Ministère de L'Enseignement Supérieur Et de La Recherche Scientifique

Centre universitaire Salhi Ahmed -Naâma-

Institut des Sciences et technologies

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

pour obtention du diplôme de

Master En Mathématiques

spécialité : Analyse fontionnelle et EDP

filière : Mathématiques

Thème

Variétés Pseudo-Riemanniennes

Présenté par :

Bouaziz Amina

devant le jury composé de :

Encadreur : Noura Sidhoumi	**Enp -Oran-**
Président : Mr.Latti Fethi	**C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-**
Examinateur : Mr.Mekki Slimene	**C-Univ Salhi Ahmed -Naâma-**

Année universitaire 2020/2021

DEDICACE

A mon père et ma mère

A mes frère et mes soeurs

A toutes ma famille

A chacun des soutiens moraux tout au long d'un parcours académique

Je dédie ce modeste travail

Remerciement

Nous remercions Allah *pour la chance et le succès*

J'adresse mes meilleures salutations à ma famille pour son soutient particulier aux parents

Après cela, je voudrais remercier les membres du jury

Pour son approbation de la décision sur ces notes.

Remerciements particuliers au professeur `Mr.Latti Fethi`

encadreur `Noura Sidhoumi` *pour m'avoir proposé un sujet fort intéressant et pour m'avoir guidée et encouragée.*

je remercie aussi mes enseignantes et mes collègues

Table des matières

Introduction

En mathématiques, les variétés différentielles ou variétés différentiables sont les objets de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Il s'agit de variétés, « espaces courbes » localement modelés sur l'espace euclidien de dimension n, sur lesquelles il est possible de généraliser une bonne part des opérations du calcul différentiel et intégral. Une variété différentielle se définit donc d'abord par la donnée d'une variété topologique, espace topologique localement homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$. Les homéomorphismes locaux sont appelés cartes et définissent des systèmes de coordonnées locales. La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable, ou de champ de vecteurs avec ses courbes intégrales.

La géométrie riemannienne est une branche de la géométrie différentielle nommée en l'honneur du mathématicien Bernhard Riemann, qui introduisit les concepts fondateurs de variété géométrique et de courbure. Il s'agit de surfaces ou d'objets de plus grande dimension sur lesquels existent des notions d'angle et de longueur, généralisant la géométrie traditionnelle qui se limitait à l'espace euclidien. La géométrie riemannienne étend les méthodes de la géométrie analytique en utilisant des coordonnées locales pour effectuer les calculs dans des domaines spatiaux limités, mais elle recourt fréquemment aux outils de la topologie pour passer à l'échelle de l'espace entier. De façon précise, la géométrie riemannienne a pour but l'étude locale et globale des variétés riemanniennes, c'est-à-dire les variétés différentielles munies d'une métrique riemannienne, Les concepts les plus notables de la géométrie riemannienne sont la courbure de l'espace étudié et les géodésiques, courbes résolvant un problème de plus court chemin sur cet espace.

Les variétés pseudo-riemanniennes représentent une classe importante de variétés différentielles, regroupant en particulier les variétés riemanniennes et les variétés pseudo-Riemannienne. Une métrique pseudo Riemannienne sur une variété différentiable M de dimension n est une famille $\{g_x\}$ (pour tout élément x de M) de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur les espaces tangents de signature constante (p, q) . Le couple (M, g) est appelée variété pseudo Riemannienne. La géométrie pseudo Riemannienne consiste en l'étude de ces structures, de leurs particularités et des relations qu'elles entretiennent entre elles :

- Une métrique pseudo Riemannienne est dite Riemannienne lorsque la signature est $(n, 0)$ ou $(0, n)$.
- Une métrique pseudo Riemannienne est dite Lorentzienne lorsque la signature est $(n-1, 1)$ (ou parfois $(1, n-1)$ selon la convention de signes).

Ce mémoire est composé de trois chapitres répartis comme suit :

• **Dans le premier chapitre ,** nous rappelons quelques définitions et résultats de la géométrie différentielles, nous définissons la notion de variété différentiable en présentant quelques exemples , nous donnons ensuite quelques outils de base permettant de travailler avec des variétés différentiables, nous présentons la notion d'espace tangent et fibré tangent.

• **Dans le deuxième chapitre ,** nous concentrons sur la définition de la métrique Riemannienne, elle permet d'introduire une distance sur la variété. Infinitésimalement (dans un plan tangent), nous définissons ensuite la notion de variété Riemannienne, nous discutons aussi la notion des isométries, tenseur et de connexion.

• **Dans le troisième chapitre ,** nous introduisons la notion de variété pseudo Riemannienne, tout en définissons la métrique pseudo-Riemannienne et Lorentzienne et quelques notions sur cette catégorie de variétés à savoir la connexion de Levi Civita , géodésiques et quelques opérateurs.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Rappels

Définition 1.1.1. *Soit M un espace topologique séparé. Une carte de dimension n dans M est un couple (U, φ) tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *U $(resp\, \varphi(U))$ est un ouvert de M resp $(\mathbb{R}^n)$.*
2. *$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.*

Définition 1.1.2. *Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) de même dimension n sont dite compatibles si*

$$U \cap V = \emptyset$$

ou

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme de classe C^∞. L'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ est dite application de transition.

Définition 1.1.3. *Soit M un espace topologique séparé. Une famille de cartes $U = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est dite atlas différentiable de dimension n si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$M = \bigcup_{i \in I} U_i$*
2. *$\forall i \in I, (Ui, \varphi i)$ est une carte de dimension n.*
3. *$\forall i, j \in I, (Ui, \varphi i) et (Uj, \varphi j)$ sont compatibles.*

1.1.1 Espace Topologie

Définition 1.1.4. *Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $E, \theta \in \mathcal{T}$
2. *Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, i.e.*

$$\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \theta_i \in \mathcal{T}$$

3. *Une réunion quelconque dSéléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, i.e.*

$$\{\theta_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \theta_i \in \mathcal{T}$$

Un élément de $\mathcal{T}$ est appelé ouvert de E.
$(E, \mathcal{T})$ est dit séparé si deux éléments distincts peuvenet être séparés par deux ouverts disjoints, i.e.

$$(x, y \in E; x \neq y) \Rightarrow (\exists \theta_1 , \theta_2 \in \mathcal{T}; x \in \theta_1, y \in \theta_2 \, et \theta \cap \theta = \emptyset)$$

Définition 1.1.5. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

- *$V \in E$ est dit voisinage de $x \in E$, si il existe $\theta \subset \mathcal{T}$ tel que $x \in \theta \subset V$. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$.*

- *Une partie $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(x)$ est dite système fondamentale de voisinage de x si tout élément de $\mathcal{V}(x)$ contient un élément de $\mathcal{W}$ i.e.*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{W} : W \subset V$$

- *$F \subset E$ est dit férmé si $E - F \in \mathcal{T}$.*

- *Soit $A \subset E$, on dit que $x \in E$ est intérieur à A, si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé ensemble intérieur et noté A° (c'est le plus grand ouvert contenu dans A).*

- *Soit $A \subset E$, on dit que $x \in E$ est adhérant à A, si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ on a $V \cap A \neq \emptyset$;. L'ensemble des points adhérants à A est appelé adhérence de A et noté $\overline{A}$ (c'est le plus petit fermé qui contient A).*

- *On dit qu'une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base d'ouverts lorsque tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ i.e.*

$$\forall \theta \in \mathcal{T}; \exists \, (U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B} : \theta = \bigcup_{i \in I} U_i$$

- *(Première axiome de dénombrabilité) La topologie $\mathcal{T}$ est dite localement dénombrable si tout élément $x \in E$ admet un système fondamentale dénombrable de voisinages ouverts.*

- *(Deuxième axiome de dénombrabilité) La topologie $\mathcal{T}$ est dite a base dénombable si elle admet une base dénombrable d'ouverts.*

Définition 1.1.6. *Soit E un ensemble non vide, $(E_i \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques et $f_i : E \longrightarrow E_i$ une famille d'applications. La topologie initiale sur E est la topologie la moins fine rendant continue les applications f_i, $\forall i \in I$. La base de la topologie initiale est donnée par :*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(\theta_j) \, ; J \subset I, J \,\text{fini} \;\; et \; \theta_j \in \mathcal{T}_j \right\}$$

Définition 1.1.7. *Soit E un ensemble non vide, $(E_i \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques et $f_i : E_i \longrightarrow E$ une famille d'applications. La topologie finale sur E est la plus petite topologie rendant continue les applications f_i, $\forall i \in I$. La topologie finale est définie par :*

$$\mathcal{T} = \{\theta \subset E \, , f_i^{-1}(\theta) \in \mathcal{T} \, , \forall i \in I\}$$

1.2 Variétés Différentiables

Définition 1.2.1. *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique séparé M muni d'un atlas différentiable $\mathcal{U}$ de dimension n, on la note par le couple $(M, \mathcal{U})$. Dans le cas général on note :*

1. $\mathrm{atl}(M) = \mathcal{U}_{\max}$ *l'atlas maximal de M.*
2. $\mathrm{atl}(M, x) = \{(U, \varphi) \in \mathcal{U}_{\max}, x \in U\}$.

Remarque 1.2.1.

1. *Il existe des variétés topologiques compactes qui ne soient sous jacentes à aucune structure de variété différentiable*
2. *Un atlas de classe C^k $(k \geq 1)$ sur une variété différentiable M induit un atlas de classe C^l pour tout $l \leq k$, en particulier,une structure de variètè topologique sur M.*
   Inversement,étant donné un atlas $\mathfrak{A}_0$ de classe C^k sur M, avec $k \geq 1$, il existe un atlas $\mathfrak{B}$ sur M de classe C^∞ induisant un atlas $\mathfrak{A}$ de classe C^k, qui est C^k-équivalent à $\mathfrak{A}_0$ $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}_0)$. Ce résultat a été démontré par H. Whitney.

3. *Si les changements de cartes d'un atlas sont analytiques,la variété M sera dite analytique*
4. *Si l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ dans les définitions qui précèdent,on obtient la notion d'atlas analytique complexe et de variété analytique complexe(variété analytique).*
   Un atlas analytique complexe est aussi un atlas analytique réel et la structure de variété analytique réelle correspondante sera dite sous jacente à la structure de variété analytique complexe.

1.2.1 Exemples de Variétés Différentiables

L'espace $\mathbb{R}^n$

Muni de l'application $Id_{\mathbb{R}^n} : x \longrightarrow x$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de C^∞.

Surface régulière de $\mathbb{R}^3$

Soit f une application d'un ouvert W de $\mathbb{R}^3$ à valeurs réelles,de classe C^k avec $(k \geq 1)$ et soit $M = f^{-1}(0)$ l'ensemble des éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ supposé non vide. On dit que M est régulière si,pour tout $p \in M$, le gradient ;

$$(\nabla f)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \right)$$

de f est non nul.

Proposition 1.2.1. *Si M est régulière,alors, M est une variété différentiable de dimension 2 de classe C^k.*

La sphère S^n

Pour chaque entier naturel n, on dénote par S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

et,désignons par $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et par En l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par l'équation $x_{n+1} = 0$ (E_n est appelé hyperplan équatorial de S^n), on identifie évidemment l'hyperplan équatorial avec $\mathbb{R}^n$
On appelle pôle nord(resp.pôle sud)de la sphère S^n, le point $N = (0, ..., 0, 1)$ (resp. $S = (0, ..., 0, -1)$).

On considère le recouvrement ouvert de la sphère S^n défini par les ouverts suivants U_N et U_S définis par :

$$U_N = S^n - \{N\} \,\text{et}\, U_S = S^n - \{S\}$$

On appelle projection stéréographique du pôle nord,l'application φ_N de U_N à valeurs dans l'hyperplan équatorial E_n, associant à un élément M de $S^n - \{N\}$, l'intersection $\varphi_N(M)$ de la droite (NM) avec l'hyperplan équatoriel E_n :

$$\{\varphi_N(M)\} = (NM) \bigcap E_n$$

De même,la projection stéréographique du pôle sud est l'application φ_S de U_S à valeurs dans l'hyperplan équatorial E_n, associant à un élément M de $S^n - \{S\}$, l'intersection $\varphi_S(M)$ de la droite (SM) avec l'hyperplan équatorial E_n :

$$\{\varphi_S(M)\} = (SM) \bigcap E_n$$

Ainsi :

$$\varphi_N\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in U_N$, et

$$\varphi_S\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\right) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right)$$

L'ensemble φ_N, φ_S définit un atlas de classe C^∞ sur la sphère S^n, ce qui confère à la sphère S^n une structure de variété différentiable de dimension n et de classe C^∞.

Exemple 1.2.1. *La sphère* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ *est une variété de dimension* 1 *munie des projections suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^+ : U_y^+ = \left\{(x, y) \in S^1, y > 0\right\} & \to &]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(\varphi_y^+\right)^{-1} :]-1, 1[& \longrightarrow & U_y^+ \\ x & \mapsto & \left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^- : U_y^- = \left\{(x, y) \in S^1, y < 0\right\} & \to &]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(\varphi_y^-\right)^{-1} :]-1, 1[& \to & U_y^- \\ x & \mapsto & \left(x, -\sqrt{1 - x^2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x^+ : U_x^+ = \left\{(x, y) \in S^1; x > 0\right\} & \to &]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(\varphi_x^+\right)^{-1} :]-1,1[& \to & U_x^+ \\ y & \mapsto & \left(\sqrt{1-y^2}, y\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x^- : U_x^- = \left\{(x,y) \in S^1 ; x < 0\right\} & \to &]-1,1[\subset \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(\varphi_x^-\right)^{-1} :]-1,1[& \to & U_x^- \\ y & \mapsto & \left(-\sqrt{1-y^2}, y\right) \end{array}$$

On a :

a) $S^1 = U_y^+ \cup U_y^- \cup U_x^+ \cup U_x^-$

b) $U_y^+ \cap U_y^- = \emptyset, U_x^+ \cap U_x^- = \emptyset$

c)

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^+ \circ \left(\varphi_x^+\right)^{-1} :]0,1[& \to &]0,1[\\ z & \mapsto & \sqrt{1-z^2} \end{array}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

De la même on démontre que $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}, \varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}$ et $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ sont des difféomorphismes de classe C^∞.

Donc S^1 est une variété de dimension 1 muni de l'atlas :

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(U_y^+, \varphi_y^+\right), \left(U_y^-, \varphi_y^-\right), \left(U_x^+, \varphi_x^+\right), \left(U_x^-, \varphi_x^-\right) \right\}$$

1.2.2 Espace Tangent

on note par

- $C^{\infty}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R},\ f$ est de classe $C^{\infty}\}$, germe de fonctions.
- $C^{\infty}(M, x) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R},\ f$ est de classe C^{∞} au voisnage de $x\}$, germe de fonctions en x.
- $(C^{\infty}, +\times, \cdot)$ est une algèbre.

Définition 1.2.2. *Soit M^m une variété de dimension m. Une courbe passant par $x \in M$ est une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ d'un interval $I \subset \mathbb{R}$ à image dans la variété M, tel que $0 \in I$ et $\gamma(0) = x$.*

On note par $\mathcal{K}_x = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M \gamma(0) = x\}$ On définit sur $\mathcal{K}_x$ une relation d'équivalence par :

$$(\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_x)\,, \quad \gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U, \varphi) \in \mathrm{atl}(M, x) : \frac{d\,(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d\,(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(0) \tag{1.1}$$

Remarque 1.2.2. *En vertu de la compatibilté des cartes, la relation (1.1) est indépendante de la carte choisie.*

Définition 1.2.3.

- *L'ensemble quotient $T_xM = (\mathcal{K}_x)_{/\mathcal{R}}$ est appelé espace tangent à la variété M en x.*
- *La classe d'équivalence $\dot{\gamma}(0)$ est dite vecteur tangent à la variété M en x.*

⧫ Structure Vectoriel sur T_xM

Soit $(U, \varphi) \in atl(M)$, on pose

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_x : T_xM &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{\gamma}(0) &\mapsto \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

De la définition de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ (formule (1.1)), on déduit que $\widetilde{\varphi}$ est une application injective.
Pour $y \in \mathbb{R}^n$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\epsilon, +\epsilon[$ on a $\varphi(x) + ty \in \varphi(U)$. Si on note $\gamma : t \in]-\epsilon, +\epsilon[\longrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(x) + ty) \in U$ alors γ est une courbe passant par x telle que $\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}(0)) = y$ en déduit que $\widetilde{\varphi}_x$ est surjective. Donc $\widetilde{\varphi}$ est une application bijective.

