ a_{-1}^{(N_{k, \ \varepsilon})}\right) \in l^2(E)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en faisant tendre m *vers l'infini dans la relation 3.4, on obtient :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ n \geq N_\varepsilon \quad et \ m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left\| a^{(n)} - a \right\|_{l^2(E)}^2 = \sum_{k \ = \ -\infty}^{-1} \left\| a_k^{(n)} - a_k \right\|_E^2 \prec \varepsilon$$

En d'autres termes,

$$\lim_{n \ \longrightarrow \ +\infty} a^{(n)} = a \qquad \left(au \ sens \ de \ la \ norme \ \|.\|_{l^2(E)}\right)$$

■

Remarque. Il ressort du raisonnement ci-dessus que dans l'espace $l^2(E)$,

$$\lim_{n \ \longrightarrow \ +\infty} a^{(n)} = a \quad \left(au \ sens \ de \ \|.\|_{l^2(E)}\right) \Longleftrightarrow \lim_{n \ \longrightarrow \ +\infty} a_k^{(n)} = a_k \ \ \forall k \quad (au \ sens \ de \ \|.\|_E)$$

De plus, la séparabilité de l'espace E entraine celle de l'espace $l^2(E)$. ■

Considérons maintenant l'espace

$$l^2(F) = \left\{ x_+ = (x_1, \ x_2, \ ...) : x_k \in F \quad et \quad \sum_{k \ = \ 1}^{+\infty} \|x_k\|_F^2 \prec +\infty \right\}$$

Les opérations d'addition et de multaiplication par un scalaire dans $l^2(F)$ se définissent de la même manière que pour l'espace $l^2(E)$. De plus, on peut munir $l^2(F)$ d'une structure d'espace de Hilbert séparable en définissant le produit scalaire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_+^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ ....\right) \in l^2(F) \\ et \\ x_+^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)}, \ ....\right) \in l^2(F) \end{array} \right. \Longrightarrow \prec x_+^{(1)}, \ x_+^{(2)} \succ_{l^2(F)} = \sum_{k \ = \ 1}^{+ \ \infty} \prec x_k^{(1)}, \ x_k^{(2)} \succ_F \tag{3.6}$$

et la norme associée est donnée par la formule :

$$x_+ = (x_1, \ x_2, \ ...) \in l^2(F) \Longrightarrow \|x_+\|_{l^2(F)} = \left(\sum_{k \ = \ 1}^{+\infty} \|x_k\|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace de dilatation (noté $\widetilde{H}$) est l'espace :

$$\widetilde{H} = \left\{ \widetilde{h} = (...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ ...) : \left\{ \begin{array}{c} x_- = (...,\ x_{-2},\ x_{-1}) \in l^2(E) \\ h \in H \\ x_+ = (x_1,\ x_2,\ ...) \in l^2(F) \end{array} \right. \right\} \tag{3.7}$$

(ici, l'élément sousligné désigne la composante dans H du vecteur $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$).

Le produit scalaire de deux éléments $\widetilde{h}_1 = \left(...,\ x_{-2}^{(1)},\ x_{-1}^{(1)},\ h_1,\ x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ ...\right)$ et $\widetilde{h}_2 = \left(...,\ x_{-2}^{(2)},\ x_{-1}^{(2)},\ h_2,\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ ...\right)$ de $\widetilde{H}$ est donné par :

$$\prec \widetilde{h}_1,\ \widetilde{h}_2 \succ_{\widetilde{H}} = \sum_{k\,=\,-\infty}^{-1} \prec x_k^{(1)},\ x_k^{(2)} \succ_E + \prec h_1,\ h_2 \succ_H + \sum_{k\,=\,1}^{+\,\infty} \prec x_k^{(1)},\ x_k^{(2)} \succ_F \tag{3.8}$$

Proposition 3.2.2 *L'espace* $\left(\widetilde{H},\ \prec .,\ . \succ\right)$ *est un Hilbert séparable.*
Preuve. *La somme orthogonale* $l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)$ *peut être muni de manière naturelle d'une structure d'espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire :*

$$\prec x_-^{(1)} \oplus h_1 \oplus x_+^{(1)},\ x_-^{(2)} \oplus h_2 \oplus x_+^{(2)} \succ = \prec x_-^{(1)},\ x_-^{(2)} \succ_{l^2(E)} + \prec h_1,\ h_2 \succ_H + \prec x_+^{(1)},\ x_+^{(2)} \succ_{l^2(F)}$$

D'autre part, l'application J*, définie de la somme orthogonale* $l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)$ *dans* $\widetilde{H}$ *par :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_- = (...,\ x_{-2},\ x_{-1}) \\ h \in H \\ x_+ = (x_1,\ x_2,\ ...) \end{array} \right. \Longrightarrow J(x_- \oplus h \oplus x_+) = (...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ h,\ x_1,\ x_2,\ ...)$$

est un isomorphisme isométrique (conserve le produit scalaire). Par conséquent, $\widetilde{H} = J\left(l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)\right)$ *est aussi un espace séparable.* ■

Remarque. Les applications :

$$\begin{array}{lll} J_E & : & l^2(E) \longrightarrow \widetilde{H},\quad J(x_- = (...,\ x_{-2},\ x_{-1})) = x_- = (...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ 0,\ 0,\ 0,\ ...) \\ J_H & : & H \longrightarrow \widetilde{H},\quad J(h) = (...,\ 0,\ 0,\ h,\ 0,\ 0,\ ...) \\ J_F & : & l^2(F) \longrightarrow \widetilde{H},\quad J(x_+ = (x_1,\ x_2,\ ...)) = (...,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_1,\ x_2,\ ...) \end{array}$$

sont des isométries. Cela permet les identifications :

$$l^2(E) \ni x_- = (...,\ x_{-2},\ x_{-1}) = (...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ 0,\ 0,\ 0,\ ...) \in \widetilde{H} \tag{3.9}$$

$$H \ni h = (...,\ 0,\ 0,\ h,\ 0,\ 0,\ ...) \in \widetilde{H} \tag{3.10}$$

$$l^2(F) \ni x_+ = (x_1,\ x_2,\ ...) = (...,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_1,\ x_2,\ ...) \in \widetilde{H}$$

En particulier, l'espace H peut être regardé comme un sous -espace de $\widetilde{H}$. ■
Considérons maintenant l'opérateur U définit de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{H}$ par :

$$U(...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ ...) = \left(...,\ x_{-2},\ \underline{T(h) + \Phi(x_{-1})},\ \Psi(h) + K(x_{-1}),\ x_1,\ ...\right) \tag{3.11}$$

Theorème 3.2.3 *L'opérateur* U *est une dilatation unitaire de* T.
Preuve.