Si $(U,\varphi),(V,\psi)\in atl(M,x)$ alors

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\varphi}_x\circ\widetilde{\psi}_x^{-1}(y) & = & \dfrac{d}{dt}\left[(\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(x)+ty)\right]_{t=0}\\ & = & j_{\psi(x)}(\varphi\circ\psi^{-1})\cdot y\end{array}$$

est une application linéaire bijective, ce nous permet de transporter d'une manière indépendante de la carte choisie, la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à T_xM par les formules suivantes :

$$\begin{array}{rcl}\dot\gamma_1(0)+\dot\gamma_2(0) & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\left(\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_1(0)\right)+\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_2(0)\right)\right)\\ & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\left(\dfrac{d}{dt}\left(\varphi\circ\gamma_1\right)_{t=0}+\dfrac{d}{dt}\left(\varphi\circ\gamma_2\right)_{t=0}\right)\\ \lambda\dot\gamma_1(0) & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\left(\lambda\cdot\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_1(0)\right)\right)\\ & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\left(\lambda\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\varphi\circ\gamma_1\right)_{t=0}\right)\end{array}\qquad(1.3)$$

$(T_xM,+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $dim(T_xM)=m=dim(M)$.

Remarque 1.2.3.

1. *Si $(U,\varphi),(V,\psi)\in atl(M,x)$ alors*

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\varphi}_x^{-1}\left(\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_1(0)\right)+\lambda\cdot\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_2(0)\right)\right) & = & \widetilde{\psi}_x^{-1}(\widetilde{\psi}_x\circ\widetilde{\varphi}_x^{-1})\left(\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_1(0)\right)+\lambda\cdot\widetilde{\varphi}_x\left(\dot\gamma_2(0)\right)\right)\\ & = & \widetilde{\psi}_x^{-1}\circ(\widetilde{\psi}_x\circ\widetilde{\varphi}_x^{-1})\Big((\widetilde{\varphi}_x\circ\widetilde{\psi}_x^{-1})\circ\widetilde{\psi}_x(\dot\gamma_1(0))\\ & & +\lambda\cdot(\widetilde{\varphi}_x\circ\widetilde{\psi}_x)\circ\widetilde{\psi}_x(\dot\gamma_2(0))\Big)\\ & = & \widetilde{\psi}_x^{-1}\circ(\widetilde{\psi}_x\circ\widetilde{\varphi}_x^{-1})\circ(\widetilde{\varphi}_x\circ\widetilde{\psi}_x^{-1})\Big(\widetilde{\psi}_x(\dot\gamma_1(0))\\ & & +\lambda\cdot\widetilde{\psi}_x(\dot\gamma_2(0))\Big)\\ & = & \widetilde{\psi}_x^{-1}\left(\widetilde{\psi}_x(\dot\gamma_1(0))+\lambda\cdot\widetilde{\psi}_x(\dot\gamma_2(0))\right)\end{array}\qquad(1.4)$$

2. *$\widetilde{\varphi}_x : T_xM\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espaces vecoriels.*

Notation 1.2.1.

1. *Relativement à une carte $(U,\varphi)\in atl(M,x)$ on a $\varphi(x)=(\varphi^1(x),.....,\varphi^m(x))\in\mathbb{R}^m$. On note alors $x^i=\varphi^i(x)(1\le i\le m)$.*
2. *Une carte $(U,\varphi)\in atl(M)$ sera noté $(U,x^i,1\le i\le m)$.*
3. *Si $(e_1,...,e_m)$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ alors $\widetilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$ est noté par $\frac{\partial}{\partial x_i}{}_{/x}$ ou $\partial_{i/x}$*

4. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}_{/x}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}_{/x}\right)$ *est une base locale relativement à la carte* (U, x^i).
5. $\frac{\partial}{\partial x_i}_{/x}$ *est le vecteur associé à la courbe* $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t \cdot e_i)$
6. *Si* $v \in T_xM$ *tel que* $\widetilde{\varphi}(v) = y = (y^1, ..., y^m) \in \mathbb{R}^m$, *alors (par Convention d'Einstein), on obtient*

$$v = \sum_{i=1}^{m} y^i \frac{\partial}{\partial x_i}_{/x} = y^i \frac{\partial}{\partial x_i}_{/x} = \dot{\gamma}(0)$$

où $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t \cdot y)$

Définition 1.2.4. *Une action d'un vecteur* $v = \dot{\gamma}(0) \in T_xM$ *sur le germe des fonctions* $C^\infty(M, x)$ *est l'application définie par*

$$\begin{aligned} v : C^\infty(M,x) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto v(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned}$$

Propriété 1.2.1. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *relativement à une carte* (U, φ) , *alors*

- $$\begin{aligned} v(f) &= \frac{d\left(f \circ \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + t\left(v^1, \ldots, v^m\right)\right)\right.}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}(\varphi(x)) v^i \\ &= v^i \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}(\varphi(x)) \quad (\textit{ Convention d'Einstein}) \end{aligned}$$
- $v\left(\varphi^i\right) = v^i$.
- $\lambda.v + w = \left(\lambda v^i + w^i\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$.
- $(\lambda.v + w)(f) = \lambda v(f) + w(f)$.

Propriété 1.2.2.

1. $v(f + g) = v(f) + v(g)$
2. $v(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot v(f)$
3. $v(f \cdot g) = f(x)v(g) + g(x)v(f)$ *(Formule de Leibnitz).*
4. $v(\text{ Const }) = 0$

Théorème 1.2.1. *Si* $L : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application qui vérifie les Propriétés 1.2.2 précédentes, alors il existe un unique vecteur* $v \in T_xM$ *tel* $L = v$.

Preuve. *Soit* $(U, \varphi) \in atl(M, x_0)$*, d'après la formule de développement limité, on a*

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1}(y) &= f(x_0) + \left(y^i - \varphi^i(x_0)\right) \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i} (\varphi(x_0)) + \left(y^i - \varphi^i(x_0)\right)\left(y^j - \varphi^j(x_0)\right) a_{ij}(x_0) \\ f(x) &= f(x_0) + \left(x^i - \varphi^i(x_0)\right) \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i} (\varphi(x_0)) + \left(x^i - \varphi^i(x_0)\right)\left(x^j - \varphi^j(x_0)\right) a_{ij}(x_0) \\ f(x) &= f(x_0) + \left(\varphi^i(x) - \varphi^i(x_0)\right) \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i} (\varphi(x_0)) \\ &\quad + \left(\varphi^i(x) - \varphi^i(x_0)\right)\left(\varphi^j(x) - \varphi^j(x_0)\right) a_{ij}(x_0) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} L(f) &= L\left(\varphi^i\right) \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i} (\varphi(x_0)) \\ &= L\left(\varphi^i\right) \frac{\partial}{\partial x^i}_{/x_0}(f) \\ &= v(f) \end{aligned}$$

où $v = L\left(\varphi^i\right) \frac{\partial}{\partial x^i}_{/x_0}$ *De la fomule* $v^i = L(\varphi^i)\,(1 \leq i \leq m)$*, on déduit l'unicité du vecteur* v*.*

Définition 1.2.5. *Soit* M^m *une variété de dimension* m*. L'ensemble* $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ *est dit espace tangent à la variété* M*.*

Remarque 1.2.4.

1. *Si* $x \neq x'$ *alors* $T_x M \bigcap T_{x'} M = \emptyset$
2. *Soit* $\mathcal{K} = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M \subset C^\infty, 0 \in I\}$ *l'ensemble des courbes de classe* C^∞ *au voisinage de* $0 \in \mathbb{R}$*. Si* $\mathcal{R}$ *est la relation d'équivalence définie sur* $\mathcal{K}$ *par :*

$$\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2 \Leftrightarrow \quad (\gamma_1(0) = \gamma_2(0)) \quad et \quad \left(\frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(0)\right)$$

   où $(U, \varphi) \in \mathrm{atl}(M)$*, alors* $\mathcal{TM} = \mathcal{K}_{/\mathcal{R}} = \{\dot\gamma(0), \gamma \in \mathcal{K}\}$
   En vertu de la compatibilité des cartes, la relation $\mathcal{R}$ *est indépendante de la carte choisie.*
3. *Si* U *est un ouvert de* M*, alors* $T_x U = T_x M$ *et* $TU = \cup_{x \in U} T_x M$

1.2.3 Application Tangente

Définition 1.2.6. *Soient* M^m *et* N^n *deux variétés différentiables et soit* $f : M \longrightarrow N$ *une application de classe* C^∞ *. L'application tangent de* f *au point* p *est l'application linéaire* $f_* : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ *définie par :* $(f_* v)g = v(g \circ f)$ *;* $\forall g \in C^\infty(f(p))$ *;* $v \in T_p M$*. On peut écrire aussi* $T_p f$ *ou* f_{*p}*.*

Remarque 1.2.5.

1. *pour tout* $v \in T_pM$ *,* f_*v *est un vecteur tangent au point* $f(p)$ *et* f_* *l'application est linéaire.*
2. $f_*p = f^{'}(p)$ *si* $M = \mathbb{R}^m$ *et* $N = \mathbb{R}^n$ *(avec* $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$*)*
3. $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_*p$ *; si* M *;* N *et* L *trois variétés différentiables et* $f : M \longrightarrow N$ *,* $g : N \longrightarrow L$ *deux application de classe* C^∞ *pour tout* $p \in M$.
4. *soient* $v \in T_pM$ *et* $\gamma : I \longrightarrow M$ *une courbe de classe* C^∞ *telle que* $\gamma(0) = p$ *et* $\dot{\gamma}_0 = v$.

Proposition 1.2.2.

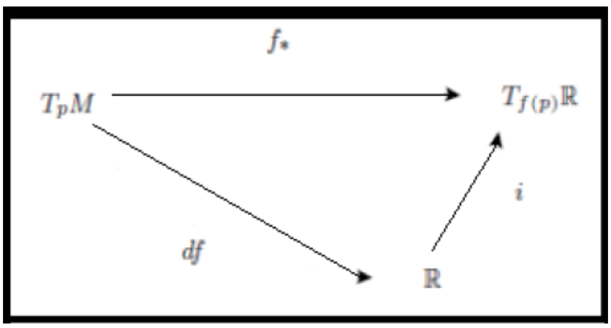
1. $f_*v = \dot{\alpha}_0$ *si* $f : M \longrightarrow N$ *de classe* C^∞ *et* $\alpha = f \circ \gamma : I \longrightarrow N$ *Soit* $x = (x^1, ..., x^m)$ *les coordonnées locales de* $p \in M^m$ *et* $y = (y^1, ..., y^n)$ *les coordonnées locales de* $f(p) \in N^n$*. La matrice de* $f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *par rapport à les bases* $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ *,* $i = 1...m$ *et* $(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}$ *,* $j = 1...n$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p y^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(p)}, 1 \leq j \leq m$$

2. *Soit* $f : M \longrightarrow N$ *de classe* C^∞ *et* $p \in M$ *alors* $f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *est un isomorphisme si est seulement si* f *est un difféomorphisme locale au point* p

Exemple 1.2.2.

1. *Si* $V = \mathbb{R}^n$ *, alors* $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
2. *Si* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^∞ *et* $p \in M$ *; on définit la défférentielle de* f *par* $df : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $dfv = vf$ *;* $v \in T_pM$ *; on peut la désigner aussi par* df_p *par l'isomorphisme,* $i : \mathbb{R} \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ *on obtient* $df = i^{-1} \circ f_*$ *; nous identifions* $df = f_*$ *.(voir le diagramme 2)*



1.3 Fibré Tengant

Soit M une variété différentiable de dimension n.

Proposition 1.3.1. *Le fibré tangent $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ est une variété différentiable de dimension $2n$. Démonstration. On vérifie les axiomes :*

1. *TM **est une variété topologique** :*

2. *TM **possède une structure différentiable** : l'ensemble*

$$\left\{\left(\pi^{-1}(U), \tau_\phi\right) \mid (U,\phi) \in \mathcal{A}_M\right\}$$

est un atlas différentiable sur TM. En effet, on vérifie les axiomes de l'atlas différentiable :

*a) $\left\{\pi^{-1}(U)\right\}_{(U,\phi)\in\mathcal{A}_M}$ **recouvre** TM : comme montré plus haut, pour tout U ouvert dans M, $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans TM. Comme π est surjective,*

$$TM = \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{A}_M} U\right) = \bigcup_{(U,\phi)\in\mathcal{A}_M} \pi^{-1}(U).$$

*b) **les cartes de** TM **sont compatibles** : soient $\left(\pi^{-1}(U), \tau_\phi\right), \left(\pi^{-1}(V), \tau_\psi\right) \in \mathcal{A}_{TM}$, pour $(U,\phi), (V,\psi) \in \mathcal{A}_M$, telles que $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$. Alors,*

$$\tau_\psi \circ \tau_\phi^{-1} : \tau_\phi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) \to \tau_\psi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right)$$

et

$$\tau_\phi \circ \tau_\psi^{-1} : \tau_\phi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) \to \tau_\psi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right)$$

sont différentiables. On ne vérifie que le premier cas, le deuxième étant analogue :

$$\tau_\phi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \tau_\phi\left(\pi^{-1}(U \cap V)\right) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

et

$$\tau_\psi\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \tau_\psi\left(\pi^{-1}(U \cap V)\right) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

Soit maintenant η_π l'isomorphisme linéaire associé à la carte $(V,\psi) \in \mathcal{A}_M$. Alors,

$$\begin{aligned}\tau_\psi \circ \tau_\phi^{-1} &= (\psi\circ\pi, \eta_\pi) \circ (\phi\circ\pi, \theta_\pi)^{-1} = (\psi\circ\pi, \eta_\pi) \circ \left(\phi^{-1}\circ\tilde{\pi}, \theta_{\phi^{-1}}^{-1}\right) \\ &= \left(\psi\circ\phi^{-1}, \eta_{\phi^{-1}} \circ \theta_{\phi^{-1}}^{-1}\right) = \left(\psi\circ\phi^{-1},\ \mathrm{d}\left(\psi\circ\phi^{-1}\right)\right)\end{aligned}$$

Comme ψ et ϕ sont des cartes, $\psi \circ \phi^{-1}$, $\mathrm{d}\left(\psi \circ \phi^{-1}\right)$ est différentiable ; de plus, $\mathrm{d}\left(\psi \circ \phi^{-1}\right)$ est linéaire, donc différentiable. Comme $f \times g : M \times P \to N \times T$ est différentiable si $f : M \to N$ et $g : P \to T$ sont différentiables, il s'ensuit que $\tau_\psi \circ \tau_\phi^{-1}$ est différentiable.

1.3.1 Champ de Vecteurs

Définition 1.3.1. *Un champ de vecteurs (ou section) sur une variété M est une application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = Id_M$*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ M & \longrightarrow & TM \\ Id_M \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

On note par $\mathcal{H}(M)$ ou $\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M.

Propriété 1.3.1.

1. $(\forall X \in \Gamma(TM))$, $\forall x \in M$ *on a* $X(x) = X_x \in T_xM$.
2. *Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha \in C^\infty(M)$, on définit $X + Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha X \in \Gamma(TM)$ par les formules*
$$\begin{aligned} (X+Y)(x) &= X(x) + Y(x) \in T_xM \\ (\alpha X)(x) &= \alpha(x)X(x) \in T_xM \end{aligned}$$
3. *Soit U est un ouvert de M, on a TU est un ouvert de TM tel que si $X \in \Gamma(M)$ alors $X_{/U} : x \in U \longrightarrow X_x \in TU$ est champ de vecteurs sur U.*
4. *Soit $(U, \varphi) \in atl(M)$ une carte locale, si on pose*
$$\begin{aligned} \partial_i : U &\longrightarrow TU \subset TM \quad ,(1 \le i \le m) \\ x &\longmapsto \partial_i(x) = \partial_{i/x} = \frac{\partial}{\partial x_{i/x}} \end{aligned}$$
alors $(\partial_1, ..., \partial_m)$ est une base champs de vecteurs sur U.
5. *Soit $(U, \varphi) \in atl(M)$ une carte locale, si $X \in \Gamma(U)$ alors $X = X^i \partial_i$ tels que $X^i(x) = \pi_i(\widetilde{\varphi}_x(X_x))$ où $\pi_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est la i-ème projection. On déduit que l'expression locale de $\widetilde{\varphi} \circ X$ est donnée par*
$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \circ X : U &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto (x, X^1, ..., X^m) \end{aligned}$$
Les fonctions $X^1, ..., X^m$ sont appelés composantes locale de X relativement à la carte (U, φ) .

6. *Si* $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^i\partial_i$ *relativement à la carte* (U, φ) *et* $\alpha \in C^\infty(U)$ *alors* $X + \alpha Y = (X^i + \alpha Y^i)\partial_i$
7. *Si* $\mathbb{R}^m$ *est muni de l'atlas usuelle alors* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ *s'identifie à* $(C^\infty(\mathbb{R}^m))^m$.

Théorème 1.3.1. *Une section* $X : M \longrightarrow TM$ *est de classe* C^k *si et seulement si relativement à toute carte* $(U, \varphi) \in atl(M)$*, les composantes* $(X^1, ..., X^m)$ *sont de classe* C^k *(i.e.* $X^i \in C^k(U)$, $1 \leq i \leq m$*).*

Preuve. *En effet, toute carte* $(U, \varphi) \in atl(M)$ *induit une carte* $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \in atl(TM)$ *et on a*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ U & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \widetilde{\varphi} \\ \varphi(U) & \longrightarrow & \varphi(U) \times (\mathbb{R}^m) \\ & \widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1} & \end{array}$$

D'après (5) du Propriétés 1.3.1, on obtient

$$(\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(z) = (z, X^1 \circ \varphi^{-1}(z), ..., X^m \circ \varphi^{-1}(z))$$

Théorème 1.3.2. *Soit* M^m *une variété de dimension* m *et* $\{U_i\}_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert de* M*. Si* $\{X_i\}_{i\in I}$ *est une famille de Champs de vecteurs différentiables telle que*

$$\begin{array}{rcl} (\forall i \in I) & : & X_i \in \mathcal{H}(U_i) \\ (\forall i, j \in I) & : & X_i = X_j \quad sur \quad U_i \cap U_j \end{array}$$

alors il existe un unique champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(M)$ *tel que*

$$(\forall i \in I) : X_{/U_i} = X_i \tag{1.5}$$

Preuve. *De la formule* (1.5) *en obtient l'unicité du champ de vacteurs* X*. Soit* $\{\theta_j, \alpha_j\}_{j\in J}$ *une partition de l'unité subordonée à* $\{U_i\}_{i\in I}$ *. Pour* $j \in J$ *il existe* $k_j \in I$ *tel que* $\theta_j \subset U_{kj}$ *, si on pose :*

$$\begin{array}{rcl} \overline{X}_j & = & \alpha_j X_{kj} \quad , \forall j \in J \\ X & = & \sum_{j\in J} \overline{X}_j = \sum_{j\in J} \alpha_j X_{kj} \end{array}$$

alors

1. $\overline{X}_j \in \mathcal{H}(U)$ *tel que supp* $(\overline{X}_j) \subset \theta_j \subset U_{kj}$
2. $X \in \mathcal{H}(M)$ *tel que pour* $x \in U_i$*, on a*

$$X(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) X_{kj}(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) X_i(x) = X_i(x) \tag{1.6}$$

1.3.2 Crochets et Algébre de Lie

Définition 1.3.2. *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une opération bilinéaire $[,]$ qu'on appelle crochet de Lie, qui a les propriétés suivantes :*

1. $[a,b] = -[b,a]$ *, pour tout* $a,b \in \mathfrak{g}$ *(est une antisymétriques)*
2. *le crochet satisfait l'identité de Jacobi :*

$$[[a,b],c] + [[c,a],b] + [[b,c],a] = 0$$

pour tout $a,b,c \in \mathfrak{g}$

Corollaire 1.3.1. *Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}(M)$ forment une algèbre de Lie, avec le crochet*

$$[X,Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M)$$

qui vaut en coordonnées locales,

$$[X,Y]_{|U} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Preuve. *Le crochet de Lie sur $\mathfrak{X}(M)$ est induit par le crochet de Lie naturel sur les dérivations $\mathcal{D}(C^\infty(M), C^\infty(M))$, donné par :*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

Proposition 1.3.2. *Si $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a,b \in \mathbb{R}$, et $f,g \in C^\infty(M)$, alors :*

1. $[a,a] = 0$ *, pour tout* $a \in \mathfrak{g}$
2. $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$
3. $[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] = [X,[Y,Z]]$ *(l'identité de Leibniz)*
4. $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Lemme 1.3.1. *Soient (U,φ) , $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, une carte et $\{\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$, $i = 1, ..., n\}$, les cootdonnées de champ de vecteur correspond, alors*

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad \forall i,j \in \{1, ..., n\}$$

Exemple 1.3.1. *Dans $\mathbb{R}^n$, avec $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$, on a $XY \cdot g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^1 \partial x^2}$ Il est cependant possible de définir un champ de vecteurs à partir du produit.*

Définition 1.3.3. *Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ est le champ de vecteurs*

$$[X,Y] = XY - YX$$

Pour que cette définition soit correcte il faut montrer que $XY - YX$ est bien un champ de vecteurs, c'est-à-dire une dérivation sur $C^\infty(M)$. Or la linéarité est évidente et la régle de Leibniz se déduit du calcul de proposition(1.3.2) :

$$\begin{aligned}
[X,Y]\cdot(fg) &= XY\cdot(fg) - YX\cdot(fg) \\
&= fXY\cdot g + gXY\cdot f - fYX\cdot g - gYX\cdot f \\
&= f[X,Y]\cdot g + g[X,Y]\cdot f
\end{aligned}$$

En coordonnées locales, un champ de vecteurs étant donné sous la forme $X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, les composantes du crochet de Lie $[X,Y](x)$ sont

$$[X,Y]^i(x) = \sum_{j=1}^n \left(X^j(x)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x) - Y^j(x)\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right) = X\cdot Y^i(x) - Y\cdot X^i(x)$$

Matriciellement, en notée $JX(x) = \left(\frac{\partial X^l}{\partial x^j}(x)\right)$ la matrice jacobienne du vecteur des composantes de X , on obtient

$$\begin{pmatrix} [X,Y]^1(x) \\ \vdots \\ [X,Y]^n(x) \end{pmatrix} = JY(x) \quad \begin{pmatrix} X^1(x) \\ \vdots \\ X^n(x) \end{pmatrix} - JX(x) \quad \begin{pmatrix} Y^1(x) \\ \vdots \\ Y^n(x) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.3.2.

1. *Dans $\mathbb{R}^n$, considérons des champs de vecteurs linéaires, c'est-à-dire que, dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}$, ils s'écrivent matriciellement comme $X(x) = Ax$ et $Y(x) = Bx, x \in \mathbb{R}^n$ tel que A et B étant des matrices $(n\times n)$ à coefficients constants. Le crochet de Lie de ces champs de vecteurs s'écrit alors*

$$[X,Y](x) = JY(x)X(x) - JX(x)Y(x) = (BA - AB)x$$

2. *Si $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors $[X,Y] = 0$. Plus généralement si X et Y sont constants dans un système des coordonnées, c'est- à - dire $X^1(x),\ldots,X^n(x)$ et $Y^1(x),\ldots,Y^n(x)$ sont tous constants, alors $[X,Y]=0$ sur le domaine des coordonnées.*

1.4 Connexion Linéaire

Définition 1.4.1. *Soit M^m une variété de dimension m. Une connexion linéaire sur M (ou derivée covariante de champs de vacteurs) est une application*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

qui verifie les conditions suivantes :

1. $\nabla_{X+fX'} Y = \nabla_X Y + f \nabla_{X'} Y$ *($C^\infty(M)$ - linaire).*
2. $\nabla_X (Y + \lambda Y') = \nabla_X Y + \lambda \nabla_X Y'$ *($\mathbb{R}$ - linaire).*
3. $\nabla_X f Y = (\nabla_X f) Y + f \nabla_X Y = X(f) Y + f \nabla_X Y$.

Exemple 1.4.1. *Soit $\mathbb{R}^m$ muni de l'atlas usuelle $\{(\mathbb{R}^m, Id)\}$, si $X = (X^1, ..., X^m) \in (C^\infty(\mathbb{R}^m))^m$ et $Y = (Y^1, ..., Y^m) \in (C^\infty(\mathbb{R}^m))^m$ alors*

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \left(\frac{\partial Y^1}{\partial x^i} X^i, \ldots, \frac{\partial Y^m}{\partial x^i} X^i \right) \\ &= \left(X\left(Y^1\right), \ldots, X\left(Y^m\right) \right) \\ &= \left(\nabla_X Y^1, \ldots, \nabla_X Y^m \right) \end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur $\mathbb{R}^m$.

Proposition 1.4.1. *Soient M^m une variété et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Si U un ouvert de M tel que $X_{/U} = 0$ alors $(\nabla_X Y)_{/U} = 0$.*

Preuve. *Soient $V \subset U$ ouvert voisinage de x et $f \in C^\infty(M)$ tels que $f_{/V} = 1$ et $f_{/U^c} = 0$, on a*

$$\begin{aligned} fX &= 0 \\ \nabla_{fX} Y &= 0 \end{aligned}$$

d'où $(\nabla_{fX} Y)_x = f(x) \nabla_X Y = 0$ comme $f(x) = 1$ on déduit que $(\nabla_X Y)_x = 0$.

Corollaire 1.4.1. *Soient M^m une variété et $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$. Si U est un ouvert de M tel que $X_{1/U} = X_{2/U}$ alors*

$$(\forall Y \in \mathcal{H}(M) \, : \, (\nabla_{X_1} Y)_{/U} = (\nabla_{X_2} Y)_{/U}$$

Proposition 1.4.2. *Soient M^m une variété et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Si U est un ouvert de M tel que $Y_{/U} = 0$ alors $(\nabla_X Y)_{/U} = 0$*

Preuve. *Soient* $x \in U$, $V \subset U$ *ouvert voisinage de* x *et* $f \in C^\infty(M)$ *tels que* $f_{/V} = 1$ *et* $f_{/U^c} = 0$, *on a*

$$\begin{aligned} fY &= 0 \\ \nabla_X fY &= 0 = X(f)Y + f\nabla_X Y \end{aligned}$$

d'où $(\nabla_X fY)_x = X(f)(x)Y_x + f(x)(\nabla_X Y)_x = f(x)(\nabla_X Y)_x = 0$ *comme* $f(x) = 1$ *on déduit que* $(\nabla_X Y)_x = 0$.

Corollaire 1.4.2. *Soit* M^m *une variété et* $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(M)$. *Si* U *est un ouvert de* M *tel que* $Y_{1/U} = Y_{2/U}$ *alors*

$$(\forall X \in \mathcal{H}(M) : (\nabla_X Y_1)_{/U} = (\nabla_X Y_2)_{/U}$$

Proposition 1.4.3. *Soit* M^m *une variété et* ∇ *une connexion linéaire sur* M. *Si* U *est un ouvert de* M *alors* ∇ *induit une connexion linéaire sur* U *définie par*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{H}(U) \times \mathcal{H}(U) &\longrightarrow \mathcal{H}(U) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

telle que

$$(\nabla_X Y)_x = (\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})_x$$

où $\widetilde{X} = X$ *et* $\widetilde{Y} = Y$ *sur un voisinage de* x, *i.e. il existe* $V \subset U$ *un ouvert voisinage de* x *tel que* $\widetilde{X}_{/V} = X_{/V}$ *et* $\widetilde{Y}_{/V} = Y_{/V}$.

Proposition 1.4.4. *Soit* M^m *une variété,* ∇ *une connexion linéaire sur* M *et* $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. *Si* $x \in M$ *tel que* $X_x = 0$ *alors* $(\nabla_X Y)_x = 0$.

Preuve. *Relativement à une carte* $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ *on a* $X = X^i \partial_i$ *et* $Y = X^j \partial_j$, *de la Proposition 1.4.3,* ∇ *in duit une connexion sur* U *et on a*

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)_x &= X^i(x)\partial_i\left(Y^j\right)\partial_j + X^i(x)Y^j(x)\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)_x \\ &= X^i(x)\left[\partial_i\left(Y^j\right)\partial_j + Y^j(x)\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)_x\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.3. *Soit* M^m *une variété,* ∇ *une connexion linéaire sur* M *et* $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$. *Si* $x \in M$ *tel que* $X_x = Y_x$ *alors* $(\nabla_X Z)_x = (\nabla_Y Z)_x$.

Le Corollaire nous permet de poser la définition suivante :

Définition 1.4.2. *Soit* M^m *une variété de dimension* m *et* ∇ *une connexion sur* M. *Si* $x \in M$ *alors* ∇ *induit une dérivée covariante par rapport au vecteurs tangents définie par :*

$$\begin{aligned} \nabla : T_x M \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \nabla : T_x M \\ (v, Y) &\longmapsto \nabla_v Y = (\nabla_X Y)_x \end{aligned}$$

où $X \in \mathcal{H}(M)$ *tel que* $X_x = v$.

Définition 1.4.3. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Soit $(\partial_1, ..., \partial_m)$ la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ). On a*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (1 \leq i, j \leq m) \tag{1.7}$$

où $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty$ appelé coefficient de Christoffel.

Si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ relativement à la carte (U, φ), alors

$$\nabla_X Y = X^i \left[\partial_i \left(Y^k\right) + Y^j \Gamma_{ij}^k\right] \partial_k \tag{1.8}$$

Proposition 1.4.5. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ (resp. $(\overline{\partial}_1, ..., \overline{\partial}_m)$) désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ) (resp. (V, ψ)) alors*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^t = a_i^s \overline{a}_k^t \left[\partial_s \left(a_j^k\right) + a_j^l \Gamma_{ls}^k\right] \tag{1.9}$$

où

$$\begin{aligned} a_j^i &= \frac{\partial \varphi^i \circ \psi^{-1}}{\partial x^j} \circ \psi \\ \overline{a}_j^i &= \frac{\partial \psi^i \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \varphi \\ \left(\overline{a}_j^i\right)_{ij} &= \left(a_j^i\right)_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

Preuve. *On a $\overline{\partial}_k = a_k^i \partial_i$ (resp.$\partial_k = \overline{a}_k^i \overline{\partial}_i$)*

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{\partial}_i}\overline{\partial}_j &= \nabla_{a_i^s\partial_s} a_j^l \partial_l \\ &= a_i^s \left[\partial_s \left(a_j^l\right) \partial_l + a_j^l \Gamma_{ls}^k \partial_k\right] \\ &= a_i^s \left[\partial_s \left(a_j^k\right) + a_j^l \Gamma_{ls}^k\right] \partial_k \\ &= a_i^s \left[\partial_s \left(a_j^k\right) + a_j^l \Gamma_{ls}^k\right] \overline{a}_k^t \overline{\partial}_t \end{aligned}$$

Proposition 1.4.6. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ (resp. $(\overline{\partial}_1, ..., \overline{\partial}_m)$) désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ) (resp. (V, ψ)) alors*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^t = \overline{a}_k^t A_{ij}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k \tag{1.10}$$

où

$$A_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^j \partial x^i} \circ \psi$$

Preuve. *On a*

$$\begin{aligned}
\partial_s\left(a_j^k\right) &= \frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{\partial\varphi^k\circ\psi^{-1}}{\partial x^j}\circ\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2\left(\varphi^k\circ\psi^{-1}\right)}{\partial x^l\partial x^j}\circ\psi\right)\left(\frac{\partial\psi^l\circ\varphi^{-1}}{\partial x^s}\circ\varphi\right)\\
&= \overline{a}_s^l\frac{\partial^2\left(\varphi^k\circ\psi^{-1}\right)}{\partial x^l\partial x^j}\circ\psi\\
&= \overline{a}_s^l A_{lj}^k
\end{aligned}$$

De la formule (1.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_{ij}^t &= a_i^s\overline{a}_k^t\left[\partial_s\left(a_j^k\right)+a_j^l\Gamma_{ls}^k\right]\\
&= \overline{a}_k^t a_i^s\overline{a}_s^l A_{lj}^k + a_i^s a_j^l\overline{a}_k^t\Gamma_{ls}^k\\
&= \overline{a}_k^t\delta_i^l A_{lj}^k + a_i^s a_j^l\overline{a}_k^t\Gamma_{ls}^k\\
&= \overline{a}_k^t A_{ij}^k + a_i^s a_j^l\overline{a}_k^t\Gamma_{ls}^k
\end{aligned}$$

Définition 1.4.4. *Une connexion ∇ sur une variété M^m est dite localement plate au voisinage de $x\in M$, s'il existe une carte $(U,\varphi)\in atl(M,x)$ tel que $(\forall 1\le i,j,k\le m):\Gamma_{ij}^k=0$*

Remarque 1.4.1. *Si $(\forall 1\le i,j,k\le m):\Gamma_{ij}^k=0$ relativement à la carte $(U,\varphi)\in atl(M,x)$, alors pour toute carte $(V,\psi)\in atl(M,x)$, on a d'après la formule (1.10)*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^t=\overline{a}_k^t A_{ij}^k=\overline{a}_k^t\frac{\partial^2\varphi^k\circ\psi^{-1}}{\partial x^j\partial x^i}\circ\psi \tag{1.11}$$

Définition 1.4.5. *Une connexion ∇ sur une variété M^m est dite localement symétrique au voisinage de $x\in M$, s'il existe une carte $(U,\varphi)\in atl(M,x)$ tel que*

$$(\forall 1\le i,j,k\le m)\ :\ \Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$$

Remarque 1.4.2. *Soit $(U,\varphi)\in atl(M,x)$ une carte de symétrie pour la connexion ∇ .*

1. *Si $(\partial_1,...,\partial_m)$ désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à la carte de symétrie (U,φ), alors*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j-\nabla_{\partial_j}\partial_i=\left(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k\right)\partial_k=0$$

2. *Si $X=X^i\partial_i\in\mathcal{H}(U)$ et $Y=Y^j\partial_j\in\mathcal{H}(U)$, alors*

$$\begin{aligned}
\nabla_XY-\nabla_YX &= X^i\partial_i\left(Y^j\right)\partial_j-Y^j\partial_j\left(X^i\right)\partial_i+X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j-Y^jX^i\nabla_{\partial_j}\partial_i\\
&= [X,Y]+X^iY^j\left(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k\right)\partial_k\\
&= [X,Y]
\end{aligned}$$

3. Si $(V, \psi) \in atl(M, x)$, de la formule (1.10), on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_{ij}^{t} &= \overline{a}_{k}^{t} A_{ij}^{k} + a_{i}^{s} a_{j}^{l} \overline{a}_{k}^{t} \Gamma_{ls}^{k} \\ &= \overline{a}_{k}^{t} A_{ji}^{k} + a_{i}^{s} a_{j}^{l} \overline{a}_{k}^{t} \Gamma_{sl}^{k} \\ &= \overline{a}_{k}^{t} A_{ji}^{k} + a_{j}^{l} a_{i}^{s} \overline{a}_{k}^{t} \Gamma_{sl}^{k} \\ &= \overline{\Gamma}_{ij}^{t}\end{aligned}$$

Définition 1.4.6. *Une connexion linéaire ∇ est dite symétrique si et seulement si*

$$(\forall X, Y \in \mathcal{H}(M): \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{1.12}$$

i.e

$$\Big(\forall (U, \varphi) \in atl(M): \quad \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad , (1 \le i, j, k \le m) \tag{1.13}$$

Définition 1.4.7. *Un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{H}(M)$ est dit parallèl relativement à une connexion ∇ si et seulement si*

$$(\forall X \in \mathcal{M}): \quad \nabla_X Y = 0$$

Localement, de la formule (1.8), on déduit que Y est parallèl si et seulement si

$$\partial_i \left(Y^k\right) + Y^j \Gamma_{ij}^{k} = 0 \quad , (1 \le i, k \le m) \tag{1.14}$$

Si ∇ est plate sur une carte (U, φ) (i.e. $\Gamma_{ij}^{k} = 0$) alors Y est parallèl si et seulement si Y est constant $Y = Y^j \partial_j$, où Y^j ($1 \le i \le m$) sont des fonctions constantes.