1. *Commençons tout d'abord par calculer l'opérateur adjoint U^*. Pour tous*

$$(...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ ...) \quad et \quad (...,\ x'_{-2},\ x'_{-1},\ \underline{h'},\ x'_1,\ x'_2,\ ...)$$

dans l'espace $\widetilde{H}$,

$$\begin{aligned}
&\prec \ U(...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ ...),\ \big(...,\ x'_{-2},\ x'_{-1},\ \underline{h'},\ x'_1,\ x'_2,\ ...\big) \succ_{\widetilde{H}} \\
= &\sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec T(h) + \Phi(x_{-1}),\ h' \succ_H + \\
\prec &\ \Psi(h) + K(x_{-1}),\ x'_1 \succ_F + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
= &\sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec T(h),\ h' \succ_H + \prec \Phi(x_{-1}),\ h' \succ_H + \\
\prec &\ \Psi(h),\ x'_1 \succ_F + \prec K(x_{-1}),\ x'_1 \succ_F + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
= &\sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec h,\ T^*(h') \succ_H + \prec x_{-1},\ \Phi^*(h') \succ_E + \\
\prec &\ h,\ \Psi^*(x'_1) \succ_H + \prec x_{-1},\ K^*(x'_1) \succ_E + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
= &\sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec x_{-1},\ \Phi^*(h') + K^*(x'_1) \succ_E + \\
\prec &\ h,\ T^*(h') + \Psi^*(x'_1) \succ_H + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
= &\ \prec (...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ ...),\ \Big(...,\ x'_{-1},\ \Phi^*(h') + K^*(x'_1),\ \underline{T^*(h') + \Psi^*(x'_1)},\ x'_2,\ ...\Big) \succ_{\widetilde{H}}
\end{aligned}$$

Commençons tout d'abord par calculer l'opérateur adjoint U^*. Pour tous

$$(...,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ ...) \quad et \quad (...,\ x'_{-2},\ x'_{-1},\ \underline{h'},\ x'_1,\ x'_2,\ ...)$$

dans l'espace $\widetilde{H}$,

$$\begin{aligned}
&\prec U\left(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots\right),\ \left(\ldots,\ x'_{-2},\ x'_{-1},\ \underline{h'},\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots\right) \succ_{\widetilde{H}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec T(h) + \Phi(x_{-1}),\ h' \succ_H + \\
&\prec \Psi(h) + K(x_{-1}),\ x'_1 \succ_F + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec T(h),\ h' \succ_H + \prec \Phi(x_{-1}),\ h' \succ_H + \\
&\prec \Psi(h),\ x'_1 \succ_F + \prec K(x_{-1}),\ x'_1 \succ_F + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec h,\ T^*(h') \succ_H + \prec x_{-1},\ \Phi^*(h') \succ_E + \\
&\prec h,\ \Psi^*(x'_1) \succ_H + \prec x_{-1},\ K^*(x'_1) \succ_E + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \prec x_{k-1},\ x'_k \succ_E + \prec x_{-1},\ \Phi^*(h') + K^*(x'_1) \succ_E + \\
&\prec h,\ T^*(h') + \Psi^*(x'_1) \succ_H + \sum_{k=2}^{+\infty} \prec x_k,\ x'_k \succ_F \\
&= \prec \left(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots\right),\ \left(\ldots,\ x'_{-1},\ \Phi^*(h') + K^*(x'_1),\ \underline{T^*(h') + \Psi^*(x'_1)},\ x'_2,\ \ldots\right) \succ_{\widetilde{H}}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$U^*\left(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots\right) = \left(\ldots,\ x_{-1},\ \Phi^*(h) + K^*(x_1),\ \underline{T^*(h) + \Psi^*(x_1)},\ x_2,\ \ldots\right) \tag{3.12}$$

2. *Montrons que l'opérateur U est unitaire :*

$$U^*U = UU^* = Id_{\widetilde{H}}$$

On a,

$$\begin{aligned}
U^*U\left(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots\right) &= U^*\left(\ldots,\ x_{-2},\ \underline{T(h) + \Phi(x_{-1})},\ \Psi(h) + K(x_{-1}),\ x_1,\ \ldots\right) \\
&= \begin{pmatrix} \ldots,\ x_{-2},\ \Phi^*(T(h) + \Phi(x_{-1})) + K^*(\Psi(h) + K(x_{-1})), \\ \underline{T^*(T(h) + \Phi(x_{-1})) + \Psi^*(\Psi(h) + K(x_{-1}))},\ x_1,\ \ldots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ldots,\ x_{-2},\ \Phi^*(T(h) + \Phi(x_{-1})) + K^*(\Psi(h) + K(x_{-1})), \\ \underline{T^*(T(h) + \Phi(x_{-1})) + \Psi^*(\Psi(h) + K(x_{-1}))},\ x_1,\ \ldots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \ldots,\ x_{-2},\ (\Phi^*T(h) + K^*\Psi(h)) + (K^*K(x_{-1}) + \Phi^*\Phi(x_{-1})), \\ \underline{(T^*T(h) + \Psi^*\Psi(h)) + (T^*\Phi(x_{-1}) + \Psi^*K(x_{-1}))},\ x_1,\ \ldots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les relations noeudales 2.6 nous donnent,

$$\begin{cases} T^*T(h) + \Psi^*\Psi(h) = (T^*T + \Psi^*\Psi)(h) = Id_H(h) = h \\ K^*K(x_{-1}) + \Phi^*\Phi(x_{-1}) = (K^*K + \Phi^*\Phi)(x_{-1}) = Id_E(x_{-1}) = x_{-1} \\ \Phi^*T(h) + K^*\Psi(h) = (\Phi^*T + K^*\Psi)(h) = 0 \\ T^*\Phi(x_{-1}) + \Psi^*K(x_{-1}) = (T^*\Phi + \Psi^*K)(x_{-1}) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$U^*U(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots) = (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$$

c'est à dire que $U^*U = Id_{\widetilde{H}}$.
De la manière,

$$\begin{aligned} UU^*(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots) &= U\Big(\ldots,\ x_{-1},\ \Phi^*(h) + K^*(x_1),\ \underline{T^*(h) + \Psi^*(x_1)},\ x_2,\ \ldots\Big) \\ &= \begin{pmatrix} \ldots,\ x_{-1},\ \underline{T(T^*(h) + \Psi^*(x_1)) + \Phi(\Phi^*(h) + K^*(x_1))}, \\ \Psi(T^*(h) + \Psi^*(x_1)) + K(\ \Phi^*(h) + K^*(x_1)),\ x_2,\ \ldots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ldots,\ x_{-1},\ \underline{TT^*(h) + T\Psi^*(x_1) + \Phi\Phi^*(h) + \Phi K^*(x_1)}, \\ \Psi T^*(h) + \Psi\Psi^*(x_1) + K\ \Phi^*(h) + KK^*(x_1),\ x_2,\ \ldots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ldots,\ x_{-1},\ \underline{TT^*(h) + +\Phi\Phi^*(h) + T\Psi^*(x_1) + \Phi K^*(x_1)}, \\ \Psi T^*(h) + K\ \Phi^*(h) + \Psi\Psi^*(x_1) + KK^*(x_1),\ x_2,\ \ldots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les relations noeudales 2.6 nous donnent,