1.5 Géodésiques

Définition 1.5.1. *Soit (M, g) une variété pseudo Riemannainne de dimension n .Une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ est dite courbe géodésique $D_t \dot{\gamma} = 0$ i,e $\dot{\gamma}$ est parallèle En corrdonneé locales , γ est une géodésique ssi $\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma_{ij}^{k}(\gamma(t)) = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ où $\gamma \in (U, \varphi)$ une carte de A et telle que*

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^k(t))$$

*Si tout géodésique sur une variété pseudo Riemannainne (M, g) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier , alors sera dite une variété **géodésiquement complète***

Remarque 1.5.1. *Si γ est une géodésique sur (M, g) alors :*

$$g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = constant$$

Exemple 1.5.1. *soit $(\mathbb{R}^n, \Sigma_{i=1}^{n} dn_i^2)$ on a $\Gamma_{ij}^{k} = 0$, $\forall i, j, k \in \{1, ..., n\}$ et donc $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une géodésique ssi $\ddot{\gamma}^k(t) = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ on en déduit que les géodésique de $\mathbb{R}^n$ sont données par : $\gamma(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$*

Exemple 1.5.2. *Déterminer les géodésique sur* $(\mathbb{R}, g = e^n dn^2)$.
$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}$, γ *géodésique* $\Longleftrightarrow \gamma^{''} + \frac{1}{2}(\dot{\gamma})^2 = 0$ *d'où* $\gamma^{'}(t) = \frac{2v}{2+vt}$ *et donc* $\gamma(t) = c + 2\ln(1 + \frac{vt}{2})$ *sur* $t \in]\frac{-2}{v}, +\infty[$ *si* $v > 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *si* $v = 0$ *et sur* $]-\infty, \frac{-2}{v}[$ *si* $v < 0$,$(\mathbb{R}, e^n dn^2)$ *n'est par géodésiquenment complèle*

1.5.1 Transport Parallèle

Proposition 1.5.1. *soit* $\gamma : I \longrightarrow M$ *une courbe sur* M *et soit* $a \in I$.
Alors pour tout $v \in T_{\gamma(a)}M$ *il existe un unique champ parallèle le leng de* γ *,* V *tel que* $V(a) = v$ *de plus, si* $b \in I$*,alors l'application :*

$$\begin{array}{rcl} P = P_a^b(\gamma) : (T_{\gamma(a)}M, g_{\gamma(a)}) & \longrightarrow & (T_{\gamma(b)}M, g_{\gamma(b)}) \\ v & \longmapsto & V(b) \end{array}$$

est une immétrie linéaire appelée ***transport parallèle entre*** $\gamma(a)$ ***et*** $\gamma(b)$ ***le leng de*** γ

Preuve.
$\gamma : I \longrightarrow M$ *étant une courbe sur* M $v \in T_{\gamma(a)}M$ *, si* V *est une champ de vecteurs le leng de* γ *alors* V *est parallèle i.e* $P_t V = 0$ *si et suelement si*

$$\dot{V}^k(t) + \overset{\frown}{\dot{\gamma}^i}(t) V^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$$

on cherche un unique $V \in (X)(\gamma)$ *tel que* $D_t V = 0$ *et* $V(a) = v$ *ceci découle immédiatement du thérème fondamental d'existence et d'unicité de systèmes des equations différentielles a dinaires.*
considérun alors application

$$\begin{array}{rcl} P : T_{\gamma(a)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(b)}M \\ v & \longmapsto & P(v) = V(b) \end{array}$$

où V *est l'unique champ de vecteurs le leng de* γ *qui est parallèle et tel que* $v = V(a)$

P est bien linéaire

suivant $v, \omega \in T_{\gamma(a)}M$ il existe alors un unique $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ et un unique $W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tels que :

$v = V(a)$ et $D_t V = 0$

$w = W(a)$ et $D_t W = 0$

on a alors : $P(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w)$
et si $\lambda \in \mathbb{R}$: $P(\lambda v) = (\lambda V)(b) = \lambda \cdot V(b) = \lambda \cdot P(v)$

P est bijectif

montrens qui P est injectif , soit alors $v \in T_{\gamma(a)}M$ tel que $P(v) = 0$, ona alors $V(b) = 0$ et $D_t V = 0$,d'autres part la vecteur tangent nul , peut s'écrire comme

$$o = \theta(b) \quad \text{où} \quad \theta \in \mathfrak{X}(\gamma)$$

De plus θ est un champ parallèle le leng de γ , $D_t\theta = 0$ ainsi par unicité , montre que $V = \theta$ d'où $v = V(a) = \theta(a) = 0$, part alors injectif $dim\, T_{\gamma(a)}M = dim\, T_{\gamma(b)}M$, P dévient bijectif

P est une Immétrie

on doit montre :

$$g_{\gamma(b)}(P(v), P(w)) = g_{\gamma(a)}(v, w)$$

considérns les deux champs le leng de γ , V, W , on a alors :

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t)}((D_t V)(t), W(t)) + g_{\gamma(t)}(V(t), (D_t W)(t))$$

$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = 0$ puis que $D_t V = D_t W = 0$
Ainsi , $g_{\gamma(t)}(V(t), W(t))$ est constant , on a alors :

$$\begin{aligned} g_{\gamma(b)}(P(v), P(w)) &= g_{\gamma(b)}(V(b), W(b)) \\ &= g_{\gamma(a)}(V(a), W(a)) \\ &= g_{\gamma(a)}(v, w) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Variété Riemannienne

Définition 2.0.1. *Soient $V_1, V_2, ..., V_k$ et W des espaces vectoriels, soit F une application de $V_1 \times ... \times V_k \to W$. On dit que l'application F est k-linéaire ou (multilinéaire) si elle est linéaire sur chaque variable c.à.d*

$$F(v_1, ..., \alpha v_{i_1} + \beta v_{i_2}, ..., v_k) = \alpha F(v_1, ..., v_{i_1}, ..., v_k) + \beta F(v_1, .., v_{i_2}, ..., v_k)$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $i = 1, ..., k$. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'application $\omega : V \to \mathbb{R}$ est applée un covecteur, l'ensemble des covecteurs est applée le dual de V noté V^*.
On va considérer que $\langle \omega, v \rangle = \langle v, \omega \rangle = \omega(v) \in \mathbb{R},\ v \in V,\ \omega \in V^*$.

Proposition 2.0.1. *Si $(v_1, ..., v_n)$ est une base de V espace vectoriel de dimension n, alors $(w^1, ..., w^n)$ est une base de V^* et on a $w^j(v_i) = \delta_{ij}$. En particulier, dim V = dim V^*.*

2.1 Notions de Tenseur

1. Un k-tenseur covariant sur V est une application k-linéaire $V^k \to \mathbb{R}$ tel que $V^k = \underbrace{V \times ... \times V}_{k \text{ fois}}$. On note $T^k(V)$ l'ensemble des tenseurs k-covariante sur V
2. Un l-tenseur contravariant est une application linéaire sur $V^{*l} \to \mathbb{R}$. On note $T_l(V)$ l'ensemble des tenseurs l-contravariant sur V
3. Un k-tenseur covariant et l-tenseur contravariante est une application $(k+l)$-linéaire sur $V^k \times V^{*l} \to \mathbb{R}$. un tenseur de type (k, l) est k-covariante et l-contravariante. On note $T_l^k(V)$ l'ensemble des tenseurs de type (k, l).
4. Par convention $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. *le produit tensoriel de deux tenseurs* $F \in T_l^k(V)$ *et* $G \in T_q^p(V)$ *est le tenseur noté* $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$

$F \otimes G(v_1, ..., v_k, ..., v_{k+p}, w^1, ..., w^l, ..., w^{l+q}) =$
$F(v_1, ..., v_k, w^1, ..., w^l)G(v_{k+1}, ..., v_{k+p}, w^{l+1}, ..., w^{l+q})$

Lemme 2.1.1. *Si* $(v_1, ..., v_n)$ *est la base de* V *et* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *la base duale correspondante à* V *(i.e.* $\omega^i(v_j) = \delta_j^i$*), alors le tenseur*

$$w^{i_1} \otimes ... \otimes w^{i_k} \otimes v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_l},\ 1 \leq j_p,\ i_q \leq n$$

forme une base de $T_l^k(V)$*. Par conséquent, dim* $T_l^k(V) = n^{k+1}$ *Tenseurs sur une variété*

Définition 2.1.2. *Pour tout* $p \in M$*, définissons l'espace vectoriel*

$$T_p^{(s,r)}M = \underbrace{T_pM \otimes ... \otimes T_pM}_{s\ fois} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes ... \otimes T_p^*M}_{r\ fois}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)}M$ *est un tenseur de type* (s, r) *au dessus de* p*. Dans une base associée à des coordonnées* (x_i) *au voisinage de* p*, il s'écrit*

$$T_{|p} = T_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes ... \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

2.1.1 Métrique Riemannienne sur une Variété

Définition 2.1.3. *Une métrique Riemannienne* g *sur une variété* M *est une application,*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$ *-bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive. Où* $\Gamma(TM)$ *désigne l'espace des champs de vecteurs sur la variété* M*.*

Remarque 2.1.1. *Soit* g *une métrique Riemannienne sur* M*. Pour tout* $V, W \in \Gamma(TM)$*, on a :*

1. — $g(V, W) = g(W, V)$. *(symétrique)*
   — $g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$. *(non dégénérée)*
   — $g(V, V) \geq 0$. *(définie positive)*
2. $g \in \Gamma(TM^*) \otimes \Gamma(TM^*)$ *Si* (U, φ) *est une carte sur* M*, alors :*

$$g = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{2.1}$$

où g_{ij} *sont des fonctions différentiables sur* U *appellé composantes du tenseur métrique relativement á la carte* (U, φ)*. Localement, si* $V = V^i \partial_i$ *et* $W = W^j \partial_j$ *on a :*

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3. *Pour tout $x \in M$ on a*

$$g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où T_xM désigne l'espace tangent en x.

Définition 2.1.4. *Une variété Riemannienne est un couple (M, g), où M est une variété différentiable et g une métrique Riemannienne sur le fibré tangent (TM, π, M).*

Exemple 2.1.1. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard*

$$g_0(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

où $v = (v_1, \ldots, v_n)_x, w = (w_1, \ldots, w_n)_x \in T_x\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$

Exemple 2.1.2. *Dans la boule*

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

on considère le tenseur g_H défini par

$$g_H(v, w) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(v, w), \quad v, w \in T_x\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{D}^n.$$

g_H est appelée la métrique hyperbolique sur $\mathbb{D}^n$.

Exemple 2.1.3. *Soit M une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in M$, on a $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n$. En posant*

$$g(v, w) = g_0(v, w) \quad v, w \in T_xM$$

on obtient la métrique Riemannienne induite par g_0 sur M.

Remarque 2.1.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, de dimension $n, (U, \varphi)$ et (V, ψ) deux cartes sur M, Si g_{ij} (resp $\tilde{g}_{kl}$) désignent les composantes de g relativement à la carte (U, φ)(resp (V, ψ)), alors pour tout $x \in \varphi(U \cap V)$, le changement de coordonnées est donné par*

$$y = y(x) = \left(y^1, \ldots, y^n\right) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$$

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl}$$

où $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)$ désignent les bases de champs de vecteurs associés respec- tivement aux cartes (U, φ) et (V, ψ). pour la preuve, remarquons que pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

2.1.2 Isométrie

Définition 2.1.5. *Soit $f : M \to (N, h)$ un difféomorphisme local sur M et h une métrique sur N. On définit une métrique $g = f^*h$ sur M, appelée métrique tirée en arriére de h par f, en posant, pour tout $(u, v) \in T_mM$*

$$(f^*h)_m(u, v) = h(d_mf(u), d_mf(v))$$

Définition 2.1.6. *$f : (M, g) \to (N, h)$ est une isométrie (resp. une isométrie locale) ssi f est un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local) et $g = f^*h$.*

Exemple 2.1.4. *$(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ est localement isométrique, mais pas isométrique.*

2.1.3 Tenseur de Torsion

Définition 2.1.7. *Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M. Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$-bilinéaire definie par*

$$\begin{array}{rcl} T : \Gamma^1(TM) \times \Gamma^1(TM) & \longrightarrow & \Gamma^1(TM) \\ (X, Y) & \longmapsto & T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{array}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma^1(TM)$.

Remarque 2.1.3.

1. *T est un champ de tenseur de type $(1, 2)$,*
2. *$T(X,\ Y) = -T(Y,\ X)$ pour tout $X,\ Y \in \Gamma^1(TM)$ (T est antisymétrique)*
3. *La connexion ∇ est dite sans torsion si $T \equiv 0$ (i.e) pour tout $X,\ Y \in \Gamma^1(TM) : [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$*
4. *Pour tout $x \in M$,le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectoriel*

$$\begin{array}{rcl} T_x : T_xM \times T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ (v, w) & \longmapsto & (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x \end{array}$$

où $X, Y \in \Gamma^1(TM)$, tel que $X_x = v$ et $Y_x = w$ indépendament du choix de X et Y).

2.2 Connexion de Levi-Civita

Théorème 2.2.1. *Sur toute variété Riemannienne (M^n, g), il existe une unique connexion linéaire ∇ telle que pour tout $(X, Y, Z) \in \mathfrak{X}(M)^3$ on a*

$$\begin{array}{rcll} 1/\nabla_X Y & = & \nabla_Y X + [X, Y], & \text{torsion libre}(T \equiv 0) \\ 2/Xg(Y, Z) & = & g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), & \text{compatibilite avec g} \end{array}$$

∇ est appellée connexion de Levi-Civita de la métrique g.

Preuve

Unicité : Si une telle connexion existe ,on a

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) &= g(\bigtriangledown_X Y,Z)+g(Y,\bigtriangledown_X Z)+g(\bigtriangledown_Y Z,X) \\ &\quad +g(Z,\bigtriangledown_Y X)-g(\bigtriangledown_Z X,Y)-g(X,\bigtriangledown_Z Y) \\ &= g(Y,[X,Z])+g(X,[Y,Z])+g(Z,[X,Y]) \\ &\quad +2g(Z,\bigtriangledown_Y X) \end{aligned}$$

parceque
$\bigtriangledown_X Z-\bigtriangledown_Z X=[X,Z]$, $\bigtriangledown_Y Z-\bigtriangledown_Z Y=[Y,Z]$, $\bigtriangledown_X Y+\bigtriangledown_Y X=[X,Y]+2\bigtriangledown_Y X$. On a donc

$$\begin{aligned} g(Z,\bigtriangledown_X Y) &= \frac{1}{2}[Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)-g(X,[Y,Z])-g(Y,[X,Z]) \\ &\quad -g(Z,[X,Y])] \end{aligned} \tag{2.2}$$

ce qui montrer que $\bigtriangledown_X Y$ est défini de façon unique.

Existance : L'identité (2.2)implique qu'il y'a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coéfficients de matrice de g

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}).$$

de cette expression suit la définition des Γ_{ij}^k en termes des g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_l(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l})g^{lk}.$$

Calculs en Coordonnées Locales

Soit (U,φ) une carte sur M et (g_{ij}) les coefficients de la métriques g dans la carte on définit sur $\varphi(U)$ des fonctions

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k})$$

où les coefficients g^{ij} sont ceux de la matrice $(g_{ij})^{-1}$.
On a alors $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum\limits_{k=1}^n\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}$. Les fonctions Γ_{ij}^k sont appelées les symboles de Christoffel de la métrique g dans la carte (U,φ).

Remarque 2.2.1.

1. *Pour tout* (i,j,k), *on a* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.
2. $(\nabla_X Y)(m)$ *ne dépend que des* $\Gamma_{ij}^k(m)$, *de* $X(m)$ *et de la connaissance de* Y *le long d'une courbe* γ *de* M *vérifiant* $\gamma(0) = m$ *et* $\gamma'(0) = X(m)$.

Exemple 2.2.1. *On définit une connexion linéaire* $\overline{\nabla}$ *sur* $\mathbb{R}$ *en* $\overline{\nabla}_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j$ *où* $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ *et* $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$ *.Cette connexion vérifie*

$$\begin{aligned}
1/\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X &= \sum_{i,j=1}^n (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) e_j = [X,Y], \\
2/\ Z.g_{\mathbb{R}^n}(X,Y) &= \sum_{i,j=1}^n (Z_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i Y_j} - Z_i X_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}) \\
&= g_{\mathbb{R}^n}(\overline{\nabla}_Z X, Y) + g_{\mathbb{R}^n}(X, \overline{\nabla}_Z Y)
\end{aligned}$$

Exemple 2.2.2. ***(la sphère*** S^2***)***

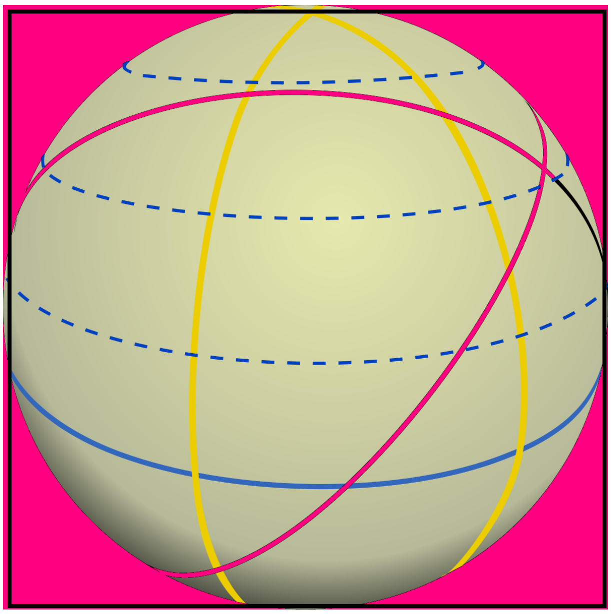


FIGURE 2.1 – la sphère S^2

Nous paramètrons la surface X *par*

$$X(u,v) = \begin{cases} x = & r\cos\theta \sin\varphi \\ y = & r\sin\theta\sin\varphi \\ z = & r\cos\theta \end{cases}$$

Calculons dx, dy *et* dz *en termes de* $dr, d\theta$ *et* $d\varphi$ *nous obtenons*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \phi d\varphi^2 \tag{2.3}$$

Le long de la sphère $r \equiv 1$ *et donc* $dr \equiv 0$. *Ainsi, l'équation 2.3 devient*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

nous avons, dans les composantes de la matrice et son inverse sont donnée

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

2/ Les Symbole de Christoffel :

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}[g_{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g_{12}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})] \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}[(0 + 0 - 0) + 0(0 + 0 - 0)] \\
\Gamma^1_{11} &= \Gamma^2_{22} = 0 \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}[g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{21,1}) + g^{12}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2})] \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}[1(0 + 0 - 0) + 0(0 + 2\cos 1 \sin 1 - 0)] \\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}[g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) + g^{12}(g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,2})] \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}[1(0 + 0 - 2\cos 1 \sin 1) + 0(0 + 0 - 0)] \\
\Gamma^1_{22} &= -\cos\theta \sin\theta \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}[g^{21}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{22}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})] \\
\Gamma^2_{11} &= 0 \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}[g^{21}(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}) + g^{22}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2})] \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}[0(0 + 0 - 0) + \frac{1}{\sin^2\theta}(0 + 2\cos\theta \sin\theta - 0)] \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

donc Ona les Γ^k_{ij} *sont nuls sauf* $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$ *et* $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
3/ ***la géodésique :*** $\ddot{X}_k + \Gamma^k_{ij} X_i X_j = 0$ *, les équations à résoudre sont main-*

tenant :

$$\begin{cases} \dfrac{du^\theta}{d\tau} + \Gamma^\theta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \\ \dfrac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma^\varphi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \end{cases}$$

Pour la seconde :

$$\begin{cases} \dfrac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma^\varphi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \\ \dfrac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} u^\varphi u^\theta + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} u^\theta u^\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\frac{du^\varphi}{d\tau} + 2u^\varphi u^\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$$

Laisser les conditions initiales être $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$, $u_0^\varphi = 1$, $u_0^\theta = 0$ *Comme chaque point et chaque direction de la sphère sont équivalents, il n'y a pas de perte de généralité dans ce choix. Ensuite, nous avons d'abord*

$$\left(\frac{du^\theta}{d\tau}\right)_0 = (u_0^\varphi)^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 = 0$$

et u^θ *ne change pas. Pour l'équation* φ*, il s'ensuit que*

$$\frac{du^\varphi}{d\tau} = -2u^\varphi u^\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$$

donc u^φ *est également constante et le vecteur de vitesse est* $u^i = (0,1)$ *: Intégrer pour trouver la courbe :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{d\tau} & = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} & = 1 \end{cases}$$

alors $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ *est* $\varphi = \varphi_0 + \tau = \tau$ *. La courbe est donc l'équateur :*

$$(\theta, \varphi) = (0, \tau)$$

Nous pouvons caractériser l'équateur comme l'intersection du plan unique normal à la surface, contenant le vecteur de vitesse initiale. Un tel plan passe toujours par le centre de la sphère, donc toutes les géodésiques sont donné par de grands cercles.

Tenseure de Courbure

Définition 2.2.1. *Soit M une variété muni d'une connexion linéaire ∇. On définit le tenseur de courbure, $R : \Gamma^1(\mathrm{T}M)\times\Gamma^1(\mathrm{T}M)\times\Gamma^1(\mathrm{T}M) \to \Gamma^1(\mathrm{T}M)$, associé à ∇, pour tout $X, Y, V \in \Gamma^1(TM)$ on a :*

$$R(X,Y)V = \nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_{[X,Y]}V$$

Propriété 2.2.1.

1. *La courbure R est $C^\infty(M)$-3 linéaire*
2. *$R(X,Y)V = -R(Y,X)V$ pour tout $X, Y, V \in \Gamma(\mathrm{T}M)$ (antisymtrie)*

Définition 2.2.2. *Sur une variété Riemannienne (M, g), le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk}\partial_l$$

$$R^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n}\left\{\Gamma^1_{im}\Gamma^{tm}_{jk} - \Gamma^1_{jm}\Gamma^t_{ik}\right\}$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale de champs de vecteurs sur M.

Proposition 2.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :*

1. *R est un champ de tenseurs de type $(3, 1)$.*
2. *$g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$.*
3. *$g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.*
4. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

5. *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle,pour $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma^1(\mathrm{T}M)$*
.

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

Chapitre 3

Variétés Pseudo Riemannienne

3.1 Quelques Notations

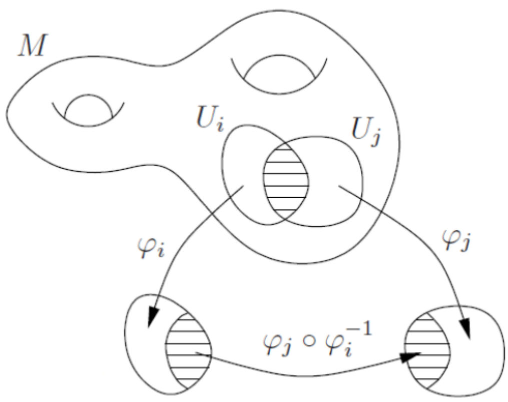
Une variété différentiable M de dimension n, est un espace topologique séparé muni d'un atlas différentiable de dimension n. Un atlas différentiable de dimension n, est une famille des cartes $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, telle que φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert U_i de M sur un ouvert $\varphi_i(U_i)$ de $\mathbb{R}^n$ $(\forall i \in I), M$ est recouvert par les ouverts $U_i (i \in I)$ c'est-à-dire :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M$$

et l'application de changement de cartes :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe C^∞, où $i, j \in I$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.



Étant donnée une variété différentiable M de dimension n et $x \in M$, notons par $\mathrm{atl}(M)$ l'atlas maximal de M , $\mathrm{atl}(M, x)$ l'ensemble des cartes dans $\mathrm{atl}(M)$ contenant $x, C^{\infty}(M)$ l'ensemble des fonctions différentiable sur $M, T_x M$ (resp. $T_x^* M$) l'espace tangent (resp. co-tangent) à la variété M en x, TM (resp. T^*M) fibré tangent (resp. co-tangent) à la variété $M, \Gamma(TM)$ (resp. $\Gamma\left(T^*M\right)$) l'espace des champs de vecteurs (resp. 1-formes) sur M, et ∂_i (resp. dx_i) les champs de bases (resp. base duale) associés à une carte locale.

3.2 Rappels sur les Formes Bilinéaires Symétriques

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1. Une forme bilinéaire symétrique $g : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite non-dégénérée si :
$$g(v, w) = 0, \forall w \in E \Longrightarrow v = 0$$
2. Une forme bilinéaire symétrique g sur $E \times E$ est non-dégénérée si et seulement si sa matrice (g_{ij}) dans une base $\{e_i\}$ de E est inversible, où $g_{ij} = g\left(e_i, e_j\right)$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonal de F pour g est le sous espace de E défini par $F^{\perp} = \{v \in E \mid g(v, w) = 0, \forall w \in F\}$. Ainsi, une forme bilinéaire symétrique g sur $E \times E$ est donc non-dégénérée si et seulement si l'orthogonal de E est $\{0\}$.
4. Un sous-espace F de E s'appelle non-dégénéré si $g|_F$ est non-dégénérée, où :
$$g|_F : F \times F \longrightarrow \mathbb{R} \quad , g|_F(x, y) = g(x, y)$$

Proposition 3.2.1. *Un sous-espace F de E est non-dégénéré ssi :*
$E = F \oplus F^{\perp}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dim\left(F + F^{\perp}\right) + \dim\left(F \cap F^{\perp}\right) = \dim F + \dim F^{\perp} \\ \dim F + \dim F^{\perp} = \dim E \end{array}\right.$$

Définition 3.2.1. *Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire g : $E \times E \to \mathbb{R}$, symétrique et non-dégénérée.*

Définition 3.2.2. *Étant donné un produit scalaire g sur E, on définit la norme de $v \in E$ par rapport à g de la manière suivante*

$$\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$$

.

Proposition 3.2.2. *Soit g un produit scalaire sur E. Alors, E admet une base orthonormée $\{e_i\}$, telle que $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\epsilon_j$ et $\epsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$. De plus,*

$$v = \sum_i \epsilon_i g(v, e_i) e_i, \quad \forall v \in E$$

Le nombre de signes négatifs dans $\{\epsilon_i\}$ est appelé l'indice de E, et noté $\operatorname{Ind} E$.

3.3 Métriques Semi-Riemanniennes

Soit M une variété différentiable de dimension n.

Définition 3.3.1. *Un tenseur métrique ou métrique semi-Riemannienne sur M, est une famille des applications $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}(x \in M)$, telle que :*

1. *Pour tout $x \in M, g_x$ est une forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée.*
2. *Si $X, Y \in \Gamma(TM)$, la fonction $g(X,Y)(x) = g_x(X_x, Y_x)$ est différentiable.*
3. *L'indice de g est constant, et noté Ind M, c'est-à-dire :*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in M, \operatorname{Ind}(T_xM) = p \text{ (par rapport à } g_x) \ .$$

Définition 3.3.2. *Une variété semi-Riemannienne est un couple (M, g), où M est une variété différentiable de dimension n, et g est un tenseur métrique sur M.*

Remarque 3.3.1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, alors :*

- $0 \leq \operatorname{Ind} M \leq \dim M$
- *Si Ind $M = 0, (M, g)$ est dite variété Riemannienne .*
- *Si $p = 1$ et $\dim M \geq 2, (M, g)$ est dite variété de Lorentz ou variété Lorentzienne.*

Définition 3.3.3. *Etant donnée une carte (U, φ) de (M, g) avec les champs de bases $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ associé, on appelle composantes du tenseur métrique les $n \times n$ fonctions g_{ij} définies par $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Localement, si M est munie d'un système de coordonnées locales (x_i), alors :*

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

Exemple 3.3.1. *L'espace Euclidien* $\mathbb{R}^n$ *muni de la métrique :*

$$g = -dx_1^2 - \ldots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \ldots + dx_n^2$$

noté $\mathbb{R}_p^n$*, est une variété semi-Riemannienne, et Ind* $\mathbb{R}_p^n = p$.
Soit $\epsilon_i = g(\partial_i, \partial_i)$*, alors :*

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & si\ i = 1, \ldots, p \\ +1, & si\ i = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

Pour $n \geq 2$*. l'espace* $\mathbb{R}_1^n$ *est appelé espace de Minkowski, et si* $n = 4, \mathbb{R}_1^4$ *est dite espace-temps de Minkowski.*

Les composantes de la métrique g *est données par* $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_j$*, c'est-à-dire :*

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\epsilon_j dx_i \otimes dx_j$$

Définition 3.3.4. *Soit* $n \geq 2$ *et* $0 \leq p \leq n$.

1. *La pseudo-sphère de* $\mathbb{R}_p^{n+1}$ *est définie par.*

$$\mathbb{S}_p^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

2. *La pseudo-hyperbolique de* $\mathbb{R}_{p+1}^{n+1}$ *est définie par :*

$$\mathbb{H}_p^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 + \sum_{i=p+2}^{n+1} x_i^2 = -1 \right\}$$

Exemple 3.3.2. *Sur la pseudo-sphère :*

$$\mathbb{S}_1^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

de $\mathbb{R}_1^3$*, on considère la paramétrisation :*

$$\begin{cases} x_1 = \sinh \alpha \\ x_2 = \cosh \alpha \sin \beta \\ x_3 = \cosh \alpha \cos \beta \end{cases}$$

La métrique $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ *de* $\mathbb{R}_1^3$ *induit sur* $\mathbb{S}_1^2$ *une métrique semi-Riemannienne* h*. soit* ∂_α *et* ∂_β *les champs de vecteurs de bases associé à cette paramétrisation. les composantes de la métrique* h *est données par :*

$$h_{11} = g(\partial_\alpha, \partial_\alpha) = -1, \quad h_{12} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = 0, \quad h_{22} = g(\partial_\beta, \partial_\beta) = \cosh^2 \alpha$$

c'est-à-dire $h = -d\alpha^2 + \cosh^2 \alpha d\beta^2$.