$$\begin{cases} TT^*(h) + +\Phi\Phi^*(h) = (TT^* + \Phi\Phi^*)(h) = Id_H(h) = h \\ \Psi\Psi^*(x_1) + KK^*(x_1) = (\Psi\Psi^* + KK^*)(x_1) = Id_F(x_1) = x_1 \\ \Psi T^*(h) + K\ \Phi^*(h) = (\Psi T^* + K\ \Phi^*)(h) = 0 \\ T\Psi^*(x_1) + \Phi K^*(x_1) = (T\Psi^* + \Phi K^*)(x_1) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$UU^*(\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots) = (\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ \underline{h},\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$$

c'est à dire que $UU^* = Id_{\widetilde{H}}$.

3. *Soit* P_H *l'orthoprojecteur de* $\widetilde{H}$ *sur* H. *En utilisant l'identification de l'élément* $h \in H$ *avec l'élémént* $(\ldots\ ,\ 0,\ \underline{h},\ 0,\ \ldots) \in \widetilde{H}$ *et la relation évidente,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall h \in H:\ U^n(\ldots,\ 0,\ \underline{h},\ 0,\ \ldots) = \Big(\ldots,\ 0,\ \underline{T^n(h)},\ 0,\ \ldots\Big)$$

on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall h \in H$,

$$P_H U^n(h) = P_H U^n(\ldots,\ 0,\ \underline{h},\ 0,\ \ldots) = P_H\Big(\ldots,\ 0,\ \underline{T^n(h)},\ 0,\ \ldots\Big) = T^n(h)$$

ce qui signfie bien que U *est une dilatation unitaire de la contraction* T.

∎

Chapitre 4

Etude d'un exemple concret

4.1 Etude de l'opérateur principal

Considérons dans l'espace complexe $L^2_{[0,\ l]}$ $(-\infty \prec l \prec +\infty)$ l'opérateur

$$Tf(x) = e^{i\alpha(x)}f(x) - 2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-t}f(t)\,dt\ , \quad \forall f \in L^2_{[0,\ l]} \tag{4.1}$$

où, α est une fonction définie sur l'intervalle $[0,\ 1]$.

Proposition 4.1.1 *L'opérateur T est bien défini et borné.*
Preuve. *Dire que T est bien défini, signifie que pour tout $f \in L^2_{[0,\ l]}$, la fonction $g = T(f)$ est aussi un élément de $L^2_{[0,\ l]}$. Définissons dans $L^2_{[0,\ l]}$ les opérateurs :*

$$Af(x) = e^{i\alpha(x)}f(x)\,, \qquad Bf(x) = 2e^x\int_x^l e^{-t}f(t)\,dt$$

Il est clair que

$$T = A(I-B)$$

Il suffit donc de prouver que les opérateurs A et B sont bien définis et bornés. On a,

$$\forall f \in L^2_{[0,\ l]} : \int_0^l |Af(x)|^2\,dx = \int_0^l |f(x)|^2\,dx = \|f\|^2$$

L'opérateur A est donc bien défini, borné et $\|A\| = 1$.
D'autre part, pour tout $f \in L^2_{[0,\ l]}$,

$$\begin{aligned}\int_0^l |Bf(x)|^2\,dx &= \int_0^l \left|2e^x\int_x^l e^{-t}f(t)\,dt\right|^2 dx \le 4\int_0^l e^{2x}\left(\int_x^l \left|e^{-t}f(t)\right|dt\right)^2 \\ &\le 4e^{2l}\int_0^l\left(\int_0^l \left|e^{-t}f(t)\right|dt\right)^2\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne,

$$\left(\int_0^l \left|e^{-t} f(t)\right| dt\right)^2 \leq \left(\left(\int_0^l e^{-2t} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1-e^{-2l}}{2} \|f\|^2$$

Par conséquent,

$$\|B(f)\|^2 = \int_0^l |Bf(x)|^2 dx \leq 2\left(e^{2l}-1\right)\|f\|^2$$

Cette dernière inégalité, signifie que l'opérateur B est bien défini, borné et $\|B\| \leq \sqrt{2(e^{2l}-1)}$.
■

Proposition 4.1.2 *L'opérateur A^* est défini dans $L^2_{[0,\ l]}$ par la formule :*

$$T^* f(x) = e^{-i\alpha(x)} f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\, dt\ , \quad \forall f \in L^2_{[0,\ l]} \tag{4.2}$$

Preuve. *Pour tous $f,\ g \in L^2_{[0,\ l]}$,*

$$\prec\ T(g)\,,\ f \succ = \int_0^l \left(e^{i\alpha(x)} g(x) - 2e^{i\alpha(x)+x} \int_x^l e^{-t} g(t)\, dt\right) \overline{f(x)} dx \tag{4.3}$$

$$= \int_0^l e^{i\alpha(x)} g(x)\, \overline{f(x)} dx - 2\int_0^l e^{i\alpha(x)+x} \int_x^l e^{-t} g(t)\, dt \overline{f(x)} dx$$

On a :

$$\int_0^l e^{i\alpha(x)} g(x)\, \overline{f(x)} dx = \int_0^l g(x)\, .\overline{e^{-i\alpha(x)} f(x)} dx \tag{4.4}$$

D'autre part,

$$\int_0^l e^{i\alpha(x)+x} \int_x^l e^{-t} g(t)\, dt \overline{f(x)} dx = \int_0^l \int_x^l e^{i\alpha(x)+x} e^{-t} g(t)\, \overline{f(x)} dt dx \tag{4.5}$$

$$= \int_0^l e^{-t} g(t) \int_0^t e^{i\alpha(x)+x} \overline{f(x)} dx dt$$

$$= \int_0^l e^{-x} g(x) \overline{\int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t) dt} dx \tag{4.6}$$

En reportant 4.4 et 4.6 dans 4.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
\prec\ g,\ T^{*}(f) \succ\ = \prec T(g),\ f \succ\ &= \int_0^l g(x)\,.\overline{e^{-i\alpha(x)} f(x)}dx - 2\int_0^l e^{\,-x} g(x) \overline{\int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)dtdx} \\
&= \int_0^l g(x)\left(\overline{e^{-i\alpha(x)} f(x)} - 2e^{\,-x}\overline{\int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)dt}\right)dx \\
&= \int_0^l g(x)\overline{\left(e^{-i\alpha(x)} f(x) - 2e^{\,-x}\int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\,dt\right)}dx
\end{aligned}$$