Si on considère une nouvelle paramétrisation dans $\mathbb{S}_1^2$:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sqrt{t^2+1}\cos\theta \\ x_3 = \sqrt{t^2+1}\sin\theta \end{cases}$$

alors la métrique h associée à cette dernière paramétrisation est donnée par :

$$h = \frac{-1}{t^2+1}dt^2 + \left(t^2+1\right)d\theta^2 \ .$$

Exemple 3.3.3. *On considère sur la pseudo-sphère :*

$$\mathbb{S}_1^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$$

de $\mathbb{R}_1^4$, la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \sinh\alpha \\ x_2 = \cosh\alpha\sin\beta \\ x_3 = \cosh\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ x_4 = \cosh\alpha\cos\beta\cos\gamma \end{cases}$$

$\mathbb{R}_1^4$ induit sur $\mathbb{S}_1^3$ une métrique semi-Riemannienne h, donnée par :

$$h = -d\alpha^2 + \cosh^2\alpha d\beta^2 + \cosh^2\alpha\cos^2\beta d\gamma^2$$

Exemple 3.3.4. *Soit (N, h) une variété semi-Riemannienne, M une sous variété différentiable de N, et $i : M \hookrightarrow N$ l'inclusion canonique. Si $(i^*h)_x$ est non-dégénérée de lindice constant pour tout $x \in M$, alors (M, i^*h) est une sous variété semi-Riemannienne de (N, h), où :*

$$(i^*h)_x (X_x, Y_x) = h\left(d_x i\left(X_x\right), d_x i\left(Y_x\right)\right), \quad x \in M, \quad X_x, Y_x \in T_xM$$

Exemple 3.3.5. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, et soit γ une fonction différentiable sur M. Alors, $\left(M, e^{2\gamma}g\right)$ est une variété semi-Riemannienne de même indice de (M, g), dite conforme à (M, g) de facteur de conformité $e^{2\gamma}g$. De plus, si $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur (M, g), alors $\{e^{-\gamma}e_i\}$ est une base orthonormée sur $\left(M, e^{2\gamma}g\right)$.*

Exemple 3.3.6. *Soit (M, g) et (N, h) deux variétés semi-Riemanniennes. Sur la variété produit $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$,la section suivante :*

$$(g \oplus h)((X, U), (Y, V)) = g(X, Y) + h(U, V)$$

$X, Y \in \Gamma(TM), U, V \in \Gamma(TN)$, est un tenseur métrique sur $M \times N$. De plus :

$$\operatorname{Ind}(M \times N) = \operatorname{Ind} M + \operatorname{Ind} N$$

Le couple $(M \times N, g \oplus h)$ *est appelé variété semi-Riemannienne produit. Soient* $M = \mathbb{R}_p^m$ *et* $N = \mathbb{R}_q^n$ *alors :*

$$g_M = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{i=p+1}^{m} dx_i^2, \quad g_N = -\sum_{j=1}^{q} dy_j^2 + \sum_{j=q+1}^{n} dy_j^2$$

$$g_M \oplus g_N = -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 - \sum_{j=1}^{q} dy_j^2 + \sum_{i=p+1}^{m} dx_i^2 + \sum_{j=q+1}^{n} dy_j^2$$

Pour tous $n \geq 1$ *et* $0 \leq p \leq n$, *on a :*

$$\mathbb{R}_p^n = \underbrace{\mathbb{R}_1 \times \ldots \times \mathbb{R}_1}_{p-\ fois} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{(n-p)-\ fois}, \text{ où } \mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}, -dx^2)$$

Définition 3.3.5. *Une isométrie entre deux variétés semi-Riemanniennes* (M, g), (N, h) *est un* C^∞ *difféomorphisme* $f : (M, g) \to (N, h)$ *tel que* $f^*h = g$, *c'est-à-dire.*

$$g(X, Y) = h(df(X), df(Y)), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

Exemple 3.3.7. *L'application identité* $Id : (M, g) \to (M, g)$ *est une isométrie (* Id *est un* C^∞ *-difféomorphisme et* $Id^* = Id$ *).*

Exemple 3.3.8. *Le composé de deux isométries est une isométrie. En effet, soient :*

$$f_1 : (M, g) \to (N, h), \quad f_2 : (N, h) \to (P, k)$$

deux isométries entre des variétés semi-Riemanniennes. Alors :

$$f_2 \circ f_1 : (M, g) \to (P, k)$$

est un C^∞ *-difféomorphisme. De plus, pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$, *on a :*

$$[(f_2 \circ f_1)^* k](X, Y) = k\left(d(f_2 \circ f_1)(X), d(f_2 \circ f_1)(Y)\right)$$

comme $d(f_2 \circ f_1) = df_2 \circ df_1$ *, on obtient :*

$$\begin{aligned} [(f_2 \circ f_1)^* k](X, Y) &= k\left(df_2\left(df_1(X)\right), df_2\left(df_1(Y)\right)\right) \\ &= (f_2^* k)\left(df_1(X), df_1(Y)\right) \end{aligned}$$

puisque $f_2^* k = h$ *et* $f_1^* h = g$. *on déduit :*

$$\begin{aligned} [(f_2 \circ f_1)^* k](X, Y) &= h\left(df_1(X), df_1(Y)\right) \\ &= (f_1^* h)(X, Y) = g(X, Y). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.9. *Soit $f : (M,g) \to (N,h)$ une isométrie, alors l'application f^{-1} est une isométrie de (N,h) dans (M,g), car f^{-1} est un C^∞ -difféomorphisme et pour tout X,Y dans $\Gamma(TM)$, on a :*

$$\left[\left(f^{-1}\right)^* g\right](X,Y) = g\left(df^{-1}(X), df^{-1}(Y)\right)$$

comme $g = f^*h$ et $df \circ df^{-1} = Id_{TN}$, on obtient :

$$\left[\left(f^{-1}\right)^* g\right](X,Y) = h\left(df\left(df^{-1}(X)\right), df\left(df^{-1}(Y)\right)\right) = h(X,Y)$$

Proposition 3.3.1. *La pseudo-sphère $\mathbb{S}_p^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{n-p}$.*

Preuve. *Considérons l'application f :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{n-p} &\to \mathbb{S}_p^n \\ (x,y) &\mapsto \left(x, \sqrt{1+|x|^2}y\right) \end{aligned}$$

1. *f est bien définie. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{n-p}$, on a :*

$$\left(x, \sqrt{1+|x|^2}y\right) = \left(x_1, \ldots, x_p, \underbrace{\sqrt{1+|x|^2}y_1}_{x_{p+1}}, \ldots, \underbrace{\sqrt{1+|x|^2}y_{n-p+1}}_{x_{n+1}}\right),$$

$$\begin{aligned} -\sum_{t=1}^{p} x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2 &= -\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-p+1}\left(\sqrt{1+|x|^2}y_i\right)^2 \\ &= -\sum_{t=1}^{p} x_i^2 + \left(1+|x|^2\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n-p+1} y_i^2}_{1} \\ &= -|x|^2 + 1 + |x|^2 = 1 \end{aligned}$$

Ici, $\sum_{t=1}^{p} x_i^2 = |x|^2$, et $\sum_{t=1}^{n-p+1} y_i^2 = 1$ car $y \in \mathbb{S}^{n-p}$.

2. *f est inversible.*

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{S}_p^n &\to \mathbb{R}^p \times \mathbb{S}^{n-p} \\ (x,z) &\mapsto \left(x, \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}z\right) \end{aligned}$$

f^{-1} est bien définie. De plus, les deux applications f et f^{-1} sont de classe C^∞.

Proposition 3.3.2. *La pseudo-hyperbolique $\mathbb{H}_p^n$ est difféomorphe a $\mathbb{S}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.*

3.4 Variétés Lorentziennes

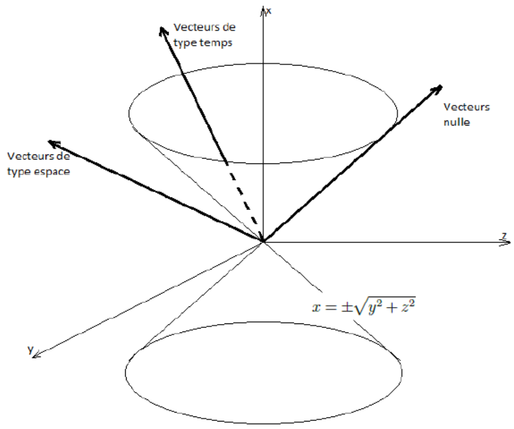
Définition 3.4.1. *Une variété Lorentzienne est une variété diffénentiable M, munie d'une métrique Lorentzienne g (g est $C^{\infty}(M)$ -bilinéaire, symétrique et non-dégénérée de signature $(-,+,\dots,+)$ c'est-à-dire $Ind\, M = 1$*

Définition 3.4.2. *Un vecteur tangent v à (M,g) en p est :*

1. *de type espace si $g(v,v) > 0$ ou $v = 0$,*
2. *nul si $g(v,v) = 0$ et $v \neq 0$,*
3. *de type temps si $g(v,v) < 0$.*

Exemple 3.4.1. *Soit $\mathbb{R}^3_1 = \left(\mathbb{R}^3, g = -dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$, et soit $v = (x,y,z) \in T_p\mathbb{R}^3_1$ $\left(p \in \mathbb{R}^3\right)$, alors les vecteurs tangents de type espace, nul, et type temps, sont présentés comme suit :*

$$\begin{aligned} g(v,v) = 0 &\Longleftrightarrow -x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 + z^2 \\ &\Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + z^2} \end{aligned}$$



Définition 3.4.3. *Une variété Lorentzienne (M,g) est dite temps-orientable s'il existe un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ de type-temps, c'est-à-dire :*

$$g\left(X_x, X_x\right) < 0, \quad \forall x \in M$$

Exemple 3.4.2.

1. *$\mathbb{R}^n_1$ est une variété Lorentzienne temps-orientable, avec :*

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad g = -dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

2. *La pseudo-sphère $\mathbb{S}_1^n$ de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ est une variété Lorentzienne temps-orientable.*

3.5 Connexion de Levi-Civita

Définition 3.5.1. *Une connexion linéaire sur M est une application :*

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tel que pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$
3. $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Z + f\nabla_Y Z$

Remarque 3.5.1. *Dans un système de coordonnées (x_i) sur M, ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k définis par :*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Soit $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, alors :

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Définition 3.5.2. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, une connexion linéaire sur M est dite compatible avec la métrique g, si :*

$$X(g(Y, Z)) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 3.5.3. *Soit M une variété différentiable, ∇ une connexion linéaire sur M, la torsion de ∇ est un champ de tenseur de type $(1, 2)$ définit par :*

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T(X, Y) = 0$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Théorème 3.5.1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, l'application :*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

donnée par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_X Y, Z\right) =& X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &+ g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur M, appelée connexion de Levi-Civita.

Preuve. *Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{fX} Y, Z\right) =& fX(g(Y,Z)) + Y(g(Z,fX)) - Z(g(fX,Y)) \\ &+ g(Z,[fX,Y]) + g(Y,[Z,fX]) - g(fX,[Y,Z]) \\ =& fX(g(Y,Z)) + Y(f)g(Z,X) + fY(g(Z,X)) - Z(f)g(X,Y) \\ &- fZ(g(X,Y)) - Y(f)g(Z,X) + fg(Z,[X,Y]) \\ &+ Z(f)g(Y,X) + fg(Y,[Z,X]) - fg(X,[Y,Z]) \\ =& fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - fZ(g(X,Y)) \\ &+ fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) - fg(X,[Y,Z]) \\ =& 2fg\left(\nabla_X Y, Z\right)\end{aligned}$$

alors $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$.

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{X+W} Y, Z\right) =& (X+W)(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X+W)) - Z(g(X+W,Y)) \\ &+ g(Z,[X+W,Y]) + g(Y,[Z,X+W]) - g(X+W,[Y,Z]) \\ =& X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g(Z,[X,Y]) \\ &+ g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) + W(g(Y,Z)) + Y(g(Z,W)) \\ &- Z(g(W,Y)) + g(Z,[W,Y]) + g(Y,[Z,W]) - g(W,[Y,Z]) \\ =& 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) + 2g\left(\nabla_W Y, Z\right) \\ =& 2g\left(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z\right)\end{aligned}$$

d'où $\nabla_{X+W} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$.

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_X fY, Z\right) =& X(g(fY,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(g(X,fY)) + g(Z,[X,fY]) \\ &+ g(fY,[Z,X]) - g(X,[fY,Z]) \\ =& X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - Z(f)g(X,Y) \\ &- fZ(g(X,Y)) + X(f)g(Z,Y) + fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) \\ &+ Z(f)g(X,Y) - fg(X,[Y,Z]) \\ =& 2X(f)g(Y,Z) + fX(g(Y,Z)) + fY(g(Z,X)) - fZ(g(X,Y)) \\ &+ fg(Z,[X,Y]) + fg(Y,[Z,X]) - fg(X,[Y,Z]) \\ =& 2X(f)g(Y,Z) + 2fg\left(\nabla_X Y, Z\right) \\ =& 2g\left(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z\right)\end{aligned}$$

donc $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$, de même manière on obtient :

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

Théorème 3.5.2. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec* g.

Preuve. *D'après la formule de Koszul, nous avons :*

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_X Y, Z\right) - g\left(\nabla_Y X, Z\right) &= \frac{1}{2}\{g(Z,[X,Y]) - g(Z,[Y,X])\} \\ &= g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

d'où, la connexion de Levi-Civita est sans torsion.

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(\nabla_X Z, Y\right) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z)) + X(g(Z,Y))\} \\ &= X(g(Y,Z)) \end{aligned}$$

celà prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M. Comme q est non-dégénérée. cette relation (3.1) détermine complètement la connexion ∇ , ce qui donne l'unicité.

Proposition 3.5.1. *Soient (M, g) une variété semi-Riemannienne, de dimension m. ∇ la connexion de Levi-Civita et (U, φ) une carte sur M avec les champs de bases associés $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$, alors les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{kl}\left\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right\} \tag{3.1}$$

où g_{ij} sont les coordonneés de g relativement à la carte (U, φ) et $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$.

Preuve. *On pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, comme $[\partial_i, \partial_j] = 0, i, j = 1, \ldots, m$, on a*

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\right) &= 2\sum_{s=1}^m g\left(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l\right) \\ &= 2\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} \end{aligned}$$

et d'après la formule de Koszul :

$$2g\left(\nabla_{\theta_i}\partial_j, \partial_l\right) = \partial_i\left(g\left(\partial_j, \partial_l\right)\right) + \partial_j\left(g\left(\partial_l, \partial_i\right)\right) - \partial_l\left(g\left(\partial_i, \partial_j\right)\right)$$

donc :

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2}\left\{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right\}$$

d'où :

$$\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} g^{lk} \{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\}$$

$$\sum_{s,l=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{lk} \{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\}$$

comme $\left(g^{ij}\right)$ *est la matrice inverse de* (g_{ij})*, on a :*

$$\sum_{l=1}^{m} g_{sl} g^{lk} = \delta_{ks}$$

où δ_{ks} *est le symbole de Kronecker, on obtient :*

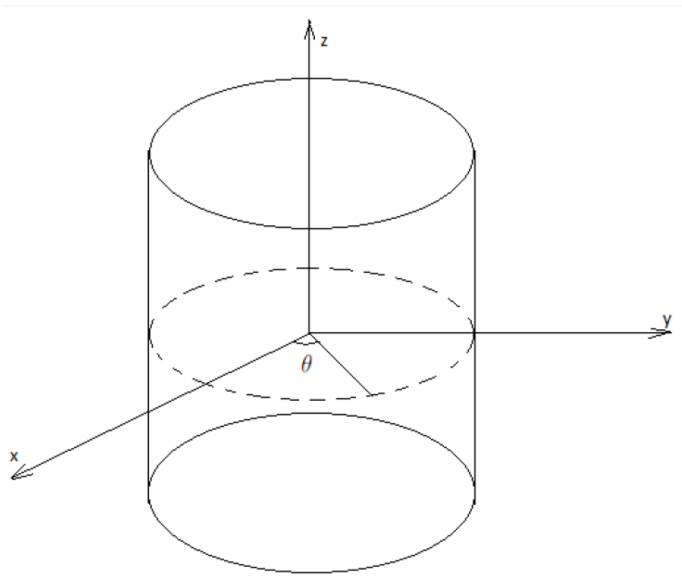
$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right\}$$

Exemple 3.5.1. *Soit* $M = \mathbb{R}_p^n$ *avec* $g = -dx_1^2 - \ldots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \ldots + dx_n^2$*, alors :*

$$g_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_j, \quad \epsilon_j = \begin{cases} -1, & 1 \leq j \leq p \\ +1, & p+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Remarquant que les fonctions g_{ij} *sont constantes, d'après la définition de coefficients de Christoffel, on a* $\Gamma_{ij}^{k} = 0$ *pour tout* $i, j, k = 1, \ldots, n$ *.*

Exemple 3.5.2. ***(Coordonnées Cylindrique)***



On a, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ *et* $z = z$ *. D'où ,* $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ *de* $\mathbb{R}^3$ *devient :*

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

et d'après la proposition (3.5.1). on obtient :

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = -r\partial_r, \quad \nabla_{\partial_\theta}\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\theta$$

Définition 3.5.4. *Soit* ∇ *la connexion de Levi-Civita de* (M, g).

1. $\nabla_X f = X(f), \forall X \in \Gamma(TM), \forall f \in C^\infty(M)$
2. $(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y), \forall X, Y \in \Gamma(TM), \forall \omega \in \Gamma(T^*M)$
3. *Soit* T *un tenseur de type* $(s, r), \forall X, Y_1, \ldots, Y_r \in \Gamma(TM)$ *,* $\forall \omega_1, \ldots, \omega_s \in \Gamma(T^*M)$,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(\omega_1, \ldots, \omega_s, Y_1, \ldots, Y_r) =& X(T(\omega_1, \ldots, \omega_s, Y_1, \ldots, Y_r)) \\ &- T(\nabla_X \omega_1, \ldots, \omega_s, Y_1, \ldots, Y_r) \\ &- \ldots - T(\omega_1, \ldots, \nabla_X \omega_s, Y_1, \ldots, Y_r) \\ &- T(\omega_1, \ldots, \omega_s, \nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) \\ &- \ldots - T(\omega_1, \ldots, \omega_s, Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r).\end{aligned}$$

Remarque 3.5.2. *Localement, si* $X = X_i\partial_i$ *et* $\omega = \omega_j dx_j$*, on a* $\nabla_X \omega = \alpha_k dx_k$*, avec :*

$$\begin{aligned}\alpha_k &= (\nabla_X \omega)(\partial_k) \\ &= X(\omega(\partial_k)) - \omega(\nabla_X \partial_k) \\ &= X_i\partial_i(\omega_k) - \omega_j dx_j(X_i \Gamma_{ik}^m \partial_m) \\ &= X_i\partial_i(\omega_k) - \omega_j X_i \Gamma_{ik}^j\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\nabla_X \omega = X_i\left(\partial_i(\omega_k) - \omega_j \Gamma_{ik}^j\right) dx_k$

Proposition 3.5.2. *Soient* (M, g) *une variété semi-Riemannienne, et* $X \in \Gamma(TM)$*. On pose,* $X^\flat(Y) = g(X, Y)$*, pour tout* $Y \in \Gamma(TM)$*. Alors, la fonction* $X \mapsto X^\flat$ *est* $C^\infty(M)$ *-isomorphisme de* $\Gamma(TM)$ *dans* $\Gamma(T^*M)$.