D'où, le résultat recherché. ■

Proposition 4.1.3 *On a les identités suivantes :*

$$(I - T^{*}T)\, f(x) = 2e^{\,-x}\int_0^l e^{\,-t} f(t)\,dt \qquad \forall f \in L^2_{[0,\ l]} \tag{4.7}$$

et

$$(I - TT^{*})\, f(x) = 2e^{i\alpha(x)+x-2l}\int_0^l e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\,dt \qquad \forall f \in L^2_{[0,\ l]} \tag{4.8}$$

Preuve. *On sait déjà que*

$$T = A(I - B) = A - AB$$

où,

$$Af(x) = e^{i\alpha(x)} f(x) \qquad et \qquad Bf(x) = 2e^{x}\int_x^l e^{-t} f(t)\,dt \qquad \forall f \in L^2_{[0,\ l]}$$

De plus, un calcul direct nous donne :

$$A^{*}f(x) = e^{-i\alpha(x)} f(x) \qquad et \qquad B^{*}f(x) = 2e^{-x}\int_0^x e^{t} f(t)\,dt \qquad \forall f \in L^2_{[0,\ l]}$$

De la relation,

$$A^{*}A = AA^{*} = I, \tag{4.9}$$

découle que

$$I - T^{*}T = (A^{*} - B^{*}A^{*})(A - AB) = B + B^{*} - B^{*}B \tag{4.10}$$

$$I - TT^{*} = (A - AB)(A^{*} - B^{*}A^{*}) = A(B + B^{*} - BB^{*})A^{*} \tag{4.11}$$

D'autre part, pour tout $f \in L^2_{[0,\ l]}$,

$$\begin{aligned}
B^{*}Bf(x) &= 2e^{-x}\int_0^x e^{t}(Bf(t))\,dt = 2e^{-x}\int_0^x e^{t}\left(2e^{t}\int_t^l e^{-s} f(s)\,ds\right)dt \\
&= 2e^{-x}\int_0^x \left(2e^{2t}\int_t^l e^{-s} f(s)\,ds\right)dt
\end{aligned}$$

Une intègration par parties donne,

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(2e^{2t}\int_t^l e^{-s} f(s)\,ds\right) dt &= \left[e^{2t}\int_t^l e^{-s} f(s)\,ds\right]_0^x + \int_0^x e^t f(t)\,dt \\ &= e^{2x}\int_x^l e^{-t} f(t)\,dt - \int_0^l e^{-t} f(t)\,dt + \int_0^x e^t f(t)\,dt\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}B^*Bf(x) &= 2e^{x}\int_x^l e^{-t} f(t)\,dt - 2e^{-x}\int_0^l e^{-t} f(t)\,dt + 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt \\ &= Bf(x) + B^*f(x) - 2e^{-x}\int_0^l e^{-t} f(t)\,dt\end{aligned}$$

Soit finalement,

$$(I - T^*T)\,f(x) = 2e^{-x}\int_0^l e^{-t} f(t)\,dt$$

De la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}BB^*f(x) &= 2e^{x}\int_x^l e^{-t}\left(B^*f(t)\right) dt = 2e^{x}\int_x^l e^{-t}\left(2e^{-t}\int_0^t e^{s} f(s)\,ds\right) dt \\ &= 2e^{x}\int_x^l \left(2e^{-2t}\int_0^t e^{s} f(s)\,ds\right) dt\end{aligned}$$

En intègrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_x^l \left(2e^{-2t}\int_0^t e^{s} f(s)\,ds\right) dt &= \left[-e^{-2t}\int_0^t e^{s} f(s)\,ds\right]_x^l + \int_x^l e^{-t} f(t)\,dt \\ &= e^{-2x}\int_0^x e^{t} f(t)\,dt - e^{-2l}\int_0^l e^{t} f(t)\,dt + \int_x^l e^{-t} f(t)\,dt\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}BB^*f(x) &= 2e^{-x}\int_0^x e^{t} f(t)\,dt - 2e^{x-2l}\int_0^l e^{t} f(t)\,dt + 2e^{x}\int_x^l e^{-t} f(t)\,dt \\ &= B^*f(x) + Bf(x) - 2e^{x-2l}\int_0^l e^{t} f(t)\,dt\end{aligned}$$

D'où, en utilisant la relation 4.12,

$$(I - TT^*)\,f(x) = 2e^{i\alpha(x)+x-2l}\int_0^l e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\,dt$$

■

Corollaire 4.1.4 *L'opérateur T est une contraction dans $L^2_{[0,\ l]}$.*
Preuve. *Découle du fait que pour tout $f \in L^2_{[0,\ l]}$,*

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 - \|T(f)\|^2 &= \prec (I - T \in T) f,\ f \succ = \int_0^l \left(2e^{\,-x} \int_0^l e^{\,-t} f(t)\, dt \right) \overline{f(x)} dx \\
&= 2 \left(\int_0^l e^{\,-t} f(t)\, dt \right) \left(\int_0^l e^{\,-x} \overline{f(x)} dx \right) \\
&= 2 \left| \int_0^l e^{\,-t} f(t)\, dt \right|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

■

Theorème 4.1.5 *Le spectre $\sigma(T)$ de l'opérateur T est consitué uniquement de sa partie continue. De plus,*

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda = e^{i\alpha(x)} : x \in [0,\ l] \right\}$$

Preuve.

1. *Nous allons commencer par montrer que si $\lambda \neq e^{i\alpha(x)}$ $\forall x \in [0,\ l]$ alors, l'opérateur $(T - \lambda I)^{-1}$ existe sur tout $L^2_{[0,\ l]}$ et est borné. D'après le théorème de Banach sur l'isomorphisme, il suffit de prouver que l'opérateur $T - \lambda I$ définit une bijection de $L^2_{[0,\ l]}$ dans lui même. Ceci à son tour revient à prouver que pour tout $g \in L^2_{[0,\ l]}$, il existe une seule fonction $f \in L^2_{[0,\ l]}$ telle que $(T - \lambda I) f = g$. On a,*

$$\begin{aligned}
(T - \lambda I) f &= g \Longleftrightarrow \left(e^{i\alpha(x)} - \lambda \right) f(x) - 2e^{i\alpha(x)+x} \int_x^l e^{\,-t} f(t)\, dt = g(x) \qquad \forall x \in [0,\ l] \\
&\Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{g(x)}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} + 2\ \frac{e^{i\alpha(x)+x}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} \int_x^l e^{\,-t} f(t)\, dt \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Posons :

$$F(x) = \int_x^l e^{\,-t} f(t)\, dt \qquad (4.13)$$

La relation 4.12 conduit alors au problème différentiel,

$$\left\{ \begin{array}{c} F'(x) = -2\ \dfrac{e^{i\alpha(x)}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} F(x) - \dfrac{e^{-x}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} g(x) \\ F(l) = 0 \end{array} \right. \qquad (4.14)$$