Preuve. *Soit* $\varphi : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M), \varphi(X) = X^\flat$.

1. φ *est* $C^\infty(M)$ *-linéaire :*
   a) $(fX)^\flat = fX^\flat, \forall X \in \Gamma(TM), \forall f \in C^\infty(M)$.
   b) $(X + Y)^\flat = X^\flat + Y^\flat, \forall X, Y \in \Gamma(TM)$

2. φ est bijective :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \Gamma\left(T^*M\right) &\to \Gamma(TM) \\ \omega &\mapsto \varphi^{-1}(\omega) = \omega^{\#} \end{aligned}$$

où $g\left(\omega^{\#}, X\right) = \omega(X), \forall X \in \Gamma(TM)$. En effet :

$$\begin{aligned} \left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right)(\omega)(X) &= \varphi\left(\omega^{\#}\right)(X) \\ &= \left(\omega^t\right)^{\flat}(X) \\ &= g\left(\omega^{\#}, X\right) \\ &= \omega(X) \\ g\left(\left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)(X), Y\right) &= g\left(\left(X^{\flat}\right)^{\#}, Y\right) \\ &= g(X, Y) \end{aligned}$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM), \forall \omega \in \Gamma\left(T^*M\right)$ *, c'est-à-dire*

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_{\Gamma(T^*M)}, \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\Gamma(TM)}$$

3.6 Géodésiques

Définition 3.6.1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, de dimension n, et soit $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to M$ une courbe C^∞ sur M. L'ensemble des champs de vecteurs le long de γ, est défini par :*

$$\Gamma\left(\gamma^{-1}TM\right) = \left\{Y : I \to TM \mid Y(t) \in T_{\gamma(t)}M, \forall t \in I\right\}$$

Remarque 3.6.1. *Soit $X \in \Gamma(TM)$, c'est-à-dire $X : M \to TM$ est une application différentiable, tel que $X(x) \in T_xM, \forall x \in M$, alors $X \circ \gamma \in \Gamma\left(\gamma^{-1}TM\right)$*

Définition 3.6.2. *Soit $Y \in \Gamma\left(\gamma^{-1}TM\right)$, la dérivée covariante de Y le long de γ, est définie par :*

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} Y = \nabla^M_{d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)} \widetilde{Y}$$

où $\widetilde{Y} \in \Gamma(TM)$ tel que $\widetilde{Y} \circ \gamma = Y$.

Remarque 3.6.2. *Soit $\{\partial_i\}$ une base locale des champs de vecteurs sur M, alors $\{\partial_i \circ \gamma\}$ est une base locale des champs de vecteurs le long de γ. Donc, $\forall Y \in \Gamma\left(\gamma^{-1}TM\right)$. $\exists Y_i : I \to \mathbb{R}(i = 1, \ldots, n)$ tel que $Y(t) = Y_i(t)\partial_i|_{\gamma(t)}$. D'où :*

$$\begin{aligned} \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} Y &= \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} Y_i\left(\partial_i \circ \gamma\right) \\ &= \frac{dY_i}{dt}\left(\partial_i \circ \gamma\right) + Y_i \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\left(\partial_i \circ \gamma\right) \\ &= \frac{dY_i}{dt}\left(\partial_i \circ \gamma\right) + Y_i \nabla^M_{d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)} \partial_i \end{aligned}$$

or $d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)\in\Gamma\left(\gamma^{-1}TM\right)$ *et localement* $d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{d\gamma_j}{dt}\left(\partial_j\circ\gamma\right)$, *où* $\gamma_j=x_j\circ\gamma$. *Ainsi.*

$$\begin{aligned}\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}Y &= \frac{dY_i}{dt}\left(\partial_i\circ\gamma\right)+Y_i\frac{d\gamma_j}{dt}\left(\nabla^{M}_{\partial_j}\partial_i\right)\circ\gamma\\ &= \left(\frac{dY_k}{dt}+Y_i\frac{d\gamma_j}{dt}\left(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma\right)\right)\left(\partial_k\circ\gamma\right) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Donc la relation (3.2) est indépendante du choix de $\tilde{Y}$ *i.e cette connexion est bien définie.*

Définition 3.6.3. *Un champ de vecteurs* $Y(t)$ *le long d'une courbe* $\gamma : I\to(M,g)$ *est dit parallèle le long de* γ, *si* $\left.\left(\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}Y\right)\right|_t=0, \forall t\in I$.

Proposition 3.6.1. *Soient* $\gamma : I\to(M,g)$ *une courbe,* $t_0\in I$, *et* $v\in T_{\gamma(t_0)}M$. *Alors, il existe un unique champ de vecteurs* Y_v *parallèle le long de* γ *tel que* $Y_v\left(t_0\right)=v$.

Preuve. *Le système* (S) *suivant :*

$$\left.\left(\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}Y_v\right)\right|_t=0,\quad Y_v\left(t_0\right)=v$$

est équivalent à :

$$\left.\frac{dY_v^k}{dt}\right|_t+Y_v^i(t)\left.\frac{d\gamma_j}{dt}\right|_t^k\left(\gamma(t)\right)=0,\quad Y_v^i\left(t_0\right)=v_i$$

Soit $V=\left(Y_v^1,\ldots,Y_v^n\right)$, *et soit la matrice* $A=\left(-\left.\frac{d\gamma_j}{dt}\right|_t^k {}^{k}_{ij}(\gamma(t))\right)_{ki}$, *alors* (S) *devient :*

$$AV=V',\quad V\left(t_0\right)=v$$

d'après le théorème de Cauchy, (S) *admet une unique solution.*

Proposition 3.6.2. *Soient* (M,g) *une variété semi-Riemannienne,* $\gamma : I\to(M,g)$,

$$P_{t_0}^{t_1}(\gamma) : T_{\gamma(t_0)}M\to T_{\gamma(t_1)}M,\quad v\mapsto Y_v\left(t_1\right)$$

Cette application est linéaire et inversible, appelée transport parallèle le long de γ.

La proposition (3.6.2) résulte immédiatement de l'unicité de Y_v.

Définition 3.6.4. *Soit* (M,g) *une variété semi-Riemannienne, de dimension* n, *une courbe* γ *sur* (M,g) *est dite géodésique si* $\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)=0$, *c'est-à-dire :*

$$\frac{d^2\gamma_k}{dt^2}+\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\left(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma\right)=0,\quad\forall k=1,\ldots,n$$

Exemple 3.6.1. *Si* $M = \mathbb{R}$ *et* $g = dx^2$*, alors une courbe* $\gamma : I \to \mathbb{R}$ *est une géodésique ssi* $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$*, car* $\Gamma_{11}^1 = 0$*, cest-à-dire,* $\gamma(t) = at + b$*, où* $a, b \in \mathbb{R}$

Exemple 3.6.2. *Si* $M = \mathbb{R}_p^n$*, alors une courbe* $\gamma : I \to \mathbb{R}_p^n$ *est une géodésique ssi* $\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} = 0$ *,car* $\Gamma_{ij}^k = 0$ *, c'est-à-dire,* $\gamma(t) = at + b$ *, où* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *.*

Exemple 3.6.3. *On considère la paramétrisation de la sphère :*

$$\mathbb{S}^n = \left\{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1\right\}$$

et soit la projection stéréographique, $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *donnée par :*

$$\begin{aligned}\psi(x) = \left(\tfrac{2x_1}{\|x\|^2+1}, \ldots, \tfrac{2x_n}{\|x\|^2+1}, \tfrac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n\\ \psi^{-1}(u) = \left(\tfrac{u_1}{1-u_{n+1}}, \ldots, \tfrac{u_n}{1-u_{n+1}}\right), \quad u \in \mathbb{R}^{n+1}\end{aligned}$$

Les composantes du tenseur métrique relativement à ψ *sont :*

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{\left(1 + \|x\|^2\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Les symboles de Christoffel sont :

$$\Gamma_{ii}^i(x) = \Gamma_{ij}^j(x) = \Gamma_{ji}^i(x) = -\Gamma_{jj}^i(x) = \frac{-2x_i}{1 + \|x\|^2}, \quad \Gamma_{ij}^k(x) = 0$$

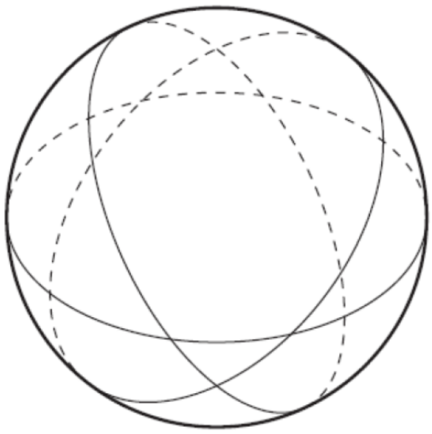
pour $i, j, k = 1, ..n$ *distincts, pour la preuve en utilisant la proposition (3.5.1)*
Soit :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

La représentation de γ *dans cette carte est donnée par :*

$$\begin{aligned}\left(\psi^{-1} \circ \gamma\right)(t) &= (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))\\ &= (\cos t, \sin t, 0, \ldots, 0) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

D'après la défintion de géodésique et (3.3) γ *est une géodésique sur* $\mathbb{S}^n$*.*



Théorème 3.6.1. *Soit (M,g) une variété semi-Riemannienne. Pour tout $x \in M$ et tout vecteur $v \in T_xM$, il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec $0 \in I$, et une unique géodésique $\gamma : I \to (M,g)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Lemme 3.6.1. *Soit (M,g) une variété semi-Riemannienne, et soit $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to (M,g)$ une géodésique non-constante. Alors, $\gamma \circ h : \mathbb{R} \supset J \to (M,g)$ est une géodésique si et seulement si $h(s) = as + b$, où $h : J \to I$.*

Preuve. *La courbe $\gamma \circ h$ est une géodésique si :*

$$\nabla^{\gamma \circ h}_{\frac{d}{ds}} d\gamma \left(dh \left(\frac{d}{ds} \right) \right) = 0 \tag{3.4}$$

or $d\gamma \left(dh \left(\frac{d}{ds} \right) \right) = \frac{dh}{ds} d\gamma \left(\frac{d}{dt} \right)$,(3.4) devient :

$$\frac{d^2h}{ds^2} d\gamma \left(\frac{d}{dt} \right) + \left(\frac{dh}{ds} \right)^2 \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} d\gamma \left(\frac{d}{dt} \right) = 0 \tag{3.5}$$

comme γ est une géodésique non-constante, (3.5) est équivalent à $\frac{d^2h}{ds^2} = 0$.

3.7 Tenseur de Courbure

Proposition 3.7.1. *Soient (M,g) une variété semi-Riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita. Alors, la fonction $R : \Gamma(TM)^3 \to \Gamma(TM)$ définie par :*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$$

est un tenseur de type $(1,3)$ sur M, appelée tenseur de courbure.

Le tenseur de courbure R s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :

$$R\left(\partial_i,\partial_j\right)\partial_k=\sum_{l=1}^{n}R_{ijk}^{l}\partial_l R_{ijk}^{l}=\partial_i\left(\Gamma_{jk}^{l}\right)-\partial_j\left(\Gamma_{ik}^{l}\right)+\sum_{m=1}^{n}\left\{\Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m}-\Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m}\right\}$$

où $\{\partial_i\}$ est une base locale des champs de vecteurs sur M.

Propriété 3.7.1. *Le tenseur de courbure R a les propriétés suivantes :*

1. $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$ *(antisymétrie)*
2. $g(R(X,Y)Z,W)=-g(R(X,Y)W,Z)$.
3. $g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$.
4. *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique :*

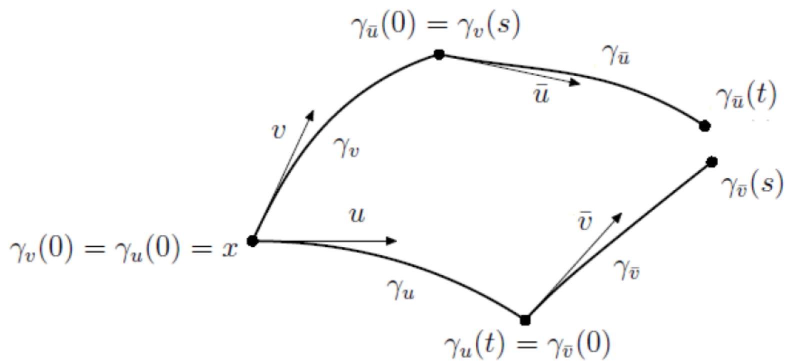
$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$$

5. *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle :*

$$\left(\nabla_X R\right)(Y,Z)+\left(\nabla_Y R\right)(Z,X)+\left(\nabla_Z R\right)(X,Y)=0$$

Interprétations géométriques

Soient $x\in M, X,Y,Z\in\Gamma(TM), u=X_x, v=Y_x$ et $w\in Z_x\left(\in T_xM\right)$. On définit le parallélogramme sur une variété différentiable M, muni d'une connexion linéaire ∇, comme suit :



où. $\bar v=P_0^t\left(\gamma_u\right)(v)$ et $\bar u=P_0^s\left(\gamma_v\right)(u)$. Localement, on a :

$$u=\dot\gamma_u(0)=\left.\frac{d\gamma_u^i}{dt}\right|_{t=0}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x,\quad v=\dot\gamma_v(0)=\left.\frac{d\gamma_v^i}{dt}\right|_{t=0}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$$

or, $u = u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ et $v = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$, donc $u_i = \frac{d\gamma_u^i}{dt}\Big|_{t=0}$ et $v_i = \frac{d\gamma_i^i}{dt}\Big|_{t=0}$. D'où :

$$\gamma_u^i(t) = \gamma_u^i(0) + tu_i + \ldots, \quad \gamma_v^i(s) = \gamma_v^i(0) + sv_i + \ldots$$

D'après la définition de transport parallèle le long de γ_u et γ_v, on a :

$$\begin{aligned} \bar{v} = Y^v(t), &\quad \nabla^{\gamma_u}_{\frac{d}{dt}} Y^v = 0 \\ \bar{u} = Y^u(s), &\quad \nabla^{\gamma_v}_{\frac{d}{ds}} Y^u = 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{dY_v^k}{dt} + Y_v^i \frac{d\gamma_u^j}{dt}\left(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma_u\right) = 0$, et $\frac{dY_u^k}{ds} + Y_u^i \frac{d\gamma_v^j}{ds}\left(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma_v\right) = 0, \forall k = 1, \ldots, n$. D'où :

$$\begin{aligned} Y_v^k(t) &= Y_v^k(0) + t\frac{dY_v^k}{dt}\Big|_{t=0} + \ldots \\ &= Y_v^k(0) - t\Gamma_{ij}^k(x) v_i \frac{d\gamma_u^j}{dt}\Big|_{t=0} + \ldots \\ &= Y_v^k(0) - t\Gamma_{ij}^k(x) v_i u_j + \ldots \end{aligned}$$

et de meme méthode, on obtient, $Y_u^k(s) = Y_u^k(0) - s\Gamma_{ij}^k(x) u_i v_j + \ldots$

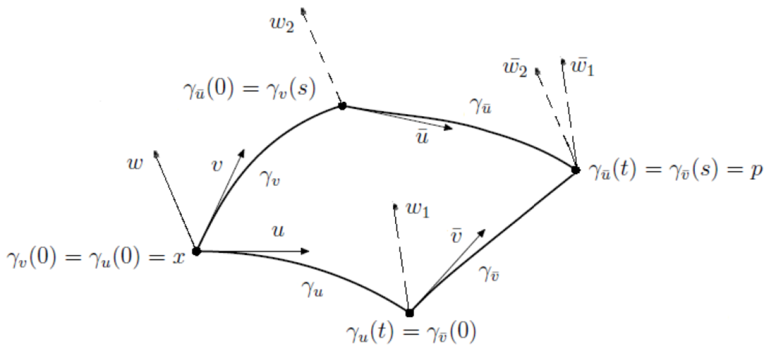
$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{u}}^l(t) &= \gamma_{\bar{u}}^l(0) + t\frac{d\gamma_{\bar{u}}^l}{dt}\Big|_{t=0} + \ldots \\ &= \gamma_v^l(s) + t\bar{u}_l + \ldots \\ &= \gamma_v^l(0) + s\frac{d\gamma_v^l}{ds}\Big|_{s=0} + tY_u^l(s) + \ldots \\ &= \gamma_v^l(0) + sv_l + t\left(Y_u^l(0) + \frac{dY_u^l}{ds}\Big|_{s=0}\right) + \ldots \\ &= \gamma_v^l(0) + sv_l + tu_l - tsu_i v_j \Gamma_{ij}^k(x) + \ldots \end{aligned}$$

et $\gamma_{\bar{v}}^l(s) = \gamma_u^l(0) + tu_l + sv_l - \mathrm{st}\, v_i u_j \Gamma_{ij}^k(x) + \ldots$, d'où :

$$\gamma_{\bar{u}}^l(t) - \gamma_{\bar{v}}^l(s) = -tsu_i v_j \left(\Gamma_{ij}^k(x) - \Gamma_{ji}^k(x)\right) + \ldots$$

Soit T la torsion de ∇, alors $T_{ij}^l(x) = \Gamma_{ij}^l(x) - \Gamma_{ji}^l(x)$. Alors $\gamma_{\bar{u}}(t) = \gamma_{\bar{v}}(s)$ si et seulement si $T = 0$, c'est-à-dire la torsion est une obstruction à la fermeture de parallélogrammes.