La solution du problème 4.14 est de la forme :

$$F(x) = \left\{ \int_x^l \frac{e^{-t}}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} g(t) . e^{\int_t^l \frac{-2e^{i\alpha(s)}}{e^{i\alpha(s)} - \lambda} ds} dt \right\} . e^{\int_x^l \frac{2e^{i\alpha(t)}}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \qquad (4.15)$$

D'où, en utilisant 4.12,

$$f(x) = \frac{g(x)}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} + 2\,\frac{e^{i\alpha(x)+x}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda}\left\{\int_x^l \frac{e^{-t}}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} g(t).e^{\int_t^l \frac{-2e^{i\alpha(s)}}{e^{i\alpha(s)} - \lambda} ds} dt\right\}.e^{\int_x^l \frac{2e^{i\alpha(t)}}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \tag{4.16}$$

La formule 4.15 montre que la fonction f est définie de manière unique par g pour tout,

$$\lambda \notin \left\{\lambda = e^{i\alpha(x)} : x \in [0,\ l]\right\}$$

En d'autres termes,

$$\sigma(T) = \left\{\lambda = e^{i\alpha(x)} : x \in [0,\ l]\right\}$$

2. *Montrons maintenant que le spectre de T ne contient aucune valeur propre. Supposons le contraire il existe donc un complexe λ et fonction non presque partout nulle $f \in L^2_{[0,\ l]}$ tels que :*

$$\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right) f(x) - 2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-t} f(t)\,dt = 0\ , \qquad \forall x \in [0,\ l] \tag{4.17}$$

Or,

$$\lambda \in \sigma(T) = \left\{\lambda = e^{i\alpha(x)} : x \in [0,\ l]\right\} \Longrightarrow \lambda = e^{i\alpha(a)}, \quad a \in [0,\ l]$$

Par conséquent,

$$\left(e^{i\alpha(x)} - e^{i\alpha(a)}\right) f(x) - 2e^{i\alpha(x)+x}\int_x^l e^{-t} f(t)\,dt = 0\ , \qquad \forall x \neq a$$

En reprenant le même raisonnement précédent et posant dans la formule 4.16 $g(x) = 0$ pour $x \neq a$, on obtient que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq a$. En d'autres termes, la fonction f est presque partout nulle, ce qui est en contradction avec les hypothèses faites sur f.

3. *Un raisonnement analogue permet de prouver que l'opérateur T^* n'admet aucune valeur propre. En d'autres termes, $\sigma(T) = \sigma_{rés}(T) = \varnothing$.*

■

4.2 Construction du noeud unitaire associé

Posons,

$$g(x) = \sqrt{2}e^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{2}e^{i\alpha(x)+x-l} \tag{4.18}$$

il est clair qu'on a alors,

$$(I - T^*T) f = \prec f,\ g \succ g \qquad \text{et} \qquad (I - TT^*) f = \prec f,\ h \succ h \qquad \forall f \in L^2_{[0,\ l]} \tag{4.19}$$

Considérons maintenant les opérateurs :

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow L^2_{[0,\ l]}; \qquad \Phi(z) = z.h \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{4.20}$$

$$\Psi : L^2_{[0,\ l]} \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad \Psi(f) = \prec f,\ g \succ \qquad \forall f \in L^2_{[0,\ l]} \tag{4.21}$$

$$K:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C};\qquad K(z)=-z.e^{-l}\qquad\forall z\in\mathbb{C}\tag{4.22}$$

Un calcul direct permet de vérifier que,

$$\Phi^*:L^2_{[0,\ l]}\longrightarrow\mathbb{C};\qquad \Phi^*(f)=\prec f,\ h\succ\qquad \forall f\in L^2_{[0,\ l]}\tag{4.23}$$

$$\Psi^*:\mathbb{C}\longrightarrow L^2_{[0,\ l]};\qquad \Psi^*(z)=z.g\qquad\forall z\in\mathbb{C}\tag{4.24}$$

$$K^*:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C};\qquad K(z)=-z.e^{-l}\qquad\forall z\in\mathbb{C}\tag{4.25}$$

Theorème 4.2.1 *L'ensemble* $\Delta=\left(H,\ \mathbb{C},\ \mathbb{C},\ \begin{bmatrix} T & \Phi\\ \Psi & K\end{bmatrix}\right)$ *est un noeud unitaire.*

Preuve. *On a, pour tout* $f\in L^2_{[0,\ l]}$

$$\Psi^*\Psi(f)=\Psi^*(\prec f,\ g\succ)=\prec f,\ g\succ .g=(I-T^*T)\,f,$$

$$\Phi\Phi^*(f)=\Phi(\prec f,\ h\succ)=\prec f,\ h\succ .h=(I-TT^*)\,f$$

D'autre part, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\Phi^*\Phi(z)+K^*K(z) &= z.\Phi^*(h)+z.e^{-2l}=z.\prec h,\ h\succ+\ z.e^{-2l}\\ &= 2z\int_0^l e^{2x-2l}dx+\ z.e^{-2l}=z.e^{-2l}\left(2\int_0^l e^{2x}dx+1\right)=z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi\Psi^*(z)+KK^*(z) &= z.\Psi(g)+z.e^{-2l}=z.\prec g,\ g\succ+\ z.e^{-2l}\\ &= 2z\int_0^l e^{-2x}dx+z.e^{-2l}=z\left(2\int_0^l e^{-2x}dx+e^{-2l}\right)=z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T^*\Phi(z)+\Psi^*K(z))(x) &= z.T^*(h)(x)-e^{-l}\Psi^*(z)(x)\\ &= z.\sqrt{2}\left(e^{x-l}-2e^{-x}\int_0^x e^{2t-l}dt\right)-ze^{-l}.g(x)\\ &= z.\sqrt{2}e^{-l}\left(e^{x}-2e^{-x}\int_0^x e^{2t}dt-e^{-x}\right)\\ &= z.\sqrt{2}e^{-l}\left(e^{x}-e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)-e^{-x}\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T\Psi^*(z)+\Phi K^*(z))(x) &= zT(g)(x)-z.e^{-l}.h(x)\\ &= z.\sqrt{2}e^{i\alpha(x)}\left(e^{-x}-2e^{x}\int_x^l e^{-2t}dt-e^{-2l+x}\right)\\ &= z.\sqrt{2}e^{i\alpha(x)}\left(e^{-x}+e^{x}\left(e^{-2l}-e^{-2x}\right)-e^{-2l+x}\right)=0\end{aligned}$$