En particulier, si M une variété semi-Riemannienne, et ∇ la connexion de LeviCivita, le parallélogramme construit ci-dessus se referme donc $\gamma_{\bar{u}}(t) = \gamma_{\bar{v}}(s) = p$:



Soit $w_1 = P_0^t(\gamma_u)(w) = Y_w(t)$, localement on a :

$$\begin{aligned}
w_1^l &= Y_w^l(0) + t\frac{dY_w^l}{dt}\bigg|_{t=0} + \dots \\
&= w_l + t\left(- Y_w^i(0)\frac{d\gamma_u^j}{dt}\bigg|_{t=0} \Gamma_{ij}^l(x)\right) + \dots \\
&= w_l - tw_iu_j\Gamma_{ij}^l(x) + \dots
\end{aligned}$$

et soit $\bar w_1 = P_0^s(\gamma_{\bar v})(w_1) = Y_{w_1}(s)$, de la même façon :

$$\begin{aligned}
\bar w_1^l &= Y_{w_1}^l(0) + s\frac{dY_{w_1}^l}{ds}\bigg|_{s=0} + \dots \\
&= w_1^l + s\left(- Y_{w_1}^i(0)\frac{d\gamma_{\bar v}^j}{ds}\bigg|_{s=0} \Gamma_{ij}^l(\gamma_{\bar v}(0))\right) + \dots \\
&= w_1^l - sw_1^i\bar v_j\Gamma_{ij}^l(\gamma_u(t)) + \dots \\
&= w_1^l - sw_1^iY_v^j(t)\Gamma_{ij}^l(\gamma_u(t)) + \dots \\
&= w_1^l - sw_1^iY_v^j(t)\left[\Gamma_{ij}^l(x) + t\frac{d\left(\Gamma_{ij}^l \circ \gamma_u\right)}{dt}\bigg|_{t=0}\right] + \dots
\end{aligned}$$

sur une carte normale en $x\left(\Gamma_{ij}^{l}(x)=0\right)$, avec $\left.\frac{d\left(\Gamma_{ij}^{l}\circ\gamma_u\right)}{dt}\right|_{t=0}=u_s\left.\frac{\partial\Gamma_{ij}^{l}}{\partial x_s}\right|_x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1^l &= w^l - tsw^iY_v^j(t)u_s\left.\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial x_s}\right|_x + \ldots \\
&= w^l - tsw^iY_v^j(0)u_s\left.\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial x_s}\right|_x + \ldots \\
&= w^l - tsw^iv^ju_s\left.\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial x_s}\right|_x + \ldots,
\end{aligned}$$

et de meme, $\bar{w}_2^l = w^l - \mathrm{st}\, w^iu^jv_s\left.\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial x_s}\right|_x + \ldots$, d'où :

$$\bar{w}_1^l - \bar{w}_2^l = -tsw^iv^jv_s(\underbrace{\left.\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial x_s}\right|_x - \left.\frac{\partial\Gamma_{is}^l}{\partial x_j}\right|_x)}_{R_{sji}^l(x)}$$

Finalement, $\bar{w}_1=\bar{w}_2$ si et seulement si $R(u,v)w=0$ c'est-à-dire $(R(X,Y)Z)_x=0$.

Définition 3.7.1. *Soient (M,g) une variété semi-Riemannienne, de dimension n, avec $n\geq 2, x\in M$ et π un 2-plan de T_xM de base $\{X,Y\}$.*

1. *π est dit non-dégénéré si $Q(X,Y)=g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2\neq 0$.*
2. *Si π est non-dégénéré, on définit la courbure sectionnelle de π, comme suit :*
$$K(\pi)=K(X,Y)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{Q(X,Y)}$$
3. *On dite que (M,g) est de courbure constante si $K(\pi)=k$ (pour tout 2 -plan π).*

Proposition 3.7.2. *Une variété semi-Riemannienne (M,g) est de courbure constante k si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$R(X,Y)Z=k(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y),\quad \forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$$

Définition 3.7.2. *La courbure de Ricci d'une variété semi-Riemannienne (M,g), de dimension n est un tenseur de type $(0,2)$ défini par :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \mathrm{trace}(Z\mapsto R(Z,X)Y) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\epsilon_i g\left(R\left(e_i,X\right)Y,e_i\right),
\end{aligned}$$

pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$, où $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur M $(\epsilon_i=g\left(e_i,e_i\right))$.

Propriété 3.7.2. *La courbure de Ricci est symétrique. En effet :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g\left(R\left(e_i, X\right) Y, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g\left(R\left(Y, e_i\right) e_i, X\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g\left(R\left(e_i, Y\right) X, e_i\right) \\ &= \mathrm{Ric}(Y,X).\end{aligned}$$

Définition 3.7.3. *Le tenseur de Ricci d'une variété semi-Riemannienne (M,g), de dimension n, est un tenseur de type $(1,1)$ sur M, défini par :*

$$\mathrm{Ricci}(X) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i R\left(X, e_i\right) e_i, \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

Remarque 3.7.1. *Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a $\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ricci}(X), Y)$.*

Définition 3.7.4. *On appelle courbure scalaire d'une variété semi-Riemannienne (M,g), de dimension n, la fonction définie sur M par :*

$$S = \textit{ trace Ric } = \sum_{i,j=1}^{m} \epsilon_i \epsilon_j g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, e_i\right)$$

Corollaire 3.7.1. *Soit (M,g) une variété semi-Riemannienne, de dimension n. de courbure constante k, alors*

1. $\mathrm{Ricci}(X) = (n-1)kX$,
2. $\mathrm{Ric}(X,Y) = (n-1)kg(X,Y)$,
3. $S = n(n-1)k$

3.8 L'opérateur Gradient

Définition 3.8.1. *Soit (M,g) une variété semi-Riemannienne, de dimension n. on définit l'opérateur gradient par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{grad} : C^{\infty}(M) &\to \Gamma(TM), \\ f &\mapsto \mathrm{grad}\, f = (df)^{\#}\end{aligned}$$

tel que pour tout $X \in \Gamma(TM), g(\mathrm{grad}\, f, X) = X(f)$.

Expression du gradient en coordonneés locales

Soit (U,φ) une carte sur M avec les champs de base associée $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}$, alors :

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{3.6}$$

Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base orthonormée sur (M,g), alors :

$$\operatorname{grad}\ f=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i e_i(f)e_i$$

Propriété 3.8.1. *Soit (M,g) une variété semi-Riemannienne, alors :*

1. $\operatorname{grad}(f+h)=\operatorname{grad} f+\operatorname{grad} h$
2. $\operatorname{grad}(fh)=h\ grad\ f+f\operatorname{grad} h$
3. $(\operatorname{grad} f)(h)=(\operatorname{grad} h)(f)$
4. $g\left(\nabla_X \operatorname{grad} f,Y\right)=g\left(\nabla_Y \operatorname{grad} f,X\right)$ *où* $f,h\in C^\infty(M)$ *et* $X,Y\in\Gamma(TM)$.

Preuve.

1.
$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}(f+h),X)&=X(f+h)\\ &=X(f)+X(h)\\ &=g(\operatorname{grad} f,X)+g(\operatorname{grad} h,X)\\ &=g(\operatorname{grad} f+\operatorname{grad} h,X)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}(fh),X)&=X(fh)\\ &=hX(f)+fX(h)\\ &=hg(\operatorname{grad} f,X)+fg(\operatorname{grad} h,X)\\ &=g(h\operatorname{grad} f+f\operatorname{grad} h,X)\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} f)(h)&=g(\operatorname{grad} h,\operatorname{grad} f)\\ &=g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} h)\\ &=(\operatorname{grad} h)(f)\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} g\left(\nabla_X \operatorname{grad} f,Y\right)&=X(g(\operatorname{grad} f,Y))-g\left(\operatorname{grad} f,\nabla_X Y\right)\\ &=X(Y(f))-\left(\nabla_X Y\right)(f)\end{aligned}$$

d'où :

$$g\left(\nabla_Y \operatorname{grad} f,X\right)=Y(X(f))-\left(\nabla_Y X\right)(f),$$

$$\begin{aligned}g\left(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y\right)-g\left(\nabla_Y \operatorname{grad} f, X\right)= & X(Y(f))-\left(\nabla_X Y\right)(f) \\ & -Y(X(f))+\left(\nabla_Y X\right)(f) \\ = & [X, Y](f)-[X, Y](f) \\ = & 0\end{aligned}$$

3.9 L'opérateur Divergence

Soit X un champ de vecteurs sur une variété semi-Riemannienne (M, g), alors :

$$\begin{aligned}\nabla X: \Gamma(TM) & \rightarrow \Gamma(TM), \\ Z & \mapsto \nabla_Z X\end{aligned}$$

est une application $C^{\infty}(M)$ -linéaire.

Définition 3.9.1. *La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $\operatorname{div} X$ est une fonction sur M définie par :*

$$\operatorname{div} X=\operatorname{trace} \nabla X$$

En coordoonée locale, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X & =d x_i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X\right) \\ & =g^{ij} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée locale sur M. alors :

$$\operatorname{div} X=\sum_{i=1}^n \epsilon_i g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right)$$

La divergence d'une 1 -forme ω sur M est définie par :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \omega & =\operatorname{trace}\left(Z \mapsto \nabla_Z \omega\right) \\ & =\sum_{i=1}^n \epsilon_i\left(\nabla_{e_i} \omega\right)\left(e_i\right) \\ & =\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left(\nabla_{\frac{\theta}{\partial x_i}} \omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

Dans la définition de div X nous pouvons également définir la divergence de $(1, r)$ tenseur T pour être $(0, r)$ -tenseur :

$$(\operatorname{div} T)\left(X_1, \ldots, X_r\right)=\operatorname{trace}\left(Z \mapsto\left(\nabla_Z T\right)\left(X_1, \ldots, X_r\right)\right)$$

Première expression de la divergence en coordonnées locales

Proposition 3.9.1. *Soit* (M^m, g) *une variété semi-Riemannienne, alors :*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X_j \Gamma_{ij}^i \right)$$

avec $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TM)$.

Preuve. *Sur une carte locale sur* M*, nous avons :*

$$X = X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} dx_i \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X_j \Gamma_{ij}^i \right). \end{aligned}$$

Propriété 3.9.1. *Soit* (M, g) *une variété semi-Riemannienne, alors :*

1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$
2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + X(f)$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.

Preuve. *On applique directement la définition du divergence, soit* $\{e_i\}$ *une base orthonormée locale sur* M*. on a :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X + Y) &= \epsilon_i g \left(\nabla_{e_i}(X + Y), e_i \right) \\ &= \epsilon_i g \left(\nabla_{e_i} X, e_i \right) + \epsilon_i g \left(\nabla_{e_i} Y, e_i \right) \\ &= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \epsilon_i g \left(\nabla_{e_i} fX, e_i \right) \\ &= \epsilon_i g \left(e_i(f) X + f \nabla_{e_i} X, e_i \right) \\ &= \epsilon_i e_i(f) g \left(X, e_i \right) + \epsilon_i f g \left(\nabla_{e_i} X, e_i \right) \\ &= X(f) + f \operatorname{div} X \end{aligned}$$

Deuxième expression de la divergence en coordonnées locales

Lemme 3.9.1. *Sur une variété Riemannienne* (M, g), *on a :*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right) = \sqrt{\det(g_{ij})}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{lk}^{l}$$

Proposition 3.9.2. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, alors :*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}X_k\right)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Preuve. *D'après la proposition de première expression de la divergence en coordonnées locales, on a :*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_j \Gamma_{ij}^{i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} X_j \sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}^{i}\end{aligned}$$

en utilisant le Lemme (3.9.1) avec $G = (g_{ij})$, *alors un calcul direct donne :*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \frac{1}{\sqrt{\det G}}\left(\sqrt{\det G}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} X_j\sqrt{\det G}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}^{i}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}}\left(\sqrt{\det G}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} X_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\det G})\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det G}X_i\right)\end{aligned}$$

en utilisant la convention d'Einstein on a :

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det G}X_i\right)$$

3.10 L'opérateur Laplacien

Définition 3.10.1. *Soit* (M, g) *une variété semi-Riemannienne, on définit l'opérateur laplacien noté* $\triangle$, *sur* M *par :*

$$\begin{aligned}\Delta : C^{\infty}(M) &\to C^{\infty}(M)\\ f &\mapsto \Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\end{aligned}$$

Propriété 3.10.1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, alors :*

1. $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$
2. $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)$

pour tout $f, h \in C^\infty(M)$.

Preuve. *Soit $f, h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que $X(f) = g(\operatorname{grad} f, X)$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\Delta(f + h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f + h)) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) \\
&= \Delta(f) + \Delta(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) \\
&= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f) \\
&= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f) \\
&= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\
&= f\Delta(h) + h\Delta(f) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)
\end{aligned}$$

Expression du Laplacien en coordonnées locales

Proposition 3.10.1. *Soit (M, g) une variété semi-Riemannienne, alors :*

$$\Delta(f) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \tag{3.7}$$

pour tout $f \in C^\infty(M)$.

Preuve. *Soit $f \in C^\infty(M)$, alors :*

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
&= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - g \left(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) \\
&= g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \Gamma_{ij}^k g \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \\
&= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)
\end{aligned}$$

Exemple 3.10.1. *Soit $\mathbb{R}_p^n$ muni du produit scalaire $g = -dx_1^2 - \ldots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \ldots + dx_n^2$ $(g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_j)$ alors pour tous fonction différentiable f sur*

$\mathbb{R}_p^n$ *et* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *un champ de vecteurs sur* $\mathbb{R}^m$*, on a :*

$$\textit{grad } f = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \quad \Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Théorème 3.10.1. *Soient* (M, g) *une variété semi-Riemannienne, Ric la courbure de Ricci et S la courbure scalaire, alors* $dS = 2\, div\, Ric$ *.*

Preuve. *Soit* $X \in \Gamma(TM)$ *et soit* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *une base orthonormée sur* M*. tel que* $\left(\nabla_{e_i} e_j\right)_x = 0$*, où* $x \in M$*. On a (en* x*) :*

$$\begin{aligned}
(div\, Ric)(X) &= \epsilon_i \left(\nabla_{e_i} \; Ric \;\right)(e_i, X) \\
&= \epsilon_i e_i \left(\mathrm{Ric}\left(e_i, X\right)\right) \\
&= \epsilon_i \epsilon_j e_i \left(g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, X\right)\right) \\
&= \epsilon_i \epsilon_j e_i \left(g\left(R\left(e_j, X\right) e_i, e_j\right)\right) \\
&= \epsilon_i \epsilon_j e_i \left(g\left(R\left(X, e_j\right) e_j, e_i\right)\right) \\
&= \epsilon_i \epsilon_j g\left(\nabla_{e_i} R\left(X, e_j\right) e_j, e_i\right),
\end{aligned}$$

d'après l'identité de Bianchi. on obtient :

$$\begin{aligned}
(div\, Ric)(X) &= -\epsilon_i \epsilon_j g\left(\nabla_X R\left(e_j, e_i\right) e_j, e_i\right) - \epsilon_i \epsilon_j g\left(\nabla_{e_j} R\left(e_i, X\right) e_j, e_i\right) \\
&= -\epsilon_i \epsilon_j X\left(g\left(R\left(e_j, e_i\right) e_j, e_i\right)\right) - \epsilon_i \epsilon_j e_j\left(g\left(R\left(e_i, X\right) e_j, e_i\right)\right) \\
&= \epsilon_i \epsilon_j X\left(g\left(R\left(e_i, e_j\right) e_j, e_i\right)\right) - \epsilon_i \epsilon_j e_j\left(g\left(R\left(e_j, e_i\right) e_i, X\right)\right)
\end{aligned}$$

et d'après la définition de la courbure de Ricci :

$$\begin{aligned}
(div\, Ric)(X) &= \epsilon_i X\left(\mathrm{Ric}\left(e_i, e_i\right)\right) - \epsilon_j e_j\left(\mathrm{Ric}\left(e_j, X\right)\right) \\
&= dS(X) - (div\, Ric)(X)
\end{aligned}$$