Toutes les conditions d'un noeud unitaire sont donc vérifiées. ■

Passons maintenant au calcul de la fonction catactéristique du noeud Δ. Pour tout complexe λ $(|\lambda| \prec 1)$,

$$S_\Delta(\lambda) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto S_\Delta(\lambda)(z) = S_\Delta(\lambda, z)$$

La linéarité de $S_\Delta(z, \lambda)$ par rapport à λ nous donne :

$$S_\Delta(\lambda, z) = z.s_\Delta(\lambda) \qquad avec \qquad s_\Delta(\lambda) = S_\Delta(\lambda, 1) \tag{4.26}$$

Tout revient donc à calculer $S_\Delta(\lambda, 1)$. D'après la formule 2.11,

$$\begin{aligned} S_\Delta(\lambda, 1) &= K^*(1) + \lambda\Phi^*(Id_H - \lambda T^*)^{-1}\Psi^*(1) \\ &= -e^{-l} + \lambda\Phi^*(Id_H - \lambda T^*)^{-1}(g) = -e^{-l} + \lambda \prec (Id_H - \lambda T^*)^{-1}(g), h \succ \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(Id_H - \lambda T^*)^{-1}(g) = f \Longleftrightarrow g = (Id_H - \lambda T^*)(f)$$

D'où,

$$\sqrt{2}e^{-x} = \left(1 - \lambda e^{-i\alpha(x)}\right) f(x) + 2\lambda e^{-x} \int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\, dt \qquad \forall x \in [0,\ l]$$

ou sous forme équivalente,

$$f(x) = e^{-x} \left\{ \frac{\sqrt{2}e^{+i\alpha(x)}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} - \frac{2\lambda e^{+i\alpha(x)}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} \int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\, dt \right\} \qquad \forall x \in [0,\ l] \tag{4.27}$$

Comme précédemment, en posant

$$F(x) = \int_0^x e^{-i\alpha(t)+t} f(t)\, dt \qquad \forall x \in [0,\ l],$$

on obtient le problème différentiel,

$$\left\{ \begin{array}{c} F'(x) + \dfrac{2\lambda}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} \\ \\ F(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.28}$$

La solution solution de 4.28 est de la forme (*pour* $\lambda \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left\{ \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} . e^{\int_0^t \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(s)} - \lambda} ds} dt \right\} . e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \left\{ \int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} . e^{\int_0^t \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(s)} - \lambda} ds} dt \right\} . e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \left\{ e^{\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(s)} - \lambda} ds} - 1 \right\} . e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} \left(1 - e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \right)
\end{aligned}$$

D'où,

$$f(x) = \frac{\sqrt{2} e^{+i\alpha(x) - x}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} - \frac{\sqrt{2} e^{+i\alpha(x) - x}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} \left(1 - e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \right) = \frac{\sqrt{2} e^{+i\alpha(x) - x}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} . e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \tag{4.29}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lambda \Phi^* \left(Id_H - \lambda T^* \right)^{-1} (g) &= \Phi^* (f) = \lambda \prec f, h \succ \\
&= \lambda \int_0^l \frac{\sqrt{2} e^{+i\alpha(x) - x}}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} . e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \sqrt{2} e^{-i\alpha(x) + x - l} dx \\
&= e^{-l} \int_0^l \frac{2\lambda}{\left(e^{i\alpha(x)} - \lambda\right)} . e^{-\int_0^x \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} dx \\
&= e^{-l} \left\{ 1 - e^{-\int_0^l \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)} - \lambda} dt} \right\}
\end{aligned}$$

D'où,

$$S_\Delta(\lambda,1) = -e^{-l} + \lambda \prec (Id_H - \lambda T^*)^{-1}(g), h \succ = -e^{-l} e^{-\int_0^l \frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)}-\lambda} dt}$$

En remarquant que

$$\frac{2\lambda}{e^{i\alpha(t)}-\lambda} = -1 + \frac{e^{i\alpha(t)}+\lambda}{e^{i\alpha(t)}-\lambda},$$

On obtient finalement,

$$S_\Delta(\lambda,1) = -e^{-\int_0^l \frac{e^{i\alpha(t)}+\lambda}{e^{i\alpha(t)}-\lambda} dt} \tag{4.30}$$

Remarques.

1. Il est clair que le résultat obtenu est vrai même pour $\lambda = 0$.
2. La fonction caractéristique s'exprime uniquement à l'aide du spectre de l'opérateur principal T.

■

4.3 Construction de la dilatation unitaire

Dans notre cas, l'espace de dilatation $\widetilde{H}(T,\ \Delta)$ est défini comme suit :

$$\widetilde{f} = \left(...,\ a_{-2},\ a_{-1},\ \underline{f}\ ,\ a_1,\ a_2, ...\right) \in \widetilde{H}(T,\ \Delta) \Longleftrightarrow \begin{cases} (a_{-k})_{k\ \geq 1} \subset \mathbb{C} \quad et \quad \sum\limits_{k\ =\ 1}^{+\infty} |a_{-k}|^2 \prec +\infty \\ f \in L^2_{[0,\ l]} \\ (a_k)_{k\ \geq 1} \subset \mathbb{C} \quad et \quad \sum\limits_{k\ =\ 1}^{+\infty} |a_k|^2 \prec +\infty \end{cases} \tag{4.31}$$

Le produit scalaire dans $\widetilde{H}(T,\ \Delta)$ est donné par la formule : Si $\widetilde{f} = \left(..,\ a_{-2},\ a_{-1},\ \underline{f},\ a_1,\ a_2, ..\right)$

et $\widetilde{f}' = \left(..,\ a'_{-2},\ a'_{-1},\ \underline{f}\ ',\ a'_1,\ a'_2, ..\right)$ alors,

$$\prec \widetilde{f},\ \widetilde{f}' \succ = \sum_{k\ =\ 1}^{+\infty} a_{-k}\overline{a'_{-k}} + \int_0^l f(x)\,\overline{f\ '(x)}dx + \sum_{k\ =\ 1}^{+\infty} a_k\overline{a'_k} \tag{4.32}$$

Les éléments f de $L^2_{[0,\ l]}$ s'identifient aux éléments $\widetilde{f} = \left(...,\ 0,\ 0,\ \underline{f}\ ,\ 0,\ 0, ...\right)$ de $\widetilde{H}(T,\ \Delta)$.

La dilatation unitaire U_T est donné par la relation :

$$U_T\left(...,\ a_{-2},\ a_{-1},\ \underline{f}\ ,\ a_1,\ a_2, ...\right) = \left(...,\ a'_{-2},\ a'_{-1},\ \underline{F},\ a'_1,\ a'_2, ...\right) \tag{4.33}$$

où,

$$\left\{\begin{array}{c} a'_{-k} = a_{-k-1} \qquad k \geq 1 \\ \\ F(x) = Tf(x) + \sqrt{2}a_{-1}e^{i\alpha(x)+x-l} \qquad \forall x \in [0,\ l] \\ \\ a'_1 = \sqrt{2}\int\limits_0^l e^{-x}f(x)\,dx - a_{-1}e^{-l} \\ \\ a'_k = a_{k-1} \qquad k \geq 2 \end{array}\right. , \tag{4.34}$$

En utilisant les fonctions

$$g(x) = \sqrt{2}e^{-x} \qquad et \qquad h(x) = \sqrt{2}e^{i\alpha(x)+x-l} \qquad \forall x \in [0,\ l],$$

les formules 4.33 et 4.34, peuvent être réécrites sous la forme condensée :

$$U_T\left(...,\ a_{-2},\ a_{-1},\ \underline{f},\ a_1,\ a_2, ...\right) = \left(...,\ a_{-2},\ \underline{T(f) + a_{-1}.h},\ \prec f,\ g \succ\ -a_{-1}e^{-l},\ a_1, ...\right) \tag{4.35}$$

4.4 Ecriture matricielle de la dilatation unitaire

Considèrons maintenant les opérateurs :

$$S_- : l^2(E) \longrightarrow l^2(E), \quad S_-(...,\ a_{-2},\ a_{-1}) = (...,\ a_{-3},\ a_{-2}) \tag{4.36}$$

$$S_+ : l^2(F) \longrightarrow l^2(F), \quad S_+(a_1,\ a_2,\ ...) = (0,\ a_1,\ a_2,\ ...) \tag{4.37}$$

$$\Phi_- : l^2(E) \longrightarrow H, \quad \Phi_-(...,\ a_{-2},\ a_{-1}) = \Phi(a_{-1}) \tag{4.38}$$

$$\Psi_+ : H \longrightarrow l^2(F), \quad \Psi_+(f) = (\Psi(f),\ 0,\ ...) \tag{4.39}$$

$$K_\mp : l^2(E) \longrightarrow l^2(F), \quad K_\mp(...,\ a_{-2},\ a_{-1}) = (K(a_{-1}),\ 0,\ 0,\ ....) \tag{4.40}$$

Theorème 4.4.1 *La matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} S_- & 0 & 0 \\ \Phi_- & T & 0 \\ K_\mp & \Psi_+ & S_+ \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

définit un opérateur unitaire de $l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)$ *dans* $l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)$.
Preuve. *Un calcul direct permet de vérifier que :*

$$S_-^* : l^2(E) \longrightarrow l^2(E), \quad S_-^*(...,\ a_{-2},\ a_{-1}) = (...,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 0) \tag{4.42}$$

$$S_+^* : l^2(F) \longrightarrow l^2(F), \quad S_+^*(a_1,\ a_2,\ ...) = (\ a_2,\ a_3,\ ...) \tag{4.43}$$

$$\Phi_-^* : H \longrightarrow l^2(E), \qquad \Phi_-^*(f) = (\ldots,\ 0,\ \Phi^*(f)) \tag{4.44}$$

$$\Psi_+^* : l^2(F) \longrightarrow H, \qquad \Psi_+^*(a_1,\ a_2,\ \ldots) = \Psi^*(a_1) \tag{4.45}$$

$$K_\mp^* : l^2(F) \longrightarrow l^2(E), \qquad K_\mp^*(a_1,\ a_2,\ \ldots) = (\ldots,\ 0,\ K^*(a_1)) \tag{4.46}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} S_-^* & \Phi_-^* & K_\mp^* \\ 0 & T^* & \Psi_+^* \\ 0 & 0 & S_+^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_- & 0 & 0 \\ \Phi_- & T & 0 \\ K_\mp & \Psi_+ & S_+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_-^*S_- + \Phi_-^*\Phi_- + K_\mp^*K_\mp & \Phi_-^*T + K_\mp^*\Psi_+ & K_\mp^*S_+ \\ T^*\Phi_- + \Psi_+^*K_\mp & T^*T + \Psi_+^*\Psi_+ & \Psi_+^*S_+ \\ S_+^*K_\mp & S_+^*\Psi_+ & S_+^*S_+ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) \in l^2(E) \Longrightarrow \begin{cases} S_-^*S_-(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = (\ldots,\ a_{-2},\ 0) \\ \left(\Phi_-^*\Phi_- + K_\mp^*K_\mp\right)(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = (\ldots,\ 0,\ a_{-1}) \\ \left(T^*\Phi_- + \Psi_+^*K_\mp\right)(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = T^*\Phi(a_{-1}) + \Psi^*K(a_{-1}) = 0 \\ S_+^*K_\mp(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = S_+^*(K(a_{-1}),\ 0,\ \ldots) = (0,\ 0,\ \ldots) \end{cases}, \tag{4.47}$$

$$f \in H \Longrightarrow \begin{cases} \left(\Phi_-^*T + K_\mp^*\Psi_+\right)(f) = (\ldots,\ 0,\ \Phi^*T(f) + K^*\Psi(f)) = (\ldots,\ 0,\ 0) \\ \left(T^*T + \Psi_+^*\Psi_+\right)(f) = T^*T(f) + \Psi^*\Psi(f) = f \\ S_+^*\Psi_+(f) = S_+^*(\Psi(f),\ 0,\ 0,\ \ldots) = (\ 0,\ 0,\ \ldots) \end{cases} \tag{4.48}$$

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots) \in l^2(F) \Longrightarrow \begin{cases} K_\mp^*S_+(a_1,\ a_2,\ \ldots) = K_\mp^*(0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots) = (\ldots,\ 0\,,\ 0) \\ \Psi_+^*S_+(a_1,\ a_2,\ \ldots) = \Psi_+^*(0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots) = \Psi^*(0) = 0 \\ S_+^*S_+(a_1,\ a_2,\ \ldots) = S_+^*(0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots) = (a_1,\ a_2,\ \ldots) \end{cases} \tag{4.49}$$

Les formules 4.47, 4.48 et 4.49 permettent de conclure que

$$A^*A = \begin{bmatrix} Id_{l^2(E)} & 0 & 0 \\ 0 & Id_H & 0 \\ 0 & 0 & Id_{l^2(F)} \end{bmatrix} = Id_{l^2(E)\oplus H\oplus l^2(F)} \tag{4.50}$$

De manière tout à fait analogue, les relations

$$AA^* = \begin{bmatrix} S_-S_-^* & S_-\Phi_-^* & S_-K_\mp^* \\ \Phi_-S_-^* & \Phi_-\Phi_-^* + TT^* & \Phi_-K_\mp^* + T\Psi_+^* \\ K_\mp S_-^* & K_\mp\Phi_-^* + \Psi_+T^* & K_\mp K_\mp^* + \Psi_+\Psi_+^* + S_+S_+^* \end{bmatrix}, \tag{4.51}$$

$$(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) \in l^2(E) \Longrightarrow \begin{cases} S_-S_-^*(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = S_-(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 0) = (\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) \\ \Phi_-S_-^*(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = \Phi_-(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 0) = 0 \\ K_{\mp}S_-^*(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) = (\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ 0) = (0,\ 0,\ \ldots) \end{cases} \tag{4.52}$$

$$f \in H \Longrightarrow \begin{cases} S_-\Phi_-^*(f) = S_-(\ldots,0,\ 0,\ \Phi^*(f)) = (\ldots,0,\ 0) \\ \left(\Phi_-\Phi_-^* + TT^*\right)(f) = \Phi\Phi^*(f) + TT^*(f) = f \\ \left(K_{\mp}\Phi_-^* + \Psi_+T^*\right)(f) = K\Phi^*(f) + \Psi T^*(f) = 0 \end{cases} \tag{4.53}$$

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots) \in l^2(F) \Longrightarrow \begin{cases} S_-K_{\mp}^*(a_1,\ a_2,\ \ldots) = S_-(\ldots,\ 0,\ 0,\ K^*(a_1)) = (\ldots,\ 0,\ 0) \\ \left(\Phi_-K_{\mp}^* + T\Psi_+^*\right)(a_1,\ a_2,\ \ldots) = \Phi K^*(a_1) + T\Psi^*(a_1) = 0 \\ \left(K_{\mp}K_{\mp}^* + \Psi_+\Psi_+^*\right)(a_1,\ a_2,\ \ldots) = KK^*(a_1) + \Psi\Psi^*(a_1) = a_1 \\ S_+S_+^*(a_1,\ a_2,\ \ldots) = (0,\ a_2,\ a_3,\ldots) \end{cases} \tag{4.54}$$

permettent d'affirmer que

$$AA^* = \begin{bmatrix} Id_{l^2(E)} & 0 & 0 \\ 0 & Id_H & 0 \\ 0 & 0 & Id_{l^2(F)} \end{bmatrix} = Id_{l^2(E)\oplus H\oplus l^2(F)} \tag{4.55}$$

■

$$\begin{bmatrix} S_- & 0 & 0 \\ \Phi_- & T & 0 \\ K_{\mp} & \Psi_+ & S_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) \\ f \\ (a_1,\ a_2,\ \ldots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\ldots,\ a_{-2}) \\ \Phi(a_{-1}) + T(f) \\ (K(a_{-1}),0,0) + (\Psi(f),0,..) + (0,a_1,0,..) \end{bmatrix}$$

Theorème 4.4.2 *La matrice A est l'écriture matricielle de la dilatation U_T suivant la décomposiotion $l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)$ de l'espace $\widetilde{H}(T,\ \Delta)$.*
Preuve. *Si $\widetilde{f} = \left(\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ \underline{f}\ ,\ a_1,\ a_2,\ldots\right) \in \widetilde{H}(T,\ \Delta)$ alors, suivant la décomposition $l^2(E) \oplus H \oplus l^2(F)$ de l'espace $\widetilde{H}(T,\ \Delta)$, il s'écrit sous la forme :*

$$\widetilde{f} = (\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) \oplus\ \underline{f}\ \oplus\ (a_1,\ a_2,\ldots)$$

De même l'élément,

$$U_T\left(\widetilde{f}\right) = (\ldots,\ a_{-2}) \oplus \left(\ \underline{T(f) + a_{-1}.h}\right) \oplus\ (\prec f,\ g \succ -a_{-1}e^{-l},\ a_1,\ldots)$$

Il faut montrer que,

$$\begin{bmatrix} (\ldots,\ a_{-3},\quad a_{-2}) \\ \underline{T(f) + a_{-1}.h} \\ (\prec f,\ g \succ -a_{-1}e^{-l},\ a_1,\ldots) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} (\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1}) \\ f \\ (a_1,\ a_2,\ldots) \end{bmatrix}$$

On a,

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix} (...,\ a_{-2},\ a_{-1}) \\ f \\ (a_1,\ a_2, ...) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_- & 0 & 0 \\ \Phi_- & T & 0 \\ K_{\mp} & \Psi_+ & S_+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (...,\ a_{-2},\ a_{-1}) \\ f \\ (a_1,\ a_2, ...) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_-\left(...,\ a_{-2},\ a_{-1}\right) \\ \Phi_-\left(...,\ a_{-2},\ a_{-1}\right) + T\left(f\right) \\ K_{\mp}\left(...,\ a_{-2},\ a_{-1}\right) + \Psi_+\left(f\right) + S_+\left(a_1,\ a_2, ...\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (...,\ a_{-3},\ \ a_{-2}) \\ \Phi\left(a_{-1}\right) + T\left(f\right) \\ \left(K\left(a_{-1}\right),\ 0,\ ...\right) + \left(\Psi\left(f\right),\ 0,\ ...\right) + \left(0,\ a_1,\ a_2, ...\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (...,\ a_{-3},\ \ a_{-2}) \\ a_{-1}.h + T\left(f\right) \\ \left(K\left(a_{-1}\right) + \Psi\left(f\right),\ a_1,\ a_2, ...\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (...,\ a_{-3},\ \ a_{-2}) \\ a_{-1}.h + T\left(f\right) \\ \left(-a_{-1}e^{-l} + \prec f,\ g \succ,\ a_1,\ a_2, ...\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

Bibliographie

[1] Akhiezer N. I., Glazman I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, V1, Frederick Ungar Publishing Co, New-York (Traduit du russe)

[2] Modèles universels de certaines classes d'opérateurs dans un espace de Hilbet. Maghreb Mat. Rev. Vol. 5, N° 1 & 2 (1996), pp. 1- 11.

[3] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Masson 1993.

[4] Brodski M. S. Unitary nodes and their characteristic functions. Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 33 (1978), pp. 141-168 (traduit du russe).

[5] Hlamos P. R. Normal dialtions and extensions of opérators. Summa Brazil Math. 2 (1950), pp. 125-134.

[6] Julia G. Sur les projections des systèmes orthogonaux de l'espace Hilbertien. C. R., 218 (1944), pp. 882-895.

[7] Julia G. Sur les projections des systèmes orthogonaux de l'espace Hilbertien et les opérateurs bornés. C. R., 219 (1944), pp. 8-11.

[8] Julia G. Les représentations analytiques des opérateurs bornés ou fermés de l'espace Hilbertien. C. R., 219 (1944), pp. 225-227.

[9] Kolmogorov A., Fomine S.. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition "MIR", Moscow, 1974 (traduit de la langue russe).

[10] Nagy Béla Sz., Foias C., Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert, Masson et Cie, Paris, Acad. Kiado, Budapest 1967.

[11] Riesz F., Nagy Béla Sz., Leçons d'analyse fonctionnnelle. Académie des sciences de Hongrie, $5^{ième}$ édition (1968).